ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 6-10.

УДК 517.9

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ $O(3)$–МОДЕЛИ

А.Б. БОРИСОВ

Аннотация. Трехмерная $O(3)$ модель для единичного вектора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ имеет многочисленные применения в теории поля и физике конденсированных сред. Показано, что эта модель интегрируема при некоторой дифференциальной связи (определенных ограничениях на градиенты полей $\Theta(\mathbf{r})$, $\Phi(\mathbf{r})$, параметризующих вектор $\mathbf{n}(\mathbf{r})$). При наличии дифференциальной связи уравнения модели редуцируются к одномерному уравнению sin–Gordon, определяющему зависимость поля $\Theta(\mathbf{r})$ от вспомогательного поля $a(\mathbf{r})$, и систему двух уравнений $(\nabla S)(\nabla S) = 0$, $\Delta S = 0$ для комплекснозначной функции $S(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\Phi(\mathbf{r})$. Показано, что непосредственное решение этой системы дает все известные ранее точные решения модели: двумерные магнитные инстантоны и трехмерные структуры типа «ежей». Найдено точное уравнений для поля $S(\mathbf{r})$ в виде произвольной неявной функции от двух переменных, которое сразу дает вид решения для полей $\Theta(\mathbf{r})$, $\Phi(\mathbf{r})$ в неявном виде. Показано, что найденное таким образом точное решение системы для поля $S(\mathbf{r})$ приводит к точному решению уравнений $O(3)$–модели в виде произвольной неявной функции от двух переменных.

Ключевые слова: интегрируемая система, $O(3)$–модель, дифференциальная подстановка, квазилинейное уравнение, общее решение.

Mathematics Subject Classification: 35C05, 35J60, 35A08

1. Введение

$O(3)$–модель в трехмерном пространстве с плотностью энергии E

$$E = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} \nabla n_j \nabla n_j \tag{1.1}$$

для единичного вектора $\mathbf{n}$

$$\mathbf{n}^2 = 1, \tag{1.2}$$

обладает явной $O(3)$–симметрией, соответствующей вращению сферы. Она принадлежит к широкому классу моделей, у которых пространство параметра порядка принадлежит многообразиям, отличным от $\mathbb{R}^N$. Эта модель имеет многочисленные применения в теории поля. В физике конденсированных сред она известна как модель Гейзенберга для описания магнитных структур в обменном приближении [1] или как модель для поля директора для описания упругих свойств жидких кристаллов в одноконстантном приближении [2].

Одномерные и двумерные точные решения $O(3)$–модели исследовались многими авторами. Показано,что в пространстве $(1,1)$ модель интегрируема методом обратной задачи рассеяния [3]. Очень интересный и популярный класс решений в $D = 2$ (инстантоны) был получен в работе [4]. Наконец, в трехмерном пространстве точные решения типа «ежей»

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{1.3}$$

A.B. Borisov, On integrability of $O(3)$–model.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (тема «Квант», номер г.р. АААА-А18-118020190095-4).

Поступила 10 марта 2021 г.

были экспериментально обнаружены и теоретически исследованы в нематических жидких кристаллах, гелии [5] и ферромагнетиках [6].

Статья спланирована следующим образом. Во втором параграфе для решения уравнений $O(3)$–модели используется дифференциальная подстановка, которая приводит эти уравнения к системе из двух уравнений для комплексной функции $S(\mathbf{r})$ и уравнению маятника. Показано, что непосредственное решение этой системы дает все известные ранее решения: двумерные (инстантоны) и трехмерные (структуры типа «ежей») модели. Точное решение системы для поля $S(\mathbf{r})$ предъявлено в третьем параграфе. Оно определяется произвольной функцией от двух переменных и дает общее решение $O(3)$–модели.

2. Дифференциальная подстановка

Для дальнейшего изложения удобно параметризовать единичный вектор $\mathbf{n}$ полями Θ, Φ:

$$\mathbf{n} = (\cos\Phi\sin\Theta, \sin\Phi\sin\Theta, \cos\Theta).$$

Тогда в переменных Θ, Φ уравнения модели (1.1) переходят в систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\Delta\Theta = \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2\sin 2\Theta, \qquad \nabla\left[(\nabla\Phi)^2\sin^2\Theta\right] = 0. \tag{2.1}$$

Уравнение (1.1) инвариантно относительно группы спиновых и пространственных вращений $SO(3)\times SO(3)$. Такая симметрия позволяет найти широкий класс точных решений. Аналитическое решение уравнения (2.1) возможно лишь в определенных классах решений. Для выделения одного из них нужно обобщить процедуру, предложенную в [7], и положить поле Θ локально зависящим от вспомогательного поля $\Theta(a[x_1,x_2,x_3])$. Тогда непосредственными вычислениями нетрудно убедиться, что из уравнений

$$\Theta''(a) = \frac{\sin 2\Theta(a)}{2}, \tag{2.2}$$

$$\Delta a = \Delta\Phi = 0, \quad (\nabla a)^2 = (\nabla\Phi)^2, \quad \nabla a\nabla\Phi = 0 \tag{2.3}$$

следуют уравнения (1.2). Здесь и далее $\Delta = \sum_{i=1}^{3}\partial^2_{x_i}$ — трехмерный оператор Лапласа. Для анализа текстур Θ мы используем решение уравнения (2.2) в виде 2π–солитона

$$\Theta = 2\mathrm{arctg}\exp(-a) \tag{2.4}$$

или решетки солитонов

$$\sin\frac{\Theta}{2} = \mathrm{cn}\left(\frac{a}{k}, k\right), \qquad 0 < k < 1. \tag{2.5}$$

Дифференциальная подстановка (2.3), как увидим далее, приводит к точному решению неинтегрируемой модели (1.1). Перейдем к решению уравнений (2.3). Введем комплексное поле

$$S = a + \mathrm{i}\Phi \tag{2.6}$$

и запишем систему (2.3) в виде системы из двух уравнений для комплексного поля S:

$$(\nabla S)(\nabla S) = 0, \tag{2.7}$$

$$\Delta S = 0. \tag{2.8}$$

Эта система обладает замечательным свойством инвариантности к заменам поля $S \to S' = F(S)$ с произвольной функцией $F(S)$, который мы будем использовать в дальнейшем.

Покажем вначале, что простейшие решения системы (2.7), (2.8) включают все указанные выше известные ранее двумерные и трехмерные решения $O(3)$–модели. Широкий класс решений, найденных в [4] описывается простой формулой

$$w = \mathrm{ctg}\frac{\Theta}{2}\exp[\mathrm{i}\Phi] = U[z], \qquad z = x + \mathrm{i}y, \tag{2.9}$$

где U — аналитическая функция. В двумерном случае уравнения (2.7), (2.8) тождественно удовлетворяются при $S = S(z)$, и связь с полем, согласно (2.4), определяется простым соотношением

$$w = \exp[S]. \tag{2.10}$$

Наиболее просто найти решения непосредственным интегрированием (2.7), (2.8) методом разделения переменных. Тогда в сферической системе координат (R, θ, φ) мы находим семейство решений:

$$S(\theta,\varphi) = F\left(s\left[\mathrm{i}\varphi + \ln \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right]\right), \qquad s = \pm 1, \tag{2.11}$$

где F — произвольная функция. Выражение (2.11) при $F = 1$, $s = 1$ и (2.6) приводят к структуре «ежей» (1.3), а также и к другим типам «ежей» при определенном выборе функции F.

3. Точные решения модели

Обсудим сейчас точные решения уравнений (2.7), (2.8). Из (2.7) сразу следует выражение для поля $S_{,x_3} = \partial_{x_3} S$

$$S_{,x_3} = \sqrt{-S_{,x_1}^2 - S_{,x_2}^2}. \tag{3.1}$$

Тогда после подстановки (3.1) уравнение (2.8) принимает простой вид

$$S_{,x_1}^2 S_{,x_2,x_2} - 2S_{,x_1,x_2} S_{,x_1} S_{,x_2} + S_{,x_2}^2 S_{,x_1,x_1} = 0. \tag{3.2}$$

Это уравнение принадлежит к обширному классу уравнений Монжа–Ампера [8], [9]. Для его решения используем следующую процедуру. Введем новые переменные

$$\alpha(x_1,x_2,x_3) = \frac{S_{,x_1}}{\sqrt{S_{,x_1}^2 + S_{,x_2}^2}}, \qquad \beta(x_1,x_2,x_3) = \frac{S_{,x_2}}{\sqrt{S_{,x_1}^2 + S_{,x_2}^2}}. \tag{3.3}$$

Нетрудно проверить, что уравнение

$$\alpha_{,x_1} + \beta_{,x_2} = 0 \tag{3.4}$$

эквивалентно (3.2). Поля α, β связаны соотношением

$$\alpha^2(x_1,x_2,x_3) + \beta^2(x_1,x_2,x_3) = 1.$$

Поэтому после параметризации полей

$$\alpha(x_1,x_2,x_3) = \sin[B(x_1,x_2,x_3)], \qquad \beta(x_1,x_2,x_3) = \cos[B(x_1,x_2,x_3)] \tag{3.5}$$

и подстановки их в (3.1), (3.3) мы получаем уравнения

$$S_{,x_1} = S_{,x_2}\mathrm{tg}[B], \qquad S_{,x_3} = -\mathrm{i}S_{,x_2}\sec[B]. \tag{3.6}$$

Условие совместности системы (3.6) приводит к замкнутому уравнению для поля B

$$B_{,x_3} + \mathrm{i}(\cos[B]B_{,x_2} + \sin[B]B_{,x_1}) = 0. \tag{3.7}$$

Из теории нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных для уравнения (3.7) следует, что поле B определяется неявным уравнением

$$G[H_1, H_2, H_3] = 0 \tag{3.8}$$

с произвольной функцией G, где величины H_1, H_2, H_3 есть интегралы характеристической системы уравнений для координат $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$:

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_3(t)=1,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t)=\mathrm{i}\sin B(x_1,x_2,x_3),\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t)=\mathrm{i}\cos B(x_1,x_2,x_3),\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(x_1,x_2,x_3)=0.\end{gathered}\tag{3.9}$$

Интегралы имеют вид

$$\begin{gathered}H_1=-\mathrm{i}x_3\sin B(x_1,x_2,x_3)+x_1,\\ H_2=-\mathrm{i}x_3\cos B(x_1,x_2,x_3)+x_2,\\ H_3=B(x_1,x_2,x_3).\end{gathered}\tag{3.10}$$

Помимо (3.7) поля $B(x_1,x_2,x_3)$ должны также удовлетворять уравнениям (3.4), (3.5):

$$B_{,x_1}-\mathrm{tg}[B]B_{,x_2}=0.\tag{3.11}$$

Подставляя в это уравнение производные поля B

$$\begin{gathered}B_{,x_1}=-\mathrm{i}\frac{G_{,H_1}}{U},\qquad B_{,x_2}=-\mathrm{i}\frac{G_{,H_2}}{U},\\ B_{,x_3}=-\frac{G_{,H_1}\sin H_3+G_{,H_2}\cos H_3}{U},\\ U=x_3(G_{,H_1}\cos H_3-G_{,H_2}\sin H_3)+\mathrm{i}G_{,H_3},\end{gathered}\tag{3.12}$$

найденные из (3.8), (3.10), мы получаем дополнительное ограничение на уравнение (3.8):

$$G_{,H_1}-G_{,H_2}\mathrm{tg}H_3=0.\tag{3.13}$$

Отсюда следует, что решения для поля B определяются неявным уравнением

$$G[H_1\sin H_3+H_2\cos H_3,H_3]=0.\tag{3.14}$$

Неоднозначность и сингулярность в общем случае решений (3.14) наиболее интересны при исследовании сингулярных дефектов в конденсированных средах.

Отметим далее важное обстоятельство. Из (3.7), (3.9) и (3.1), (3.6) сразу следуют соотношения

$$B_{,x_1}S_{,x_2}-B_{,x_2}S_{,x_1}=0,\qquad B_{,x_3}S_{,x_2}-B_{,x_2}S_{,x_3}=0.\tag{3.15}$$

Поэтому общее решение уравнений (2.7), (2.8) определяется формулой (3.14) и произвольной функцией F:

$$S(x_1,x_2,x_3)=F(B(x_1,x_2,x_3)).\tag{3.16}$$

Действительно после подстановки (3.16) в уравнения (2.7), (2.8) мы получаем систему уравнений

$$(\nabla B)(\nabla B)=0,\qquad \Delta B=0,\tag{3.17}$$

в справедливости которой нетрудно убедиться вычислением производных неявной функции (3.14).

Благодарности

Автор признателен за приглашение опубликовать статью в номере журнала, посвященному памяти А.Б. Шабата и Р.И. Ямилова. С Алексеем Борисовичем меня связывала многолетняя дружба. А.Б. Шабат был незаурядной личностью в науке и жизни. Не только его работы оказали определяющее влияние на мою научную деятельность в последние три десятилетия, но и его поддержка, а также советы всегда были полезны и неоценимы для меня.

Автор благодарен Д.В. Долгих за обсуждение, полезные замечания и помощь в подготовке рукописи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Б. Борисов, В.В. Киселев. *Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках. Т.2.* Екатеринбург: УрО РАН. 2011.
2. П. Де Жен. *Жидкие кристаллы.* М.: Мир. 1977.
3. В.Е. Захаров, С.В. Манаков, Л.П. Питаевский. *Теория солитонов. Метод обратной задачи.* М.: Наука. 1980.
4. А.А. Белавин, А.М. Поляков. *Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика* // Письма в ЖЭТФ. **22**:10, 500–506 (1975).
5. М.В. Курик, О.Д. Лаврентович. *Дефекты в жидких кристаллах: гомотопическая теория и экспериментальные исследования* // УФН. **154**:3, 381–431 (1988).
6. A.P. Malozemoff, J.C. Slonczewski. *Magnetic DomainWalls in Bubble Materials.* New York: Academic Press. 1979.
7. А.Б. Борисов. *Спиральные трехмерные структуры в ферромагнетике* // Письма ЖЭТФ. **76**:2, 95–98 (2002).
8. Р. Курант. *Уравнения с частными производными.* М.: Мир. 1964.
9. Э. Гурса. *Курс математического анализа, том 3, часть 1.* М.-Л.: ГТТИ. 1933.

Александр Борисович Борисов,
Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН,
ул. Софьи Ковалевской, 18,
620108, г. Екатеринбург, Россия
E-mail: borisov@imp.uran.ru