ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 1 (2010). С. 3-16.

УДК 517.54

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ И ИНТЕГРАЛАХ ЛАПЛАСА

Р.А. БАШМАКОВ, К.П. ИСАЕВ, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. Во многих вопросах анализа в качестве характеристики выпуклости функции используются вторые производные, что накладывает серьезные ограничения на класс рассматриваемых функций. В работе вводятся геометрические характеристики выпуклости, что с нашей точки зрения более естественно при изучении весовых функциональных пространств. Более подробно рассматривается одномерный случай, доказывается эквивалентность различных характеристик. В качестве приложения изучается асимптотика многомерного интеграла Лапласа.

Ключевые слова: выпуклые функции, сопряженная по Юнгу функция, преобразование Лапласа.

1. Геометрические характеристики выпуклых функций

Часть результатов анонсирована в работе [1].

Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ — элементы пространства $\mathbb{R}^n$, и скалярное произведение $xy = \sum_{k=1}^n x_k y_k$. Для выпуклой функции h, заданной на множестве E из $\mathbb{R}^n$, определим функцию, сопряженную по Юнгу (см. [2])

$$\widetilde{h}(y) = \sup_{x\in E}(xy - h(x)),\ y \in \mathbb{R}^n.$$

Удобно считать, что функция h принимает значение $+\infty$ вне множества E и тогда в определении $\widetilde{h}(y)$ вместо верхней грани по множеству E можно брать верхнюю грань по $\mathbb{R}^n$.

Известно (см. [2]), что $\widetilde{h}$ также выпуклая функция, причем сопряженная по Юнгу к функции $\widetilde{h}$, совпадает с h. Пусть $\widetilde{E} = \{y \in \mathbb{R}^n :\ \widetilde{h}(y) < +\infty\}$. Будем считать, что внутренность $\widetilde{E}$ — не пустое множество.

Через $V(A)$ будем обозначать n-мерный объем множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Пусть E — некоторая область в $\mathbb{R}^n$ и $x \in E$. Определим по индукции по размерности пространства величину $\mathrm{vd}(x, E)$, которую будем называть "объемным расстоянием"(см. [6]). Если $E \subset \mathbb{R}$, то положим

$$\mathrm{vd}(x, E) = \inf\{|x - y| :\ y \notin E\}$$

— обычное расстояние от точки $x \in E$ до границы E. Пусть величина $\mathrm{vd}(x, E)$ определена в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Возьмем точку $y_0 \in \partial E$ такую, что

$$\inf\{|x - y| :\ y \notin E\} = |x - y_0|.$$

Если таких точек на границе несколько, то возьмем любую из них. Через точку y_0 проходит единственная опорная гиперплоскость, ортогональная отрезку, соединяющему точки $x,\ y_0$. Пусть P — гиперплоскость, параллельная этой опорной гиперплоскости и проходящая

R.A. Bashmakov, K.P. Isaev, R.S. Yulmukhametov, On Geometric Characteristics of Convex Functions and Laplace Integrals.

Поступила 20 февраля 2010 г.

через точку x. Размерность выпуклого множества $E_1 = P\bigcap E$ равна n и $x \in E_1$. По допущению индукции величина $\mathrm{vd}(x, E_1)$ уже определена. Положим

$$\mathrm{vd}(x, E) = \mathrm{vd}(x, E_1)|x - y_0|.$$

Как видно из определения, величина $\mathrm{vd}(x, E)$ не всегда определяется однозначно, если $n > 1$. Если обычное расстояние от x до границы E или одного из сечений E плоскостями достигается не в единственной точке, то в зависимости от выбора точки достижения величина E может получиться различной. Из доказываемых теорем будет видно, что в случаях, рассматриваемых в наших утверждениях, разные значения $\mathrm{vd}(x, E)$ будут сравнимыми.

Пусть в дальнейшем

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \ h(x) + \widetilde{h}(y) - xy \leq 1\},$$

и для $y \in \mathbb{R}^n$ через D_y обозначим проекцию на $\mathbb{R}^n_x$ сечения множества D:

$$D_y = \{x \in \mathbb{R}^n : \ (x, y) \in D\}.$$

При фиксированном y возьмем произвольную точку $x = x_y$, для которой верно равенство

$$\widetilde{h}(y) + h(x_y) - yx_y = 0,$$

и через D^y обозначим проекцию на $\mathbb{R}^n_y$ сечения множества D:

$$D^y = \{z : \ (x_y, z) \in D\}.$$

2. Одномерный случай

Рассмотрим подробнее "объемное расстояние" в одномерном случае, а также введем и изучим близкие к нему характеристики выпуклых функций. Если в определение интервала D^y подставить условие, определяющее точку x_y, то получим интервал

$$\{z : \ \widetilde{h}(z) - \widetilde{h}(y) - x_y(z - y) \leq 1\}.$$

Очевидно, график линейной функции $l(z) = \widetilde{h}(y) + x_y(z - y)$ есть не что иное, как одна из касательных прямых к графику функции $\widetilde{h}$. Поэтому мы можем перейти к определению, не использующему преобразование Юнга.

Определение 1. *Пусть $u(x)$ — выпуклая функция на интервале $I \subset \mathbb{R}$. Возьмем положительное число p. В любой точке $y \in I$ существует хотя бы одна касательная к графику функции u. Предположим, что график линейной функции $l(x)$ является касательной в точке y. Возьмем интервал*

$$I_1(l, y, p) = \{x : \ u(x) - l(x) \leq p\},$$

и расстояние от точки y до границы этого интервала обозначим через $\rho_1(u, y, p)$.

Отметим некоторую неоднозначность данного определения величины $\rho_1(u, y, p)$, связанную с свободой выбора функции $l(x)$: если функция u не дифференцируема в некоторой точке y, то касательных в этой точке может быть несколько. Но из последующих лемм следует, что значения величины $\rho_1(u, y, p)$ при различном выборе функции $l(x)$ сравнимы между собой и, тем самым, пригодны для наших целей. Кроме того, можно рассматривать в каждой точке касательную с наибольшим или, наоборот, с наименьшим угловым коэффициентом. Если функция u дифференцируема в точке y, то величина $\rho_1(u, y, p)$ определяется однозначно. Напомним, что функцию u за пределы интервала I мы доопределяем равной $+\infty$. Если имеется в виду одна функция u, то в обозначении $\rho_1(u, y, p)$ символ u будем опускать.

Лемма 1. *При $q \geq p > 0$ имеют место двусторонние оценки*

$$\rho_1(y,q) \geq \rho_1(y,p) \geq \frac{p}{q}\rho_1(y,q)$$

при одном и том же выборе касательной прямой l.

Доказательство. Левое неравенство очевидно. Пусть $I_1(y,q) = (a_q; b_q)$ и $\alpha = \frac{p}{q}$, $x = \alpha b_q + (1-\alpha)y$. Тогда в силу выпуклости функции $u_1 = u - l$ имеем

$$u_1(x) \leq \alpha u_1(b_q) + (1-\alpha)u_1(y) = \frac{p}{q}u_1(b_q) \leq p.$$

Следовательно, если $I_1(y,p) = (a_p; b_p)$, то $b_p \geq \alpha b_q + (1-\alpha)y$, то есть $b_p - y \geq \alpha(b_q - y)$. Точно также покажем, что $y - a_p \geq \alpha(y - a_q)$. Таким образом, $\rho_1(y,p) \geq \alpha\rho_1(y,q) = \frac{p}{q}\rho_1(y,q)$.

Для положительного числа p введем еще одну величину:

$$\rho_2(u,y,p) = \sup\left\{t > 0 : \int_{y-t}^{y+t} |u'(\tau) - u'(y)|\, d\tau \leq p\right\}. \tag{1}$$

Величина $\rho_2(u,y,p)$ более корректно определена: производная выпуклой функции существует всюду за исключением счетного множества точек и монотонна, поэтому интеграл в определении существует для почти всех значений y и непрерывно зависит от пределов интегрирования. Далее заметим, что интеграл (1) легко считается и величину $\rho_2 = \rho_2(u,y,p)$ можно определить из равенства

$$\frac{u(y-\rho_2) + u(y+\rho_2)}{2} - u(y) = \frac{p}{2}.$$

Таким образом, величина ρ_2 оказывается определенной и для тех значений y, в которых $u'(y)$ не определена.

Лемма 2. *1. Для любого положительного p выполняются оценки*

$$2\rho_2(y,p) \geq \rho_1(y,p) \geq \rho_2(y,p).$$

2. При $q \geq p > 0$ имеют место двусторонние оценки

$$\rho_2(y,q) \geq \rho_2(y,p) \geq \frac{p}{q}\rho_2(y,q).$$

Доказательство. 1. Докажем правое неравенство в первом соотношении. По замечанию перед леммой величину $\rho_2 = \rho_2(u,y,p)$ можно определить из равенства

$$\frac{u(y-\rho_2) + u(y+\rho_2)}{2} - u(y) = \frac{p}{2}.$$

Пусть l — линейная функция, определяющая величину $\rho_1(u,y,p)$ и $u_1 = u - l$. Для краткости положим $a = y - \rho_2$, $b = y + \rho_2$ и $I_2(y,p)) = (a;b)$. Тогда $a + b = 2y$, $u_1(y) = 0$, $u_1(x) \geq 0$ и

$$u_1(a) + u_1(b) = p.$$

Так как каждое слагаемое в левой части — неотрицательная величина, то каждое из них не превосходит p, то есть $a, b \in I_1(l,y,p)$ или $I_2(y,p) \subset I_1(l,y,p)$. Другими словами, $\rho_1(u,y,p) \geq \rho_2(u,y,p)$.

Пусть теперь $I_1(l,y,\frac{p}{2}) = (m;n)$. Это значит, что

$$u_1(m) \leq \frac{p}{2}, \quad u_1(n) \leq \frac{p}{2}. \tag{2}$$

Если, например, $y - m \le n - y$, то $\rho_1(y, \frac{p}{2}) = y - m$, причем

$$u_1(y + (y - m)) \le u_1(n) \le \frac{p}{2}.$$

Сложим последнее неравенство с первым неравенством в (2) и получим

$$u_1(y - (y - m)) + u_1(y + (y - m)) \le p.$$

Тем самым, $\rho_2(y, p) \ge y - m = \rho_1(y, \frac{p}{2})$. Из правой оценки в лемме 1 следует $\rho_1(y, \frac{p}{2}) \ge \frac{1}{2}\rho_1(y, p)$. Значит, $\rho_2(y, p) \ge \frac{1}{2}\rho_1(y, p)$.

2. Докажем теперь второе утверждение. Левое неравенство очевидно. Положим $r = \rho_2(y, q)$. Определение величины $\rho_2(y, q)$ означает, что выполняется равенство

$$\frac{u(y - r) + u(y + r)}{2} - u(y) = \frac{q}{2}.$$

Пусть $\alpha = \frac{p}{q}$. Тогда $\alpha \in (0, 1]$ и

$$y - \alpha r = \alpha(y - r) + (1 - \alpha)y, y + \alpha r = \alpha(y + r) + (1 - \alpha)y.$$

В силу выпуклости функции u имеем

$$u(y - \alpha r) \le \alpha u(y - r) + (1 - \alpha)u(y), \tag{3}$$

$$u(y + \alpha r) \le \alpha u(y + r) + (1 - \alpha)u(y). \tag{4}$$

Сложив эти два неравенства, получим

$$\frac{u(y - \alpha r) + u(y + \alpha r)}{2} - u(y) = \alpha\frac{u(y - r) + u(y + r)}{2} - \alpha u(y) = \alpha\frac{q}{2} = \frac{p}{2}.$$

По определению эта оценка значит, что

$$\rho_2(y, p) \ge \alpha r = \frac{p}{q}\rho_2(y, q).$$

Величину $\rho_2(y, p)$ можно определить более функциональным образом.

Определение 2. *Для произвольной непрерывной функции $u(y)$ на вещественной оси и положительного числа r через $d(u, y, r)$ обозначим отклонение в равномерной норме функции u на промежутке $[y - r; y + r]$ от линейных функций:*

$$d(u, y, r) = \inf\{\max_{t \in [y-r;y+r]} |u(t) - l(t)|,\ l - \text{линейна}\}.$$

Через $\rho(u, y, p)$ обозначим наибольшее число r, такое, что на интервале $[y - r; y + r]$ функция u отклоняется от линейных функций не более чем на p:

$$\rho(u, y, p) = \sup\{r :\ d(u, y, r) \le p\}.$$

Лемма 3. *Если для выпуклой функции u величина $\rho_2(u, y, p)$ определена по соотношению (1), то*

$$\rho(u, y, p) = \rho_2(u, y, 2p).$$

Доказательство. Пусть $r = \rho_2(u, y, 2p)$, тогда по определению этой величины

$$\frac{u(y - r) + u(y + r)}{2} - u(y) = p.$$

Возьмем линейную функцию

$$l(x) = \frac{x - (y - r)}{2r}u(y + r) + \frac{x - (y + r)}{-2r}u(y - r). \tag{5}$$

Для этой функции верны соотношения

$$l(y - r) = u(y - r), \quad l(y + r) = u(y + r),$$

$$u(x) \le l(x), \quad x \in [y - r; y + r].$$

Для линейной функции

$$l_1(x) = \frac{x-y}{-r}u(y-r) + \frac{x-(y-r)}{r}u(y)$$

выполняются соотношения

$$l_1(y-r) = u(y-r), \quad l_1(y) = u(y),$$
$$u(x) \geq l_1(x), \quad x \in [y; y+r].$$

Для линейной функции $\Delta l(x) = l(x) - l_1(x)$ легко сосчитать значения на концах интервала $[y; y+r]$:

$$\Delta l(y) = p, \quad \Delta l(y+r) = 2p,$$

значит, в промежутке $[y; y+r]$ имеет место оценка

$$0 \leq l(x) - u(x) \leq l(x) - l_1(x) \leq 2p.$$

Аналогично, с помощью линейной функции

$$l_2(x) = \frac{x-y}{r}u(y+r) + \frac{x-(y+r)}{-r}u(y)$$

покажем, что и в промежутке $[y-r; y]$ выполняется такая же оценка. Итак,

$$0 \leq l(x) - u(x) \leq 2p, \quad x \in [y-r; y+r].$$

Для линейной функции $l_0(x) = l(x) - p$ получаем оценки

$$-p \leq l_0(x) - u(x) \leq p, \quad x \in [y-r; y+r].$$

Отсюда

$$\rho(u, y, p) \geq \rho_2(u, y, 2p). \tag{6}$$

Теперь положим $r = \rho(u, y, p)$. Тогда существует линейная функция l_0, которая в промежутке $[y-r; y+r]$ удовлетворяет оценке

$$|u(x) - l_0(x)| \leq p,$$

причем в силу определения величины $\rho(u, y, p)$

$$\max_{t \in [y-r; y+r]} (u(t) - l_0(t)) = -\min_{t \in [y-r; y+r]} (u(t) - l_0(t)) = p.$$

Положим $l_1(x) = l_0(x) + p$, тогда

$$0 \leq l_1(x) - u(x) \leq 2p, \quad x \in [y-r; y+r]. \tag{7}$$

Возьмем функцию $l(x)$, определенную по формуле (5). Тогда

$$l(y-r) = u(y-r) \leq l_1(y-r), \quad l(y+r) = u(y+r) \leq l_1(y+r).$$

Для линейных функций неравенство продолжается внутрь промежутка:

$$l(x) \leq l_1(x), \quad x \in [y-r; y+r].$$

Отсюда и из (7) получим

$$0 \leq l(x) - u(x) \leq 2p, \quad x \in [y-r; y+r],$$

в частности $l(y) - u(y) \leq 2p$. Подставим определение функции $l(x)$:

$$\frac{u(y+r) + u(y-r)}{2} - u(y) \leq 2p.$$

Это неравенство означает, что

$$\rho_2(u, y, 2p) \geq r = \rho(u, y, p).$$

Вместе с соотношением (6) это неравенство доказывает утверждение леммы 3.

Функция $\rho(u, y, p)$ сравнима с величиной $\rho_1(u, y, p)$ и, кроме того, обладает свойством непрерывности по переменным u и y.

Лемма 4. *1. Пусть u — выпуклая функция на вещественной оси и p — положительное число. Тогда функция $\rho(y) = \rho(u, y, p)$ удовлетворяет условию Лифшица: для всех x, y из области определения функции u*

$$|\rho(y) - \rho(x)| \le |y - x|.$$

2. Пусть u_1, u_2 — выпуклые функции на вещественной оси, такие, что

$$|u_1(x) - u_2(x)| \le C,$$

p — положительное число. Тогда функции $\rho_1(y) = \rho(u_1, y, p)$ и $\rho_2(y) = \rho(u_2, y, p)$ удовлетворяют условию

$$\frac{p}{(p+C)}\rho(u_1, y, p) \le \rho(u_2, y, p) \le \frac{(p+C)}{p}\rho(u_1, y, p).$$

Доказательство. 1. Возьмем произвольное y и $x \in (y - \rho(y); y + \rho(y))$. По определению $\rho(y)$ существует линейная функция $l(t)$, удовлетворяющая оценке

$$|u(t) - l(t)| \le p, \quad t \in [y - \rho(y); y + \rho(y)].$$

Не уменьшая общности, будем считать, что $x > y$, и положим $r = y + \rho(y) - x$. Тогда $[x - r; x + r] \subset [y - \rho(y); y + \rho(y)]$, поэтому

$$|u(t) - l(t)| \le p, \quad t \in [x - r; x + r].$$

Следовательно,

$$\rho(x) \ge r = y + \rho(y) - x,$$

то есть

$$\rho(y) - \rho(x) \le x - y.$$

Если $\rho(y) \ge \rho(x)$, то мы имеем $|\rho(y) - \rho(x)| \le |x - y|$. Если же $\rho(y) < \rho(x)$, то $y \in [x - \rho(x); x + \rho(x)]$ и мы можем провести рассуждения, поменяв местами x и y, в результате получим

$$\rho(x) - \rho(y) \le y - x$$

или

$$|\rho(x) - \rho(y)| \le |y - x|.$$

Итак, если $x \in [y - \rho(y); y + \rho(y)|$, то выполняется последнее неравенство, которое означает непрерывность функции $\rho(t)$. Возьмем теперь произвольные x, y, $x < y$, и положим

$$\delta = \min_{t \in [x,y]} \rho(t).$$

Поскольку $\rho(t)$ — положительная непрерывная функция, то $\delta > 0$. Возьмем возрастающую последовательность $t_1 = x < t_2 < \dots < t_n = y$, такую, что $t_{i+1} - t_i = \delta$ для всех i. Тогда $t_i \in [t_{i+1} - \rho(t_{i+1}); t_{i+1} + \rho(t_{i+1})]$, и по доказанному

$$|\rho(t_{i+1}) - \rho(t_i)| \le t_{i+1} - t_i.$$

Следовательно,

$$|\rho(y) - \rho(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n-1} |(\rho(t_{i+1}) - \rho(t_i))\right| \le \sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1} - t_i) = |y - x|.$$

Утверждение первого пункта леммы 4 доказано.

2. Положим $r = \rho(u_1, y, p)$. Тогда существует линейная функция $l(x)$, удовлетворяющая условию

$$|u_1(x) - l(x)| \le p, \quad x \in [y - r; y + r].$$

По условиям леммы

$$|u_2(x) - l(x)| \le |u_2(x) - u_1(x)| + |u_1(x) - l(x)| \le C + p, \quad x \in [y - r; y + r].$$

Значит,

$$\rho(u_2, y, p + C) \ge r = \rho(u_1, y, p).$$

В силу правого неравенства во втором пункте леммы 2 получаем

$$\rho(u_2, y, p) \ge \frac{p}{(p + C)} \rho(u_2, y, p + C) \ge \frac{p}{(p + C)} \rho(u_1, y, p).$$

Проведя те же рассуждения и поменяв местами функции u_1, u_2, получим и верхнюю оценку.

Лемма 4 доказана.

Введем еще одну характеристику для выпуклых функций. Пусть z — фиксированная точка на плоскости. Для любого положительного числа $r > 0$ через $B(z, r)$ обозначим круг $\{w : \ |w - z| < r\}$ и для непрерывной в $\overline{B}(z, r)$ функции f положим

$$\|f\|_r = \max_{w \in \overline{B}(z,r)} |f(w)|.$$

Пусть $d(f, z, r)$ — расстояние от функции f до подпространства гармонических в $B(z, r)$ функций:

$$d(f, z, r) = \inf\{\|f - H\|_r, \ H - \text{гармонична в} \ \ B(z, r)\}.$$

Если $u(x)$ — выпуклая функция на интервале $I \subset \mathbb{R}$, то функция $u(w) = u(\mathrm{Re}\ w)$ является непрерывной функцией в вертикальной полосе $I + i\mathbb{R}$ на плоскости. Для положительного числа p положим

$$\tau(u, z, p) = \sup\{r : \ d(u, z, r) \le p\}.$$

Ясно, что $\tau(u, z, p)$ зависит только от $\mathrm{Re}\ z$. Кроме того, поскольку функцию u при необходимости мы доопределяем, полагая равной $+\infty$ вне интервала I, то $\tau(u, z, p)$, как и $\rho_1(u, y, p)$, $\rho(u, y, p)$, не может превосходить расстояния от y до границы интервала определения функции u.

Лемма 5. *1. Для функции $\tau(y, p) = \tau(u, y, p)$ для любого положительного p выполняются оценки*

$$\tau(y, p) \ge \rho(y, p) \ge \frac{1}{16} \tau(y, p).$$

2. При $q \ge p > 0$ имеют место двусторонние оценки

$$\tau(y, q) \ge \tau(y, p) \ge \frac{p}{16q} \tau(y, q).$$

3. Функция $\tau(y) = \tau(u, y, p)$ удовлетворяет условию Лифшица: для всех x, y из области определения функции u

$$|\tau(y) - \tau(x)| \le |y - x|.$$

4. Пусть u_1, u_2 — выпуклые функции на вещественной оси, такие, что

$$|u_1(x) - u_2(x)| \le C,$$

p — положительное число. Тогда функции $\tau_1(y) = \rho(u_1, y, p)$ и $\tau_2(y) = \rho(u_2, y, p)$ удовлетворяют условию

$$\frac{p}{16(p + C)} \tau(u_1, y, p) \le \tau(u_2, y, p) \le \frac{16(p + C)}{p} \rho(u_1, y, p).$$

Доказательство.

1. Зафиксируем точку $z \in \mathbb{C}$ так, что $y = \mathrm{Re}\ z$ лежит в области определения функции u. Положим $r = \rho(u, y, p)$. Тогда существует линейная функция l, удовлетворяющая условию
$$|u(x) - l(x)| \le p, \quad x \in [y - r; y + r].$$
Функция $v(w) = l(\mathrm{Re}\ w)$ — гармонична и
$$|u(\mathrm{Re}\ w) - l(\mathrm{Re}\ w)| \le p, \quad w \in B(z, r).$$
Тем самым
$$\tau(y, p) \ge r = \rho(y, p).$$
Теперь положим $r = \tau(u, y, p)$. В круге $B(z, r)$ существует гармоническая функция H такая, что $\|u - H\|_r \le p$. Возьмем линейную функцию l такую, что $l(x) \le u(x)$, $\forall x$, $l(y) = u(y)$(существование такой функции обеспечивается выпуклостью функции u), и пусть $v(w) = l(\mathrm{Re}\ w)$. Тогда в круге $B(z, r)$ выполняются неравенства
$$v(w) \le u(w) \le H(w) + p,$$
следовательно,
$$(H(w) + p) - v(w) \ge 0.$$
Кроме того, поскольку $v(z) = u(\mathrm{Re}\ z)$, то
$$(H(z) + p) - v(z) = (H(z) + p) - u(\mathrm{Re}\ z) = (H(z) - u(\mathrm{Re}\ z)) + p \le 2p.$$
Применим неравенство Харнака для неотрицательных гармонических функций к функции $H(w) + p - v(w)$, в круге $B(z, \frac{r}{2})$ имеем оценку
$$(H(w) + p) - v(w) \le 3\left((H(z) + p) - v(z)\right) \le 6p.$$
Тогда в том же круге $B(z, \frac{r}{2})$ выполняется оценка
$$|u(\mathrm{Re}\ w) - v(w)| \le |u(\mathrm{Re}\ w) - H(w)| + |h(w) + p - v(w)| + p \le 8p.$$
Функции в левой части этого неравенства зависят только от $x = \mathrm{Re}\ w$, поэтому мы получаем
$$|u(x) - l(x)| \le 8p, \quad x \in \left[y - \frac{r}{2}; y + \frac{r}{2}\right].$$
Из этой оценки следует, что
$$\rho(y, 8p) \ge \frac{r}{2} = \tau(y, p)$$
или
$$\tau(y, p) \le 2\rho(y, 8p).$$
Из этой оценки по леммам 2 и 3 получим
$$\tau(y, p) \le 16\rho(y, p)$$

2. Вторая часть леммы 5 может быть получена на основе п. 1 и лемм 2 и 3.

3. Возьмем точки y_1, y_2 из области определения функции $u(x)$ и пусть $r = \tau(u, y_1, p)$. Это значит, что в круге $B(y_1, r)$ существует гармоническая функция $H(z)$, удовлетворяющая условию
$$|u(\mathrm{Re}\ z) - H(z)| \le p.$$
Если $|y_1 - y_2| < r$, то это неравенство выполняется и в круге $B(y_2, r - |y_1 - y_2|)$, тем самым
$$\tau(u, y_2, p) \ge r - |y_1 - y_2| = \tau(u, y_1, p) - |y_1 - y_2|,$$
или
$$\tau(u, y_1, p) - \tau(u, y_2, p) \le |y_1 - y_2|.$$
Если же $|y_1 - y_2| \ge r = \tau(u, y_1, p)$, то тем более
$$\tau(u, y_1, p) - \tau(u, y_2, p) \le |y_1 - y_2|.$$

Поменяем местами y_1, y_2:

$$\tau(u, y_2, p) - \tau(u, y_1, p) \le |y_1 - y_2|.$$

Таким образом,

$$|\tau(u, y_1, p) - \tau(u, y_2, p)| \le |y_1 - y_2|.$$

4. Этот пункт доказывается точно также, как п.2 леммы 4.

3. Асимптотика интегралов Лапласа

Пусть E — выпуклая область в пространстве $\mathbb{R}^n$ и h — выпуклая функция в области E. В этом параграфе изучается асимптотическое поведение интегралов вида

$$L_h(y) = \int e^{xy - h(x)}\, dx,$$

где для $x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ использовано обозначение $xy = \sum_{k=1}^n x_i y_i$.

Если функция h дважды непрерывно дифференцируема и ее вторая производная удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, то рассматриваемая задача является классической и подробно изучена. Соответствующие результаты можно найти в книгах [2], [3].

Теорема 1. *Пусть*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \ h(x) + \widetilde{h}(y) - xy \le 1\}$$

и для $y \in \mathbb{R}^n$ через D_y обозначим проекцию на $\mathbb{R}^n_x$ сечения множества D:

$$D_y = \{x \in \mathbb{R}^n : \ (x, y) \in D\}.$$

Тогда

$$e^{-1} V(D_y) e^{\widetilde{h}(y)} \le \int e^{xy - h(x)}\, dx \le (1 + n!) V(D_y) e^{\widetilde{h}(y)},\ y \in \widetilde{E}.$$

Доказательство. Нижняя оценка очевидна в силу неотрицательности подынтегральной функции и определения множества D. Зафиксируем y. Заметим, что при всех x и y

$$\widetilde{h}(y) + h(x) - xy \ge 0.$$

Положим

$$\alpha(t) = V(\{x : \ \widetilde{h}(y) + h(x) - xy \le t\}),\ t \ge 0.$$

В наших обозначениях $\alpha(1) = V(D_y)$. Как известно ([4]), $(\alpha(t))^{\frac{1}{n}}$ — вогнутая возрастающая функция на $[0; +\infty)$. Имеет место представление

$$L_h(y) = e^{\widetilde{h}(y)} \int_0^\infty e^{-t}\, d\alpha(t).$$

Не уменьшая общности, будем считать, что $\alpha(0) = 0$. Из вогнутости функции $(\alpha(t))^{\frac{1}{n}}$ следует оценка

$$(\alpha(t))^{\frac{1}{n}} \le (\alpha(1))^{\frac{1}{n}} t,\ t \ge 1. \tag{8}$$

Интегрированием по частям получим

$$L_h(y) e^{-\widetilde{h}(y)} = \int_0^1 e^{-t}\, d\alpha(t) + \int_1^\infty e^{-t}\, d\alpha(t) \le \alpha(1) + \int_1^\infty e^{-t} \alpha(t)\, dt.$$

Воспользуемся оценкой (8):

$$L_h(y) e^{-\widetilde{h}(y)} \le \alpha(1) \left(1 + \int_1^\infty e^{-t} t^n\, dt\right) \le (1 + n!) \alpha(1).$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. Очевидно, можно было бы взять любое положительное число p и вместо множества D взять множество

$$D(p) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \ h(x) + \widetilde{h}(y) - xy \le p\}$$

и теми же рассуждениями доказать асимптотику

$$e^{-p} V(D(p)_y) e^{\widetilde{h}(y)} \le \int e^{xy-h(x)}\,dx \le (1+\frac{n!}{p^n}) V(D(p)_y) e^{\widetilde{h}(y)}, \ y \in \widetilde{E}.$$

При фиксированном y возьмем произвольную точку $x = x_y$, для которой верно равенство

$$\widetilde{h}(y) + h(x_y) - y x_y = 0$$

и через D^y обозначим проекцию на $\mathbb{R}^n_y$ сечения множества D:

$$D^y = \{z : \ (x_y, z) \in D\}.$$

Теорема 2. *Имеют место неравенства*

$$\frac{1}{e(1+n!)\mathrm{vd}(y, D^y)} e^{\widetilde{h}(y)} \le \int e^{xy-h(x)}\,dx \le \frac{e^2(1+n!)(2n)^n}{\mathrm{vd}(y, D^y)} e^{\widetilde{h}(y)}, \ y \in \widetilde{E}.$$

Доказательство. Для сокращения записей при фиксированном y введем обозначение

$$u(x) = \widetilde{h}(y) + h(x + x_y) - (x + x_y)y.$$

Тогда u — неотрицательная выпуклая функция и $u(0) = 0$, причем $\{x : \ u(x) \le 1\} = D_y - x_y$. Нетрудно вычислить, что имеет место равенство

$$\widetilde{u}(z) = \widetilde{h}(z + y) - \widetilde{h}(y) - x_y z.$$

По определению сопряженных по Юнгу $\widetilde{h}(z+y) \ge x(y+z) - h(x)$ для всех x, в частности,

$$\widetilde{h}(z + y) \ge x_y(y + z) - h(x_y).$$

Поэтому

$$\widetilde{u}(z) = \widetilde{h}(z + y) - \widetilde{h}(y) - x_y z \ge x_y(y + z) - h(x_y) - \widetilde{h}(y) - x_y z = 0, \tag{9}$$

причем $\widetilde{u}(0) = 0$. Рассмотрим выпуклое множество

$$E = \{z : \ \widetilde{u}(z) \le 1\}$$

и опорную функцию H этого множества:

$$H(z) = \sup_{t \in E} zt.$$

Поскольку $0 \in E$, то $H(z) \ge 0$.

Лемма 6. *Пусть*

$$F = \{u(x) \le 1\}, \quad G_1 = \{H(x) \le 1\}, \quad G_2 = \{H(x) \le 2\}.$$

Имеют место включения

$$G_1 \subset F \subset G_2.$$

Доказательство. Если $u(x) \le 1$, то

$$H(x) = \sup_{z\in E} xz \le \sup_{z\in E}(xz - \widetilde{u}(z) + 1) \le \sup(xz - \widetilde{u}(z)) + 1 = u(x) + 1 \le 2,$$

и, тем самым, правое включение доказано. Пусть $H(x) \le 1$ и $z \notin E$, тогда, поскольку $0 \in E$, то найдется $\tau > 1$ и $z_0 \in \partial E$ так, что $z = \tau z_0$. В силу выпуклости функции $\widetilde{u}$ имеем

$$1 = \widetilde{u}(z_0) \le \frac{1}{\tau}\widetilde{u}(z) + \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)\widetilde{u}(0) = \frac{1}{\tau}\widetilde{u}(z),$$

то есть $\widetilde{u}(z) \ge \tau$. Поэтому

$$xz - \widetilde{u}(z) \le \tau(xz_0 - 1) \le \tau(\sup_{z'\in\partial E} xz' - 1) = \tau(H(x) - 1) \le 0.$$

Отсюда в силу неотрицательности функции $\widetilde{u}$ справедлива следующая оценка

$$u(x) = \sup_z(xz - \widetilde{u}(z)) = \max(\sup_{z\in E}(xz - \widetilde{u}(z)), \sup_{z\notin E}(xz - \widetilde{u}(z))) \le$$
$$\le \max(\sup_{z\in E}(xz - \widetilde{u}(z)), 0) \le \sup_{z\in E} zx = H(x) \le 1.$$

Лемма доказана.

С помощью замены переменных $x := x + x_y$ получим равенство

$$L_h(y) = \int e^{xy - h(x)}\,dx = \int e^{(x+x_y)y - h(x+x_y)}\,dx = e^{\widetilde{h}(y)} \int e^{-u(x)}\,dx. \qquad (10)$$

Применим к последнему интегралу теорему 1, учитывая, что $\widetilde{u}(0) = 0$:

$$e^{-1}V(F)\int e^{-u(x)}\,dx \le (1 + n!)\,V(F),$$

а объем множества F оценим по лемме

$$e^{-1}V(G_1) \le \int e^{-u(x)}\,dx \le (1 + n!)\,V(G_2).$$

Опорная функция H тоже неотрицательная, значит, $\widetilde{H}(0) = 0$, и по замечанию имеем

$$e^{-2}V(G_2) \le \int e^{-H(x)}\,dx \le (1 + n!)\,V(G_1).$$

Последние два соотношения дают оценку

$$\frac{1}{e(1+n!)}\int e^{-H(x)}\,dx \le e^{-1}V(G_1) \le \int e^{-u(x)}\,dx \le$$
$$\le (1+n!)V(G_2) \le (1+n!)e^2 \int e^{-H(x)}\,dx.$$

Вместе с представлением (10) получим

$$\frac{1}{e(1+n!)} e^{\widetilde{h}(y)} \int e^{-H(x)}\,dx \le L_h(y) \le (1+n!)e^2 e^{\widetilde{h}(y)} \int e^{-H(x)}\,dx. \qquad (11)$$

Таким образом, для доказательства теоремы 2 нам нужно выяснить асимптотику интеграла от $\exp(-H(x)))$, где $H(x)$ — опорная функция множества

$$E = \{z : \ \widetilde{u}(z) \le 1\}.$$

Заметим, что

$$E + y = \{t : \ \widetilde{h}(t) - \widetilde{\ }(y) - x_y t + x_y y \le 1\} = \{\widetilde{h}(t) + h(x_y) - x_y t \le 1\} = D^y,$$

поэтому $\mathrm{vd}(y, D^y) = \mathrm{vd}(0, E)$. Следовательно, утверждение теоремы 2 будет вытекать из следующей леммы.

Лемма 7. *Пусть E — выпуклое множество, содержащее начало координат и $H(x)$ — опорная функция этого множества. Тогда*

$$\frac{1}{\mathrm{vd}(0,E)} \le \int e^{-H(x)}\,dx \le \frac{(2n)^n}{\mathrm{vd}(0,E)}.$$

Доказательство. При определении величины $\mathrm{vd}(x, E)$ мы фактически строили ортогональный репер с началом в точке x. Поскольку утверждение леммы инвариантно относительно поворотов системы координат, то можем считать, что

$$\inf\{|x| : \ x = (0, ..., 0, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) \notin E\}$$

достигается в точке $(0, ..., 0, a_i, 0, ..., 0) \in \partial E$, причем $a_i > 0$. При таком выборе системы координат, очевидно

$$\mathrm{vd}(0, E) = a_1 a_2 ... a_n.$$

Пусть H_1 — опорная функция симплекса с вершинами в точках $(0, ..., 0, \pm a_i, 0, ..., 0)$. Очевидно, что этот симплекс лежит в E, поэтому для всех x $H_1(x) \le H(x)$. С другой стороны,

$$H_1(x) = \max_i(\pm a_i x_i) = \max_i(a_i|x_i|) \ge \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i|x_i|,$$

следовательно,

$$\int e^{-H(x)}\,dx \le \int e^{-H_1(x)}\,dx \le \int e^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i|x_i|)}\,dx = \frac{(2n)^n}{a_1 a_2 ... a_n}.$$

Таким образом,

$$\int e^{-H(x)}\,dx \le \frac{(2n)^n}{a_1 a_2 ... a_n} = \frac{(2n)^n}{\mathrm{vd}(0,E)}.$$

Докажем нижнюю оценку. По выбору системы координат опорная гиперплоскость P_1 к множеству E в граничной точке $(a_1, 0, ..., 0)$ описывается уравнением

$$x = (x_1, ..., x_n) : \ x_1 = a_1.$$

Рассмотрим пересечение E_1 множества E с подпространством $R_1 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : \ x_1 = 0\}$. Снова по выбору системы координат опорная гиперплоскость P_2 к множеству E_1 в пространстве R_1 в граничной точке $(0, a_2, 0, ..., 0)$ описывается уравнением (в пространстве R_1) $x_2 = a_2$. Значит, во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ уравнение этой опорной плоскости имеет вид

$$A_{2,1}x_1 + x_2 = a_2.$$

Продолжая рассуждать аналогичным образом, получим, что опорная гиперплоскость P_i к множеству E в точке $(0, ..., 0, a_i, 0, ..., 0)$ описывается уравнением вида

$$A_{i,1}x_1 + A_{i,2}x_2 + ... + A_{i,i-1}x_{i-1} + x_i = a_i.$$

Положим

$$A_{i,i} = 1, \quad A_{i,j} = 0, \ j > i,$$

и через A обозначим треугольную матрицу с элементами $A_{i,j}$. Через G обозначим выпуклую неограниченную область, ограниченную гиперплоскостями P_i, $i = 1, 2, ..., n$, содержащую множество E. Область G есть пересечение полупространств

$$P_i^- = \{x = (x_1, ..., x_n) : \ A_{i,1}x_1 + A_{i,2}x_2 + ... + A_{i,i-1}x_{i-1} + x_i < a_i\}.$$

При линейном преобразовании пространства $y = Ax$ область G преобразуется в область

$$G' = \{y = (y_1, ..., y_n) : \ y_i < a_i, \ i = 1, 2, ..., n\}.$$

Опорная функция области G' легко вычисляется:

$$H_{G'}(z) = \begin{cases} \sum_i a_i z_i, & \text{если все } z_i \geq 0, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть B — обратная матрица к матрице A. Тогда для опорной функции области G выполняется формула

$$H_G(z) = \sup_{x \in G} zx = \sup_{y \in G'} z(By) = \sup_{y \in G'} (B^T z) y = H_{G'}((A^T)^{-1} z),$$

где A^T, B^T — транспонированные матрицы. Поскольку $E \subset G$, то $H(x) \leq H_G(x)$, значит

$$\int e^{-H(x)}\, dx \geq \int e^{-H_G(x)}\, dx = \int e^{-H_{G'}((A^T)^{-1}(x))}\, dx.$$

Произведем замену переменных в последнем интеграле, учитывая, что $\det A = 1$,

$$\int e^{-H(x)}\, dx \geq \int e^{-H_{G'}(y)}\, dy = \int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-H_{G'}(y)}\, dy = \int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\sum_i a_i y_i}\, dy = \frac{1}{a_1 ... a_n}.$$

Лемма 7 доказана.

Подставим соотношения леммы 7 в оценки (5) и получим утверждение теоремы 2.

В заключении на основании лемм 2 – 5 сформулируем теорему 2 для одномерного случая следующим образом:

Теорема 2 (а)**.** *Пусть $h(t)$ — выпуклая функция на интервале I и*

$$K(x) = \int_I e^{2xt - 2h(t)} dt,$$
$$\widetilde{h}(x) = \sup_I (xt - h(t)),$$
$$J = \{x \in \mathbb{R} : \ \widetilde{h}(x) < \infty\}.$$

Тогда для любого $p > 0$ существует постоянная $C(p)$ такая, что

$$\frac{1}{C(p)} \frac{1}{t(\widetilde{h}, x, p)} e^{2\widetilde{h}(x)} \leq K(x) \leq C(p) \frac{1}{t(\widetilde{h}, x, p)} e^{2\widetilde{h}(x)}, \ \forall x \in J.$$

где функция $t(\widetilde{h}, x, p)$ — любая из введенных выше функций $\rho(\widetilde{h}, x, p)$, $\rho_1(\widetilde{h}, x, p)$, $\rho_2(\widetilde{h}, x, p)$, $\tau(\widetilde{h}, x, p)$.

Введенные геометрические характеристики в одномерном случае, когда $\widetilde{h}(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, будут эквивалентны величине $\frac{1}{\sqrt{h''(x)}}$, и мы получаем классические результаты об асимптотике интегралов Лапласа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Напалков В.В., Башмаков Р.А., Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическое поведение интегралов Лапласа и геометрические характеристики выпуклых функций* // ДАН. Т. 413. № 1. 2007. С. 20–22.
2. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ.* М.: Мир. 1973.
3. Федорюк М.В. *Метод перевала.* М.: Наука. 1977.
4. Евграфов М.А. *Асимптотические оценки и целые функции.* М.: Наука. 1979.
5. Погорелов А.В. *Внешняя геометрия выпуклых поверхностей.* М.: Наука. 1969.

6. Юлмухаметов Р.С. *Асимптотика многомерного интеграла Лапласа* // Сб. БНЦ УрО АН СССР. Уфа. 1989.
7. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Пэли-Винера на весовые пространства* // Матем. заметки. Т. 48. № 5. 1990. С. 83–87.
8. Луценко В.И. *Теорема Пэли-Винера на неограниченном интервале* // Исследования по теории приближений. Уфа. 1989. С. 79–85.
9. N. Aronszajn *Theory of reproducing kernels* // Transactions of the American Mathematical Society. V. 68. № 3. 1950. P. 337–404.
10. S. Saitoh *Fourier-Laplace transforms and Bergman spaces on the tube domains* // Мат. вестн. Т. 38. № 4. 1987. С. 571–586.

Рустэм Абдрауфович Башмаков,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: bashmakov_rustem@mail.ru

Константин Петрович Исаев,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: orbit81@list.ru

Ринад Салаватович Юлмухаметов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: Yulmukhametov@mail.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 1 (2010). С. 17-34.

УДК 517.95

РЕЗОЛЬВЕНТЫ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕННЫХ КОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Г.Е. БЕРИКХАНОВА, Б.Е. КАНГУЖИН

Аннотация. В работе дано полное описание корректно разрешимых краевых задач для бигармонического оператора в круге. Затем выписаны их конечномерные возмущения, которые также корректно разрешимы. Приведены формулы резольвенты указаных операторов.

Ключевые слова: моделирование пластин, корректные задачи, задача Дирихле, бигармоническое уравнение, функция Грина, резольвента оператора.

1. Введение

При моделировании пластин и оболочек возникают операторы вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\delta_i, \tag{$*$}$$

так как тонкостенные трубы и панели в реальных условиях, как правило, опираются на точечные жесткие и упругие, шарнирные и защемленные опоры, имеют точечно присоединенные массы [1]. Поскольку δ_i — дельта-функции Дирака имеют точечные носители, то речь идет о точечных взаимодействиях. В 1961 году Березин и Фаддеев [2] дали математическое толкование точечных взаимодействий в рамках теории расширений абстрактных операторов.

В настоящей работе сначала описаны всевозможные корректные задачи для операторов вида $(*)$, а затем приведены формулы их резольвенты. При этом удается естественным образом получить конечномерные возмущения для бигармонического оператора. Подобные возмущения по другому поводу исследовались в работе [3].

2. Вспомогательные утверждения и доказательство теорем

В дальнейшем нам понадобится известное утверждение.

Теорема 1. *Решение задачи Дирихле для бигармонического уравнения в круге* $\Delta^2 W(x,y)=f(x,y)\,, x^2+y^2<r^2$ *задается формулой*

$$W(x,y)=\int\int\limits_{\xi^2+\eta^2<r^2} G(x,y,\xi,\eta)\,f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta$$

с граничными условиями

$$W|_{x^2+y^2=r^2}=0,\ \left.\frac{\partial W}{\partial \overline{n}}\right|_{x^2+y^2=r^2}=0,$$

G.E. Berikhanova, B.E. Kanguzhin, Resolvent of finite-dimensional perturbed of the correct problems for the biharmonic operator.

Поступила 5 января 2010 г.

где $\frac{\partial}{\partial \overline{n}}$ — производная по внешней нормали на границе

$$G\left(x,y,\xi,\eta\right)=d\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)\ln\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)-$$
$$-d\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\left(\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2\right)\times$$
$$\times\ln\left[\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\left(\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2\right)\right]+$$
$$+dr^2\left(1-\frac{x^2+y^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\right)\times$$
$$\times\ln\left[\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\left(\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2\right)\right]+$$
$$+dr^2\left(1-\frac{x^2+y^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\right)$$

где d — некоторая константа, конкретный вид которой не играет роли.

Обсуждение теоремы 1. Теорема 1 утверждает, что функция Грина для круглой пластины с защемленным краем выписывается в явном виде. Заметим также, что функция влияния $G\left(x,y,\xi,\eta\right)$ принимает только неотрицательные значения при любых (x,y) и (ξ,η), поскольку задаче Дирихле для бигармонического уравнения соответствует положительно определенный оператор.

Доказательство. Известно, что фундаментальное решение бигармонического уравнения имеет вид

$$G\left(x,y\right)=d\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)\ln\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right),$$

где d — некоторая константа. Введем обозначения

$$X^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2,$$
$$\mathrm{Y}^2=\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\left|x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}r^2\right|^2,$$
$$\mathrm{Z}^2=r^2\left(1-\frac{x^2+y^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\right).$$

Для указанных чисел справедливо тождество $X^2=Y^2-Z^2$, которое проверяется непосредственно. Отсюда, в частности, следует $Y^2>Z^2$. Рассмотрим фундаментальное решение

$$dX^2\ln X^2=d\left(Y^2-Z^2\right)\ln\left(Y^2-Z^2\right)=d\left(Y^2-Z^2\right)\ln Y^2+d\left(Y^2-Z^2\right)\ln\left(1-\frac{Z^2}{Y^2}\right)=$$
$$=dY^2\ln Y^2-dZ^2\ln Y^2+d\left(Y^2-Z^2\right)\left[-\frac{Z^2}{Y^2}-\frac{1}{2}\frac{Z^4}{Y^4}-...\right].$$

Указанные преобразования верны, поскольку $Y^2>Z^2$, отсюда получим тождество

$$dX^2\ln X^2-dY^2\ln Y^2+dZ^2\ln Y^2+dZ^2=d\frac{Z^4}{Y^2}-d\left(Y^2-Z^2\right)\left[\frac{1}{2}\frac{Z^4}{Y^4}+...\right]. \quad (1)$$

Обозначим левую часть тождества через $G\left(x,y,\xi,\eta\right)$, тогда $G\left(x,y,\xi,\eta\right)=dX^2\ln X^2-$ $-dY^2\ln Y^2+dZ^2\ln Y^2+dZ^2$. Покажем, что введенная функция $G\left(x,y,\xi,\eta\right)$ представляет функцию Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в круге. Для простоты при доказательстве теоремы считаем, что $r=1$.

Функция Грина состоит из фундаментального решения и компенсирующих функций:

$$G(x,y,\xi,\eta)=\varepsilon(x,y,\xi,\eta)-g_1(x,y,\xi,\eta)+g_2(x,y,\xi,\eta)+g_3(x,y,\xi,\eta),$$

где

$$\varepsilon(x,y,\xi,\eta)=dX^2\ln X^2=d\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)\ln\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right),$$

$$g_1(x,y,\xi,\eta)=dY^2\ln Y^2=d\left(\xi^2+\eta^2\right)\left[\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)^2\right]\times$$
$$\times\ln\left[\left(\xi^2+\eta^2\right)\left[\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)^2\right]\right],$$

$$g_2(x,y,\xi,\eta)=dZ^2\ln Y^2=d\left(1-\xi^2-\eta^2\right)\left(1-x^2-y^2\right)\times$$
$$\times\ln\left[\left(\xi^2+\eta^2\right)\left[\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)^2\right]\right],$$

$$g_3(x,y,\xi,\eta)=dZ^2=d\left(1-\xi^2-\eta^2\right)\left(1-x^2-y^2\right).$$

Вычислим вначале

$$\Delta^2_{x,y}G(x,y,\xi,\eta)=\Delta^2_{x,y}\left[\varepsilon(x,y,\xi,\eta)-g_1(x,y,\xi,\eta)+g_2(x,y,\xi,\eta)+g_3(x,y,\xi,\eta)\right].$$

В правой части каждое слагаемое вычисляем по отдельности $\Delta^2_{x,y}\varepsilon(x,y,\xi,\eta)=$ $=\Delta^2_{x,y}d\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)\ln\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)$ при $(\xi,\eta)=(0,0)$. С помощью формулы Лейбница можем записать соотношения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)\right]=2\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{4x^2}{x^2+y^2}+2,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)\right]=2\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{4y^2}{x^2+y^2}+2.$$

В результате $\Delta_{x,y}\left[(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right]=4\ln(x^2+y^2)+8.$

Поэтому, если (x,y) не совпадает с (ξ,η), то

$$\Delta^2_{x,y}\left[\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)\right]=4\Delta\ln\left(x^2+y^2\right)+8\Delta 1=$$
$$=4\left(-\frac{2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2}{x^2+y^2}+\frac{4y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)=0.$$

Так как точка (x,y) находится внутри области Ω, а точка $\left(\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2},\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)$ вне области Ω, то они не могут совпадать, и, следовательно, аналогично предшествующему выполняется равенство $\Delta^2_{x,y}g_1(x,y,\xi,\eta)=0$.

Поскольку функция $g_2(x,y,\xi,\eta)$ представляет произведение гармонической функции $\ln\left[(\xi^2+\eta^2)\left[\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)^2\right]\right]$ на радиальный многочлен $(1-x^2-y^2)$, из теоремы Альманзи следует, что $\Delta^2_{x,y}g_2(x,y,\xi,\eta)=0$.

Очевидно, что

$$\Delta^2_{x,y}g_3(x,y,\xi,\eta)=0.$$

Поскольку $d\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)\ln\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)$ — фундаментальное решение, то $\Delta^2_{x,y}d\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)\ln\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)=\delta_\Omega\left((x,y),(\xi,\eta)\right)$, где $\delta_\Omega\left((x,y),(\xi,\eta)\right)$ — дельта-функция Дирака в области Ω. Таким образом, функция $G(x,y,\xi,\eta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Delta^2_{x,y}G(x,y,\xi,\eta)=0$ при $(x,y)\neq(\xi,\eta)$. С другой стороны, $G(x,y,\xi,\eta)$ согласно тождеству (1) равняется правой части (1), то есть

$$G(x,y,\xi,\eta)=d\frac{Z^4}{Y^2}-d\left(Y^2-Z^2\right)\left[\frac{1}{2}\frac{Z^4}{Y^4}+...\right].$$

Поскольку $Z^4 = \left(1-(x^2+y^2)\right)^2\left(1-(\xi^2+\eta^2)\right)^2$, то следы на границе $Z^4|_{(x,y)\in\partial\Omega}$ и $\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}Z^4\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega}$ равны нулю. Поэтому функция $G(x,y,\xi,\eta)$ на границе $\partial\Omega$ удовлетворяет граничным условиям Дирихле

$$G(x,y,\xi,\eta)|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\Omega}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}G(x,y,\xi,\eta)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\Omega}=0.$$

Теорема 1 полностью доказана.

Пусть $h(x,y)$ — произвольная четыре раза дифференцируемая в круге Ω функция. Введем новую функцию по формуле

$$I(x,y)=\iint\limits_{\Omega}G(x,y,\xi,\eta)\,\Delta^2_{\xi,\eta}h(\xi,\eta)\,d\xi d\eta,$$

где $\Delta_{\xi,\eta}=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$ — оператор Лапласа по переменным ξ,η.

Ясно, что функция $I(x,y)$ обладает свойствами:

$$\Delta^2_{x,y}I(x,y)=\Delta^2_{x,y}h(x,y)\,,\ (x,y)\in\Omega, \tag{2}$$

$$I(x,y)|_{\partial\Omega}=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial I(x,y)}{\partial\overline{n}}\Big|_{\partial\Omega}=0. \tag{4}$$

С другой стороны, вспоминая вторую формулу Грина $\iint\limits_{\Omega}\Delta^2uvdxdy-\iint\limits_{\Omega}u\Delta^2vdxdy= =\int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}}\Delta uv-\Delta u\frac{\partial v}{\partial\overline{n}}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}}u\Delta v-u\frac{\partial}{\partial\overline{n}}\Delta v\right)\right]ds$, функцию $I(x,y)$ можно переписать в виде

$$\begin{gathered}I(x,y)=\iint\limits_{\Omega}G(x,y,\xi,\eta)\,\Delta^2_{\xi,\eta}h(\xi,\eta)\,d\xi d\eta=\\=\iint\limits_{\Omega}h(\xi,\eta)\,\Delta^2_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi d\eta+\\+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}hG(x,y,\xi,\eta)-\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}G(x,y,\xi,\eta)\right)+\right.\\\left.+\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\,\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)-h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right)\right]ds_{\xi,\eta},\end{gathered} \tag{5}$$

где $\overline{n}_{\xi,\eta}$ — внешняя нормаль к окружности $\partial\Omega$ в точке (ξ,η).

В силу симметрии функции Грина $G(x,y,\xi,\eta)$ относительно пар (x,y) и (ξ,η) имеем равенство

$$\Delta^2_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)=\delta_\Omega((x,y),(\xi,\eta))\,, \tag{6}$$

где $\delta_\Omega((x,y),(\xi,\eta))$ — дельта-функция Дирака в области Ω.

Из (5) и (6) следует равенство

$$\begin{gathered}I(x,y)=h(x,y)+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}hG(x,y,\xi,\eta)-\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}G(x,y,\xi,\eta)\right)+\right.\\\left.+\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\,\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)-h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right)\right]ds_{\xi,\eta.}\end{gathered}$$

Поскольку $G(x,y,\xi,\eta)|_{(x,y)\in\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = 0$ и $\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}G(x,y,\xi,\eta)\Big|_{(x,y)\in\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = 0$, последнее равенство переписываем в виде

$$I(x,y) = h(x,y) + \int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\,\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta) - \right.$$

$$\left. - h(\xi,\eta)\,\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right]ds_{\xi,\eta}. \tag{7}$$

Удобно ввести обозначение $M(x,y) = h(x,y) - I(x,y)$. Подставим правую часть (7) в соотношение (2). В результате для любой гладкой функции $h(x,y)$ получим соотношение

$$\Delta^2_{x,y}M(x,y) = 0. \tag{8}$$

Теперь используем граничные условия (3), (4). Подставим правую часть (7) в граничные условия (3), (4), тогда для произвольной гладкой функции $h(x,y)$ имеем граничные соотношения

$$\begin{cases} h|_{\partial\Omega} + M|_{\partial\Omega} = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial\overline{n}_{x,y}}\Big|_{\partial\Omega} + \frac{\partial M}{\partial\overline{n}_{x,y}}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

В силу произвольности $h(x,y)$ и независимости граничных значений $\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)$, $h(\xi,\eta)$ при $(\xi,\eta)\in\partial\Omega$ убеждаемся в справедливости следующих свойств функции Грина:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = \delta_{\partial\Omega}((x,y),(\xi,\eta)), \\ \Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = -\delta_{\partial\Omega}((x,y),(\xi,\eta)), \\ \frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{10}$$

где $\delta_{\partial\Omega}((x,y),(\xi,\eta))$ — дельта-функция Дирака на границе $\partial\Omega$.

По-видимому, граничные соотношения (10) для функции Грина $G(x,y,\xi,\eta)$ известны, но авторы не смогли найти точные координаты для ссылок. Поэтому сформулируем необходимое для дальнейшего результата в виде отдельного утверждения.

Теорема 2. *Функция Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в круге обладает свойствами:*
1) $G(P,Q) = G(Q,P), \forall Q,P\in\Omega$,
2) $G(P,Q) \geq 0, \forall Q,P\in\Omega$,
3) $\Delta^2_{x,y}G(Q,P) = \delta_\Omega(P,Q), \forall Q,P\in\Omega$,
4) $G(P,Q) = 0, P\in\partial\Omega, Q\in\Omega$,
5) $\frac{\partial}{\partial\overline{n}_p}G(P,Q) = 0, P\in\partial\Omega, Q\in\Omega$,
6) при $P,Q\in\partial\Omega$ *справедливо соотношение* (10).

Теперь образуем новую функцию

$$W(x,y) = \int\limits_{\Omega}G(x,y,\xi,\eta)\,f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta + h(x,y) - I(x,y), \tag{11}$$

где $h(x,y)$ — произвольная достаточно гладкая функция, $I(x,y)$ определяется по формуле (7).

Теорема 3. *Функция $W(x,y)$, введенная по формулам (11) и (7), является решением следующей задачи:*

$$\begin{cases} \Delta^2 W(x,y) = f(x,y), \ (x,y) \in \Omega, \\ \\ W(x,y)|_{\partial\Omega} = h(x,y)|_{\partial\Omega}, \\ \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} W(x,y)\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} h(x,y)\Big|_{\partial\Omega}, \end{cases} \tag{12}$$

где $h(x,y)$ — произвольная достаточно гладкая функция.

Причем решение задачи (12) единственно, то есть решение задачи (12) зависит только от граничных значений $h(x,y)|_{\partial\Omega}$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} h(x,y)\Big|_{\partial\Omega}$, но не зависит от $h(x,y)$, когда $(x,y) \in \Omega$.

Доказательство. Заметим, что из соотношения (7) представление (11) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} W(x,y) = \int_{\Omega} G(x,y,\xi,\eta) f(\xi,\eta)\, d\xi d\eta - \int_{\partial\Omega} \Big[\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} h(\xi,\eta)\, \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) - \\ - h(\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \Big] ds_{\xi,\eta}. \end{gathered} \tag{13}$$

Проверим для $W(x,y)$ первое соотношение из (12). Справедливость равенства (12) следует из того, что верны (8) и (6). Проверим для $W(x,y)$ второе соотношение из (12). Пусть $(x,y) \in \partial\Omega$. Тогда из равенства 4 теоремы 2 и соотношений (10) следует требуемое граничное соотношение из (12). Третье соотношение из (12) следует из 5 теоремы 2 и соотношений (9). Единственность задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре известна. Тем самым теорема 3 полностью доказана.

Теперь покажем, как, используя теорему 3, можно получать новые граничные корректно разрешимые задачи для бигармонического уравнения в шаре.

Для этого достаточно, чтобы функция $h(x,y)$ непрерывным образом зависела от функции $f(x,y)$, то есть пусть существует непрерывный оператор L, отображающий $f(x,y)$ в $h(x,y)$. Напомним, $h(x,y)$ — гладкая функция проколотой области Ω_0. Итак, пусть $h = L(f)$.

Тогда задача (12) примет вид

$$\Delta^2 W(x,y) = f(x,y), \ (x,y) \in \Omega, \tag{14}$$

$$\begin{cases} W(x,y)|_{\partial\Omega} - L(\Delta^2 W)|_{\partial\Omega} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} W(x,y)\Big|_{\partial\Omega} - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L(\Delta^2 W)\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Условия (15), накладываемые на функцию $W(x,y)$, можно интерпретировать как дополнительные условия для того, чтобы уравнение (14) при любой правой части $f(x,y)$ имело единственное решение. Таким образом, задача (14)–(15) представляет корректную всюду разрешимую задачу с новыми "краевыми"условиями вида (15). Слово "краевые"пишем в кавычках из-за того, что в общем случае, эти условия не являются граничными.

Итак, справедлива

Теорема 4. *Для любого непрерывного оператора L, отображающего пространство $\{f\}$ в множество $\{h\}$ гладких функции, задача (14)–(15) имеет единственное устойчивое решение при всех допустимых правых частях f.*

Теперь докажем обратное утверждение.

Теорема 5. *Если уравнение (14) при всех допустимых правых частях f с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое решение, то найдется* *непрерывный оператор L, отображающий пространство $\{f\}$ в множество $\{h\}$ гладких функции, такой, что дополнительные условия примут вид* (15).

Доказательство. Пусть уравнение (14) с некоторыми дополнительными условиями однозначно разрешимо для любой правой части $f(x,y)$. Соответствующее единственное решение обозначим через $u(x,y,f)$. Введем функцию $W(x,y,f)=\int\limits_{\Omega} G(x,y,\xi,\eta)\,f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta$ и составим разность

$$v(x,y)=u(x,y,f)-W(x,y,f). \tag{16}$$

Ясно, что $v(x,y)$ является решением однородного уравнения $\Delta^2 v=0$ и однозначно определяется по f. Таким образом, любому f соответствует единственная функция v, которая представляет достаточно гладкую функцию и является бигармонической функцией. Обозначим через L оператор, ставящий каждой f в соответствие v, то есть $v=L(f)$.

Рассмотрим совершенно новую функцию по формуле $w(x,y)=W(x,y,f)-v(x,y)$.

В данном случае роль $h(x,y)$ играет функция $v(x,y)$. Следовательно, выше приведенные рассуждения из теоремы 3 показывают, что

$$\Delta^2 w(x,y)=f(x,y),$$

$$w(x,y)|_{\partial\Omega}=v(x,y)|_{\partial\Omega}, \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}w(x,y)\right|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}v(x,y)\right|_{\partial\Omega},$$

где $v(x,y)=L(f)$ или $v(x,y)=L(\Delta^2 w)$.
С другой стороны, из представления (16) следует, что $u(x,y,f)=W(x,y,f)+v(x,y)$ также удовлетворяет соотношениям (17). Поэтому из теоремы единственности вытекает, что $u(x,y,f)=w(x,y)$. Следовательно, дополнительные условия для однозначной разрешимости имеют вид (17). Теорема 5 полностью доказана.

Для конкретности приведем примеры, вытекающие из теорем 4 и 5. Согласно теореме 4, выбирая оператор L, можно получить те или иные корректные задачи для бигармонического уравнения в шаре. Причем согласно теореме 5 этот способ позволяет описать все возможные корректные задачи.

Пример 1. Пусть оператор L имеет интегральный вид

$$(Lf)(x,y)=\int\limits_{\Omega} K(x,y,t,s)\,f(t,s)\,dtds,$$

где $K(x,y,t,s)$ — достаточно гладкое по (x,y) ядро интегрального оператора. Тогда дополнительные условия (15) примут вид

$$\begin{cases} W(x,y)|_{\partial\Omega}-\int\limits_{\Omega} K(x,y,t,s)\,\Delta^2 W(t,s)\,dtds|_{\partial\Omega}=0,\\ \left.\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}W(x,y)\right|_{\partial\Omega}-\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}K(x,y,t,s)\,\Delta^2 W(t,s)\,dtds\Big|_{\partial\Omega}=0. \end{cases} \tag{18}$$

Если к тому же ядро $K(x,y,t,s)$ по переменным (t,s) является бигармонической функцией, то дополнительные условия (18), используя формулу Грина, можно записать в виде краевых условий

$$\begin{cases} W(x,y)|_{\partial\Omega} - \int\limits_{\partial\Omega} \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{t,s}} \Delta_{t,s} W(t,s) K(x,y,t,s) - \Delta_{t,s} W(t,s) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{t,s}} K(x,y,t,s) \Big) + \\ + \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{t,s}} W(t,s) \Delta_{t,s} K(x,y,t,s) - W(t,s) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{t,s}} \Delta_{t,s} K(x,y,t,s) \Big) \Big] ds_{t,s} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} W(x,y) \Big|_{\partial\Omega} - \\ - \int\limits_{\partial\Omega} \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{t,s}} \Delta_{t,s} W(t,s) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} K(x,y,t,s) - \Delta_{t,s} W(t,s) \frac{\partial^2}{\partial \overline{n}_{t,s} \partial \overline{n}_{x,y}} K(x,y,t,s) \Big) + \\ + \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{t,s}} W(t,s) \Delta_{t,s} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} K(x,y,t,s) - W(t,s) \frac{\partial^2}{\partial \overline{n}_{t,s} \partial \overline{n}_{x,y}} \Delta_{t,s} K(x,y,t,s) \Big) \Big] ds_{t,s} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Таким образом, краевая задача (14)–(19) однозначно разрешима при любых допустимых правых частях, если $K(x,y,t,s)$ — гладкая по (x,y) и бигармоническая по (t,s).

Пример 2. Если оператор L имеет вид $(Lf)(x,y) = \int\limits_{\Omega} K(x,y,t,s) \exp\left(-\frac{1}{|f(t,s)|}\right) dtds$, где $K(x,y,t,s)$ — достаточно гладкое ядро интегрального оператора, то приходим к нелинейным граничным условиям.

Теперь уточним возможность выбора граничного оператора L. На самом деле, для записи дополнительных условий (15) нам нет необходимости знать значения $(Lf)(x,y)$ во внутренних точках (x,y) из Ω. Достаточно знание информации о следах $(Lf)(x,y)$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}}(Lf)(x,y)$ на границе $\partial\Omega$.

В дальнейшем нам удобно вместо $L(f)$ писать $(Lf)(x,y)$ и считать L линейным оператором. Оператор, соответствующий задаче (14)–(15), обозначим через A_L. Тогда A_0 соответствует задаче Дирихле из теоремы 1. В следующей теореме дано представление резольвенты оператора A_L.

Теорема 6. *Если L — линейный непрерывный оператор из теоремы 4 и 5, то резольвента оператора A_L имеет вид*

$$\begin{gathered} (A_L - \lambda I)^{-1} f(x,y) = (A_0 - \lambda I)^{-1} f(x,y) - \\ - \int\limits_{\partial\Omega} \Big\{ \big(A_L (A_L - \lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \big) \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} L A_0 (A_0 - \lambda I)^{-1} f(\xi,\eta) \Big) - \\ - \Big(A_L (A_L - \lambda I)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \Big) \big(L A_0 (A_0 - \lambda I)^{-1} f(\xi,\eta) \big) \Big\} ds_{\xi,\eta}. \end{gathered}$$

Согласно теореме 6 для вычисления резольвенты на произвольном элементе f достаточно уметь вычислять значения резольвенты на конкретных функциях $\Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)$ при $(\xi,\eta) \in \partial\Omega$.

Доказательство. Удобно ввести следующие обозначения

$$\begin{gathered} u(x,y) = (A_0 - \lambda I)^{-1} f(x,y), \\ v(x,y,\xi,\eta) = A_L (A_L - \lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta), \\ g(\xi,\eta) = L A_0 (A_0 - \lambda I)^{-1} f(\xi,\eta), \\ W(x,y) = u(x,y) - \int\limits_{\partial\Omega} \Big[v(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v(x,y,\xi,\eta) g(\xi,\eta) \Big] ds_{\xi,\eta}. \end{gathered}$$

Покажем, что $\Delta^2 W = \lambda W + f$. Действительно, рассмотрим

$$\begin{aligned} \Delta^2 W &= \Delta^2 u - \Delta^2 \int\limits_{\partial\Omega} \Big[v(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v(x,y,\xi,\eta) g(\xi,\eta) \Big] ds_{\xi,\eta} = \\ &= \lambda u + f - \int\limits_{\partial\Omega} \Big[\Delta^2 v(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta^2 v(x,y,\xi,\eta) g(\xi,\eta) \Big] ds_{\xi,\eta}. \end{aligned}$$

Поскольку $A_L p(x,y) = \Delta^2 p(x,y)$ при $p \in D(A_L)$, то

$$\Delta^2 A_L (A_L - \lambda I)^{-1} = \Delta^2 \left(I + \lambda (A_L - \lambda I)^{-1}\right) = \\ = \Delta^2 + \lambda \Delta^2 (A_L - \lambda I)^{-1} = \Delta^2 + \lambda A_L (A_L - \lambda I)^{-1}.$$

Вспоминая также, что $\Delta^2_{x,y}\Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) = 0$, $(x,y) \in \Omega$, можем записать соотношение

$$\Delta^2 W = \lambda u + f - \lambda \int\limits_{\partial\Omega} \left[v(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v(x,y,\xi,\eta)\, g(\xi,\eta)\right] ds_{\xi,\eta} = \\ = \lambda W + f.$$

Таким образом, функция W удовлетворяет требуемому дифференциальному соотношению $\Delta W = \lambda W + f$. Остается проверить граничные условия вида (15). Для этого рассмотрим разность

$$[W - L\Delta^2 W]|_{\partial\Omega} = \\ = \left[u - \int\limits_{\partial\Omega} \left(v(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v(x,y,\xi,\eta)\, g(\xi,\eta)\right) ds_{\xi,\eta} - \right. \\ \left. - L(\lambda W + f)\right]\Big|_{\partial\Omega} = -\left[\int\limits_{\partial\Omega} \left(A_L (A_L - \lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \right.\right. \\ \left.\left. - A_L (A_L - \lambda I)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\, g(\xi,\eta)\right) ds_{\xi,\eta}\right]\Big|_{\partial\Omega} - L(\lambda u + f)|_{\partial\Omega} + \\ + \left(\lambda L \int\limits_{\partial\Omega} \left(v(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v(x,y,\xi,\eta)\, g(\xi,\eta)\right) ds_{\xi,\eta}\right)\Big|_{\partial\Omega} = \\ = -\left(\int\limits_{\partial\Omega} \left(\Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\, g(\xi,\eta)\right) ds_{\xi,\eta}\right)\Big|_{\partial\Omega} - \\ - \left[\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \left((A_L - \lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \right.\right. \\ \left.\left. - (A_L - \lambda I)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\, g(\xi,\eta)\right) ds_{\xi,\eta}\right]\Big|_{\partial\Omega} - L(\lambda u + f)|_{\partial\Omega} + \\ + \left(\lambda L \int\limits_{\partial\Omega} \left(v(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v(x,y,\xi,\eta)\, g(\xi,\eta)\right) ds_{\xi,\eta}\right)\Big|_{\partial\Omega}.$$

Вспоминая соотношения (10), последнее соотношение запишем в виде

$$[W - L\Delta^2 W]|_{\partial\Omega} = g(\xi,\eta)|_{\partial\Omega} - \\ - \left[\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \left((A_L - \lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \right.\right. \\ \left.\left. - (A_L - \lambda I)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\, g(\xi,\eta)\right) ds_{\xi,\eta}\right]\Big|_{\partial\Omega} - L(\lambda u + f)|_{\partial\Omega} + \\ + \left(\lambda L \int\limits_{\partial\Omega} \left(v(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v(x,y,\xi,\eta)\, g(\xi,\eta)\right) ds_{\xi,\eta}\right)\Big|_{\partial\Omega}.$$

Заметим, что $g(\xi,\eta)|_{\partial\Omega} = L(\lambda u + f)|_{\partial\Omega}$, так как

$$\lambda u + f = \lambda (A_0 - \lambda I)^{-1} f + f = A_0 (A_0 - \lambda I)^{-1} f.$$

С другой стороны, функция $(A_L - \lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)$, а также функция $(A_L - \lambda I)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \in D(A_L)$, и поэтому удовлетворяют соответствующим краевым условиям

$$(A_L - \lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Big|_{\partial\Omega} = L A_L (A_L - \lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\big|_{\partial\Omega}, \\ (A_L - \lambda I)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Big|_{\partial\Omega} = L A_L (A_L - \lambda I)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Big|_{\partial\Omega}.$$

Поэтому

$$\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) ds_{\xi,\eta} \Big|_{\partial\Omega} = = L\left(\lambda \int\limits_{\partial\Omega} v\left(x,y,\xi,\eta\right) \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) ds_{\xi,\eta}\right)\Bigg|_{\partial\Omega},$$

$$\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right) ds_{\xi,\eta} \Big|_{\partial\Omega} = = L\left(\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right) ds_{\xi,\eta}\right)\Bigg|_{\partial\Omega},$$

поскольку L — линейный оператор.

Следовательно, выполняется одно из краевых условий (15)

$$\left[W - L\Delta^2 W\right]\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Теперь проверим выполнение второго из краевых условий (15). Для этого рассмотрим разность

$$\left[\tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} W\left(x,y\right) - \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L\left(\Delta^2 W\right)\right]\Big|_{\partial\Omega} = \Big[\tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} u -$$
$$- \int\limits_{\partial\Omega} \left(\tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} v\left(x,y,\xi,\eta\right) \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) - \tfrac{\partial^2}{\partial \overline{n}_{x,y} \partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right)\right) ds_{\xi,\eta} -$$
$$- \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L\left(\lambda W + f\right)\Big]\Big|_{\partial\Omega} =$$
$$= -\Bigg[\int\limits_{\partial\Omega} \Big(\tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} A_L \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) -$$
$$- \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} A_L \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right)\Big) ds_{\xi,\eta}\Bigg]\Bigg|_{\partial\Omega} -$$
$$- \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L\left(\lambda u + f\right)\Big|_{\partial\Omega} +$$
$$+ \left(\lambda \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L \int\limits_{\partial\Omega} \left(v\left(x,y,\xi,\eta\right) \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) - \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right)\right) ds_{\xi,\eta}\right)\Bigg|_{\partial\Omega} =$$
$$= -\Bigg(\int\limits_{\partial\Omega} \Big(\Delta_{\xi,\eta} \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} G\left(x,y,\xi,\eta\right) \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) -$$
$$- \tfrac{\partial^2}{\partial \overline{n}_{x,y} \partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right)\Big) ds_{\xi,\eta}\Bigg)\Bigg|_{\partial\Omega} -$$
$$- \Bigg[\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \Big(\tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) -$$
$$- \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right)\Big) ds_{\xi,\eta}\Bigg]\Bigg|_{\partial\Omega} -$$
$$- \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L\left(\lambda u + f\right)\Big|_{\partial\Omega} +$$
$$+ \left(\lambda \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L \int\limits_{\partial\Omega} \left(v\left(x,y,\xi,\eta\right) \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) - \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right)\right) ds_{\xi,\eta}\right)\Bigg|_{\partial\Omega}.$$

Вспоминая соотношения (10), последнее соотношение запишем в виде

$$\left[\tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} W - \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L\Delta^2 W\right]\Big|_{\partial\Omega} = \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} g\left(\xi,\eta\right)\Big|_{\partial\Omega} -$$
$$- \Bigg[\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \Big(\tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) -$$
$$- \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right)\Big) ds_{\xi,\eta}\Bigg]\Bigg|_{\partial\Omega} -$$
$$- \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L\left(\lambda u + f\right)\Big|_{\partial\Omega} +$$
$$+ \left(\lambda \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L \int\limits_{\partial\Omega} \left(v\left(x,y,\xi,\eta\right) \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) - \tfrac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right)\right) ds_{\xi,\eta}\right)\Bigg|_{\partial\Omega}.$$

Заметим, что $\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}}\, g\left(\xi,\eta\right)\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L\left(\lambda u + f\right)\Big|_{\partial\Omega}$, так как

$$\lambda u + f = \lambda \left(A_0 - \lambda I\right)^{-1} f + f = A_0 \left(A_0 - \lambda I\right)^{-1} f.$$

С другой стороны, функции $\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right)$, $\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) \in D\left(A_L\right)$ и поэтому удовлетворяют соответствующим краевым условиям

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right)\big|_{\partial\Omega} = \\
= \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L A_L \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right)\Big|_{\partial\Omega}, \\
\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right)\Big|_{\partial\Omega} = \\
= \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L A_L \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right)\Big|_{\partial\Omega}.
\end{gathered}$$

Поэтому

$$\begin{gathered}
\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) ds_{\xi,\eta}\Big|_{\partial\Omega} = \\
= \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L \left(\lambda \int\limits_{\partial\Omega} v\left(x,y,\xi,\eta\right) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) ds_{\xi,\eta}\right)\Bigg|_{\partial\Omega}, \\
\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right) ds_{\xi,\eta}\Big|_{\partial\Omega} = \\
= \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L \left(\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right) ds_{\xi,\eta}\right)\Bigg|_{\partial\Omega},
\end{gathered}$$

поскольку L — линейный оператор. Следовательно, выполняется одно из краевых условий (15)

$$\left[\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} W\left(x,y\right) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L\left(\Delta^2 W\right)\right]\Bigg|_{\partial\Omega} = 0.$$

Теорема 6 полностью доказана.

Выделим конечномерные возмущения задачи (14)–(15) для неоднородного бигармонического уравнения. Для этого применим вышеуказанный метод к проколотому кругу $\Omega_0 = \Omega \backslash \left\{M_0\right\}$, где M_0 — некоторая внутренняя точка круга Ω. Возьмем произвольную функцию $h\left(x,y\right)$ из пространства $W_2^4\left(\Omega_0\right)$ и введем функцию по формуле

$$I\left(x,y\right) = \lim_{\delta \to +0} \int\limits_{\Omega_\delta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) \Delta_{\xi,\eta}^2 h\left(\xi,\eta\right) d\xi d\eta,$$

где $\Omega_\delta = \Omega \backslash \Pi_\delta\left(M_0\right)$; $\Pi_\delta\left(M_0\right) = \left\{\left(\xi,\eta\right) : x_0 - \delta \le \xi \le x_0 + \delta, y_0 - \delta \le \eta \le y_0 + \delta\right\}$ $\left(x_0,y_0\right)$ — координаты точки M_0.

Преобразуем функцию $I\left(x,y\right)$ аналогично формулам (2)–(7) в результате имеем

$$\begin{gathered}
I\left(x,y\right) = h\left(x,y\right) - \int\limits_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} h\left(\xi,\eta\right) \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) - \right. \\
\left. - h\left(\xi,\eta\right) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right)\right] ds_{\xi,\eta} - \qquad (20) \\
- \lim_{\delta \to +0} \int\limits_{\partial\Pi_\delta\left(M_0\right)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} h G\left(x,y,\xi,\eta\right) - \Delta_{\xi,\eta} h\left(\xi,\eta\right) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} G\left(x,y,\xi,\eta\right)\right) + \right. \\
\left. + \left(\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} h\left(\xi,\eta\right) \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) - h\left(\xi,\eta\right) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right)\right)\right] ds_{\xi,\eta}
\end{gathered}$$

при $(x, y) \neq M_0$. Предполагаем также, что относительно $h(\xi, \eta)$ в окрестности точки (x_0, y_0) выполнены условия:

$$\begin{gathered}\sup_{0<\delta<\delta_0}\sup_{y_0-\delta<\eta<y_0+\delta}\left\{\delta\left(\left|\frac{\partial h(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}\right|+\left|\frac{\partial h(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right|+\left|h(x_0+\delta,\eta)\right|+\right.\right.\\ +\left|h(x_0-\delta,\eta)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)\right|+\\ \left.\left.+\left|\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)\right|+\left|\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)\right|+\left|\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)\right|\right)\right\}\leq C,\end{gathered}\tag{21}$$

$$\begin{gathered}\sup_{0<\delta<\delta_0}\sup_{x_0-\delta<\xi<x_0+\delta}\left\{\delta\left(\left|\frac{\partial h(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}\right|+\left|\frac{\partial h(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}\right|+\left|h(\xi,y_0-\delta)\right|+\right.\right.\\ +\left|h(\xi,y_0+\delta)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)\right|+\\ \left.\left.+\left|\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)\right|+\left|\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)\right|+\left|\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)\right|\right)\right\}\leq C\end{gathered}\tag{22}$$

и существуют пределы

$$\begin{aligned}
&\alpha=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)\right]d\eta+\right.\\
&\left.+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)\right]d\xi\right\},\\
&\beta=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)-\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)\right]d\eta,\\
&\gamma=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)-\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)\right]d\xi,\\
&\theta=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial h(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial h(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right]d\eta+\right.\\
&\left.+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial h(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}-\frac{\partial h(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}\right]d\xi\right\},\\
&\sigma=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[h(x_0-\delta,\eta)-h(x_0+\delta,\eta)\right]d\eta,\\
&\varsigma=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[h(\xi,y_0+\delta)-h(\xi,y_0-\delta)\right]d\xi.
\end{aligned}$$

Тогда выпишем предел:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\partial\Pi_\delta(M_0)}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}hG(x,y,\xi,\eta)-\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}G(x,y,\xi,\eta)\right)+\right.\\
&\left.+\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)-h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right)\right]ds_{\xi,\eta}=\\
&=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{G(x,y,x_0+\delta,\eta)-G(x,y,x_0,y_0)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)\,d\eta+\\
&+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{G(x,y,x_0,y_0)-G(x,y,x_0-\delta,\eta)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)\,d\eta+\\
&+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0+\delta,\eta)-\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial h(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}d\eta+\\
&+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)-\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0-\delta,\eta)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial h(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}d\eta-
\end{aligned}$$

$$-G\left(x,y,x_0,y_0\right)\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\tfrac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h\left(x_0-\delta,\eta\right)-\tfrac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h\left(x_0+\delta,\eta\right)\right]d\eta-$$

$$-\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right)\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\tfrac{\partial h(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}-\tfrac{\partial h(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}\right]d\eta+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\tfrac{G(x,y,\xi,y_0-\delta)-G(x,y,x_0,y_0)}{\delta}\cdot\delta\cdot\tfrac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,y_0-\delta\right)d\xi+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\tfrac{G(x,y,x_0,y_0)-G(x,y,\xi,y_0+\delta)}{\delta}\cdot\delta\cdot\tfrac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,y_0+\delta\right)d\xi+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\tfrac{\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,y_0-\delta)-\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)}{\delta}\cdot\delta\cdot\tfrac{\partial h(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}d\xi+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\tfrac{\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)-\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,y_0+\delta)}{\delta}\cdot\delta\cdot\tfrac{\partial h(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}d\xi-$$

$$-G\left(x,y,x_0,y_0\right)\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\tfrac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,y_0+\delta\right)-\tfrac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,y_0-\delta\right)\right]d\xi-$$

$$-\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right)\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\tfrac{\partial h(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}-\tfrac{\partial h(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}\right]d\xi+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\tfrac{\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}-\frac{\partial G(x,y,x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}}{\delta}\cdot\delta\cdot\Delta_{\xi,\eta}h\left(x_0+\delta,\eta\right)d\eta+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\tfrac{\frac{\partial G(x,y,x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}}{\delta}\cdot\delta\cdot\Delta_{\xi,\eta}h\left(x_0-\delta,\eta\right)d\eta+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\tfrac{\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0+\delta,\eta)}{\delta}\cdot\delta\cdot h\left(x_0+\delta,\eta\right)d\eta+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\tfrac{\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0-\delta,\eta)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)}{\delta}\cdot\delta\cdot h\left(x_0-\delta,\eta\right)d\eta-$$

$$-\tfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}h\left(x_0+\delta,\eta\right)-\Delta_{\xi,\eta}h\left(x_0-\delta,\eta\right)\right]d\eta-$$

$$-\tfrac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right)\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[h\left(x_0+\delta,\eta\right)-h\left(x_0-\delta,\eta\right)\right]d\eta+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\tfrac{\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}-\frac{\partial G(x,y,\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}}{\delta}\cdot\delta\cdot\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,y_0-\delta\right)d\xi+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\tfrac{\frac{\partial G(x,y,\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}-\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}}{\delta}\cdot\delta\cdot\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,y_0+\delta\right)d\xi+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\tfrac{\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,y_0-\delta)}{\delta}\cdot\delta\cdot h\left(\xi,y_0-\delta\right)d\xi+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\tfrac{\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,y_0+\delta)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)}{\delta}\cdot\delta\cdot h\left(\xi,y_0+\delta\right)d\xi-$$

$$-\tfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,y_0-\delta\right)-\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,y_0+\delta\right)\right]d\xi-$$

$$-\tfrac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right)\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[h\left(\xi,y_0-\delta\right)-h\left(\xi,y_0+\delta\right)\right]d\xi.$$

Поскольку по предположению для функции $h\left(\xi,\eta\right)$ существует $\delta_0>0$ и $C>0$ такие, что выполняются соотношения (21), (22), то справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\partial\Pi_\delta(M_0)}\left(G\left(x,y,\xi,\eta\right)\frac{\partial h(\xi,\eta)}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}-\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}h\left(\xi,\eta\right)\right)ds_{\xi,\eta}=$$
$$=\alpha G\left(x,y,x_0,y_0\right)+\beta\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}+\gamma\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}+$$
$$+\theta\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right)+\sigma\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right)+\varsigma\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right),$$

где числа $\alpha,\beta,\gamma,\theta,\sigma,\varsigma$ были определены выше.

Здесь учтено, что функция $G\left(x,y,\xi,\eta\right)$ при $(x,y)\neq(\xi,\eta)$ является достаточно гладкой функцией. Таким образом, из соотношения (20) получаем

$$I\left(x,y\right)=h\left(x,y\right)-\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}h\left(\xi,\eta\right)\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)-\right.$$
$$\left.-h\left(\xi,\eta\right)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\right]ds_{\xi,\eta}-$$
$$-\alpha G\left(x,y,x_0,y_0\right)-\beta\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}-\gamma\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}-$$
$$-\theta\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right)-\sigma\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right)-\varsigma\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right).$$

Отсюда

$$h\left(x,y\right)-I\left(x,y\right)=\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}h\left(\xi,\eta\right)\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)-\right.$$
$$\left.-h\left(\xi,\eta\right)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\right]ds_{\xi,\eta}+$$
$$+\alpha G\left(x,y,x_0,y_0\right)+\beta\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}+\gamma\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}+$$
$$+\theta\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right)+\sigma\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right)+\varsigma\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right).$$

Поэтому аналог формулы (13) примет вид

$$W\left(x,y\right)=\int\int\limits_{\Omega}G\left(x,y,\xi,\eta\right)f\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}h\left(\xi,\eta\right)\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)-\right.$$
$$\left.-h\left(\xi,\eta\right)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\right]ds_{\xi,\eta}+ \tag{23}$$
$$+\alpha G\left(x,y,x_0,y_0\right)+\beta\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}+\gamma\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}+$$
$$+\theta\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right)+\sigma\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right)+\varsigma\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right).$$

Для того, чтобы решение $W\left(x,y\right)$, задаваемое формулой (23), принадлежало пространству $L_2\left(\Omega_0\right)$, необходимо положить $\beta=\gamma=\sigma=\varsigma=0$, то есть функция $h\left(x,y\right)$ должна быть непрерывной в точке M_0. Формула (23) дает решение неоднородного бигармонического уравнения в проколотой области Ω_0, которое отличается от решения задачи (14), (15) конечным числом слагаемых. Следовательно, правая часть соотношения (23) представляет решение конечномерного возмущения задачи (14), (15) для оператора Лапласа.

Теорема 7. *Краевая задача для неоднородного бигармонического уравнения в проколотой области* Ω_0.

$$\Delta^2W=f,\Omega_0,$$
$$W\left(x,y\right)|_{\partial\Omega}=h\left(x,y\right)|_{\partial\Omega}$$
$$\left.\frac{\partial W(x,y)}{\partial\overline{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial h(x,y)}{\partial\overline{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega},$$

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}W\left(x_0+\delta,\eta\right)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}W\left(x_0-\delta,\eta\right)\right]d\eta+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}W\left(\xi,y_0-\delta\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}W\left(\xi,y_0+\delta\right)\right]d\xi\right\}=$$
$$=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h\left(x_0+\delta,\eta\right)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h\left(x_0-\delta,\eta\right)\right]d\eta+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,y_0-\delta\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,y_0+\delta\right)\right]d\xi\right\},$$

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}W\left(x_0-\delta,\eta\right)-\Delta_{\xi,\eta}W\left(x_0+\delta,\eta\right)\right]d\eta=\\&\quad=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}h\left(x_0-\delta,\eta\right)-\Delta_{\xi,\eta}h\left(x_0+\delta,\eta\right)\right]d\eta;\\&\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}W\left(\xi,y_0+\delta\right)-\Delta_{\xi,\eta}W\left(\xi,y_0-\delta\right)\right]d\xi=\\&\quad=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,y_0+\delta\right)-\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,y_0-\delta\right)\right]d\xi;\end{aligned}\tag{24}$$

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial W(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial W(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right]d\eta+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial W(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}-\frac{\partial W(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}\right]d\xi\right\}=$$
$$=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial h(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial h(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right]d\eta+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial h(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}-\frac{\partial h(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}\right]d\xi\right\};$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[W\left(x_0-\delta,\eta\right)-W\left(x_0+\delta,\eta\right)\right]d\eta=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[h\left(x_0-\delta,\eta\right)-h\left(x_0+\delta,\eta\right)\right]d\eta;$$
$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[W\left(\xi,y_0+\delta\right)-W\left(\xi,y_0-\delta\right)\right]d\xi=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[h\left(\xi,y_0+\delta\right)-h\left(\xi,y_0-\delta\right)\right]d\xi.$$

При любой правой части f имеет единственное решение, и оно задается по формуле (23).

Отметим, что решение краевой задачи из теоремы 7 ищется в классе функций, которые удовлетворяют условиям (21), (22), и существуют пределы (24). Доказательство теоремы 7 приводится точно так же, как доказывалась теорема 3.

Теперь покажем, как, используя теорему 7, можно получить новые граничные корректно разрешимые задачи для бигармонического уравнения в проколотом круге. Для этого достаточно, чтобы функция $h\left(x,y\right)$ непрерывным образом зависела от $f\left(x,y\right)$, то есть пусть существует непрерывный оператор L, отображающий $f\left(x,y\right)$ в $h\left(x,y\right)$. Напомним, $h\left(x,y\right)$ — гладкая функция в проколотой области Ω_0. Итак, пусть $h=L\left(\Delta^2W\right)$.
Тогда задача (24) примет вид

$$\Delta^2W\left(x,y\right)=f\left(x,y\right),\ \left(x,y\right)\in\Omega_0;\tag{25}$$

$$W\left(x,y\right)|_{\partial\Omega}=L\left(\Delta^2W\right)|_{\partial\Omega};$$
$$\left.\frac{\partial W}{\partial\overline{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial L\left(\Delta^2W\right)}{\partial\overline{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega};$$

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}W(x_0+\delta,\eta)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}W(x_0-\delta,\eta)\right]d\eta+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}W(\xi,y_0-\delta)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}W(\xi,y_0+\delta)\right]d\xi\right\}=$$
$$=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)(x_0+\delta,\eta)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)(x_0-\delta,\eta)\right]d\eta+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)(\xi,y_0-\delta)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)(\xi,y_0+\delta)\right]d\xi\right\},$$
$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}W(x_0-\delta,\eta)-\Delta_{\xi,\eta}W(x_0+\delta,\eta)\right]d\eta=$$
$$=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)(x_0-\delta,\eta)-\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)(x_0+\delta,\eta)\right]d\eta,$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}W(\xi,y_0+\delta)-\Delta_{\xi,\eta}W(\xi,y_0-\delta)\right]d\xi=$$
$$=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)(\xi,y_0+\delta)-\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)(\xi,y_0-\delta)\right]d\xi, \tag{26}$$

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial W(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial W(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right]d\eta+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial W(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}-\frac{\partial W(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}\right]d\xi\right\}=$$
$$=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial L\left(\Delta^2W\right)(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial L\left(\Delta^2W\right)(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right]d\eta+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial L\left(\Delta^2W\right)(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}-\frac{\partial L\left(\Delta^2W\right)(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}\right]d\xi\right\},$$
$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[W(x_0-\delta,\eta)-W(x_0+\delta,\eta)\right]d\eta=$$
$$=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[L\left(\Delta^2W\right)(x_0-\delta,\eta)-L\left(\Delta^2W\right)(x_0+\delta,\eta)\right]d\eta,$$
$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[W(\xi,y_0+\delta)-W(\xi,y_0-\delta)\right]d\xi=$$
$$=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[L\left(\Delta^2W\right)(\xi,y_0+\delta)-L\left(\Delta^2W\right)(\xi,y_0-\delta)\right]d\xi.$$

Условия (26), накладываемые на функцию $W(x,y)$, можно интерпретировать как дополнительные условия для того, чтобы уравнение (25) при любой правой части $f(x,y)$ имело единственное решение. Таким образом, задача (25)–(26) представляет корректную всюду разрешимую задачу с новыми "краевыми"условиями вида (26). Слово "краевые"пишем в кавычках из-за того, что в общем случае, эти условия не являются граничными.

Итак, справедлива

Теорема 8. *Для любого непрерывного оператора L, отображающего пространство $\{f\}$ в множество гладких функции $\{h\}$ в проколотой области Ω_0, задача (25)–(26) имеет единственное устойчивое решение при всех допустимых правых частях f.*

Теперь докажем обратное утверждение.

Теорема 9. *Если уравнение (25) при всех допустимых правых частях f с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое решение, то найдется непрерывный оператор L, отображающий пространство $\{f\}$ в множество гладких функции $\{h\}$ в проколотой области Ω_0, такой, что дополнительные условия примут вид (26).*

Доказательства теорем 8 и 9 приводятся точно так же, как доказывались теоремы 4, 5. В дальнейшем нам удобно вместо $L(f)$ писать $(Lf)(x,y)$ и считать L линейным оператором. Оператор, соответствующий задаче (25)–(26) обозначим через A_L. Тогда A_0 соответствует задаче Дирихле из теоремы 1. В следующей теореме дано представление резольвенты оператора A_L.

Теорема 10. *Если L — линейный непрерывный оператор из теоремы 8 и 9, то резольвента оператора A_L имеет вид*

$$
\begin{gathered}
(A_L-\lambda I)^{-1} f(x,y)=(A_0-\lambda I)^{-1} f(x,y)+\\
+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} L(A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,\eta)\, A_L(A_L-\lambda I)^{-1}\Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)-\right.\\
\left.-L(A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,\eta)\, A_L(A_L-\lambda I)^{-1}\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\right] ds_{\xi,\eta}+\\
+\alpha A_L(A_L-\lambda I)^{-1} G(x,y,x_0,y_0)+\beta A_L(A_L-\lambda I)^{-1}\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}+\\
+\gamma A_L(A_L-\lambda I)^{-1}\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}+\theta A_L(A_L-\lambda I)^{-1}\Delta_{\xi,\eta} G(x,y,x_0,y_0)+\\
+\sigma A_L(A_L-\lambda I)^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta} G(x,y,x_0,y_0)+\varsigma A_L(A_L-\lambda I)^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta} G(x,y,x_0,y_0),
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\alpha=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta} LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(x_0+\delta,\eta)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta} LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(x_0-\delta,\eta)\right] d\eta+\right.\\
&\left.+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta} LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,y_0-\delta)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta} LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,y_0+\delta)\right] d\xi\right\};\\
&\beta=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta} LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(x_0-\delta,\eta)-\Delta_{\xi,\eta} LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(x_0+\delta,\eta)\right] d\eta;\\
&\gamma=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta} LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,y_0+\delta)-\Delta_{\xi,\eta} LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,y_0-\delta)\right] d\xi;\\
&\theta=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right] d\eta+\right.\\
&\left.+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}-\frac{\partial LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}\right] d\xi\right\};\\
&\sigma=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(x_0-\delta,\eta)-LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(x_0+\delta,\eta)\right] d\eta;\\
&\varsigma=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,y_0+\delta)-LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,y_0-\delta)\right] d\xi.
\end{aligned}
$$

Замечание 1. *Если $h(x,y)$ и $\frac{\partial h(x,y)}{\partial \overline{n}}$ на $\partial\Omega$ равно нулю, то теоремы 8, 9 дают одномерное возмущение однородной задачи Дирихле для недородного бигармонического уравнения.*

Замечание 2. *Теоремы 8, 9 сформулированы для области Ω_0 с одной проколотой точкой M_0. Нетрудно сформулировать аналог теорем 8, 9, 10 для областей с конечным числом проколотых точек.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базаров М.Б., Сафаров И.И., Шокин Ю.И. *Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем.* Новосибирск.: Изд-во СО РАН. 1996. 189 с.
2. Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. *Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом* // Докл. РАН. 137:5. 1961. С. 1011–1014.
3. Садовничий В.А., Любишкин В.А. *Конечномерные возмущения дискретных операторов и формулы следов* // Функц. анализ и его приложения. 1986. Т. 20. № 3. С. 55–65.

Гульназ Еженхановна Берикханова,
Семипалатинский государственный педагогический институт,
ул.Танирбергена, 1,
071400, г. Семей, Казахстан
E-mail: gulnazzhen@mail.ru

Балтабек Есматович Кангужин,
Семипалатинский государственный педагогический институт,
ул. Танирбергена, 1,
071400, г. Семей, Казахстан
E-mail: kanbalta@mail.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 1 (2010). С. 35-51.

УДК 517.956

КЛАССЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РИККЬЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО И ШЕСТОГО ПОРЯДКОВ

И.М. БИККУЛОВ, Ф.Х. МУКМИНОВ

Аннотация. Рассматривается задача Риккье-1,3 с краевыми условиями Дирихле и третьего типа для эллиптических уравнений четвертого и шестого порядков в неограниченной области. Установлены широкие классы единственности решения этих задач, зависящие от геометрии области. Для задачи Риккье-1 с краевыми условиями Дирихле построены примеры неединственности, подтверждающие точность предложенных классов единственности.

Ключевые слова: классы единственности, задача Риккье, эллиптическое уравнение.

1. Введение

В неограниченной области Ω n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка $\mathbb{R}^n$, рассматривается эллиптический оператор

$$Lu = L_0 u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} - du, \tag{1}$$

$$L_0 u = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j}.$$

Все коэффициенты оператора дифференцируемы и ограничены в Ω, постоянная $d \geq 0$. Коэффициенты a_{ij} симметричны, $a_{ij} = a_{ji}$ и удовлетворяют при почти всех $x \in \Omega$ условию равномерной эллиптичности

$$0 < |y|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) y_i y_j \leq \Gamma |y|^2, \quad y \in R^n \setminus \{0\}. \tag{2}$$

На границе области $\partial\Omega$ класса C^1 заданы краевые условия первого и третьего типа

$$u\Big|_{x\in\Gamma_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(x) u\right)\Big|_{x\in\Gamma_2} = 0, \tag{3}$$

здесь $\Gamma_1 \neq \varnothing$ — произвольное замкнутое множество, $\Gamma_2 = \partial\Omega \backslash \Gamma_1$, $\mathbf{n}(n_1, n_2, \dots, n_n)$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$; $\dfrac{\partial u}{\partial N} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} n_j$; $\sigma(x) \geq 0$ — измеримая ограниченная функция на $\partial\Omega$.

I.M. Bikkulov, F.Kh. Mukminov, Classes of uniqueness for solutions of the Rickyies problem to fourth and sixth order elliptic equations.

Работа поддержана РФФИ (грант 07-01-00037).

Поступила 16 февраля 2010 г.

Целью работы является установление принципа Сен-Венана и классов единственности для решений уравнений

$$L^m u = 0 \tag{4}$$

при значениях $m = 2, 3$. Случай $m = 1$ рассматривался в работах О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян [10], [11] и других авторов [19], [16].

Имеется много работ, посвященных доказательству теорем типа Фрагмена-Линделефа, принципа Сен-Венана или выделению классов единственности решений для эллиптических уравнений. Перечисленные утверждения, как известно, характеризуют близкие качественные свойства решений эллиптических уравнений.

Первоначально теорема Фрагмена-Линделефа [3] возникла как обобщение принципа максимума модуля для аналитических функций, а именно: если регулярная в области D аналитическая функция $f(z)$ в каждой точке $\xi \in \partial D$ границы удовлетворяет условию $\lim\limits_{r\to 0} \sup\limits_{D\cap B(r,\xi)} |f(z)| \leqslant M$, то $|f(z)| \leqslant M$ всюду в области D. Здесь и далее $B(r, \xi)$ — шар радиуса r с центром в точке ξ.

В последующем теоремами Фрагмена-Линделефа для эллиптических уравнений стали называть утверждения следующего вида. Пусть, например, Ω — угол раствора φ на плоскости $\mathbb{R}_2 = \{\overline{y} = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ и M — произвольное неотрицательное число. Если гармоническая в Ω функция на границе не превосходит M, то она либо и в Ω не превосходит M, либо растет не медленнее, чем $\varepsilon|\overline{y}|^{\pi/\varphi}$, где $\varepsilon > 0$. Отсюда сразу следует, что множество функций, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{|\overline{y}|\to\infty} |\overline{y}|^{-\pi/\varphi} u(\overline{y}) = 0$, является классом единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в угле Ω.

Интересный вариант теоремы Фрагмена-Линделефа доказан в работе [4]: решение эллиптического уравнения второго порядка в бесконечном полуцилиндре либо экспоненциально выходит на константу, либо растет линейным образом, либо растет экспоненциально при $x \to \infty$.

Принцип Сен-Венана был впервые обоснован в работе [5] (см. также [6]) в следующей форме. Если деформировать один торец упругого цилиндрического стержня, то величина деформаций будет экспоненциально убывать при удалении от торца. После работ [5], [6] появилось много результатов, в которых принцип Сен-Венана распространялся на уравнения эллиптического и параболического типов. В частности, в работе [7] доказан точный принцип Сен-Венана для решений бигармонического уравнения

$$\Delta\Delta u = \Phi + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \tag{5}$$

в области Ω на плоскости $\mathbb{R}_2$ с граничными условиями

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{6}$$

где ν — направление внешней нормали к $\partial\Omega$. Сформулируем его.

Пусть $\delta(\omega)$, $\pi < \omega \leqslant 2\pi$, — единственное решение уравнения $\sin^2(\omega\delta) = \delta^2 \sin^2 \omega$, удовлетворяющее условию $0 < \omega\delta(\omega) \leqslant \pi$. Пусть $\gamma(\rho) = \{x \in \Omega \mid |x| = \rho\}$ не является целой окружностью ни при каком $\rho > 0$ и $l(\rho)$ — длина наибольшей из дуг, составляющих $\gamma(\rho)$. Пусть $l(\rho) \leqslant \rho\omega$, где $\omega \in [1.24\pi, 2\pi]$ и $\Phi(x) = \Phi_1(x) = \Phi_2(x) = 0$ в $\Omega(R) = \{x \in \Omega \mid g(x) < R\}$ (здесь $g(x) = |x|$, но ниже рассматриваются и другие функции). Тогда решение задачи Дирихле для бигармонического уравнения при $\rho < R/2$ удовлетворяет оценке

$$\int\limits_{\Omega(\rho)} \mathcal{E}(u)dx \leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\delta(\omega)} \int\limits_{\Omega(R)} \mathcal{E}(u)dx \tag{7}$$

с постоянной C, зависящей только от ω. Здесь $\mathcal{E}(u) = u^2_{x_1x_1} + 2u^2_{x_1x_2} + u^2_{x_2x_2}$. Утверждается, что оценка (7) неулучшаема в том смысле, что показатель степени $2\delta(\omega)$ не может быть увеличен, например, для областей типа угла. Очевидно, что оценка (7) позволяет выделить следующий класс единственности решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в неограниченной области. Если $u(x)$ — решение задачи (5), (6) с $\Phi = \Phi_1 = \Phi_2 = 0$ в Ω и существует последовательность $R_N \to \infty$ такая, что

$$\int\limits_{\Omega(R_N)} \mathcal{E}(u)dx \leqslant \varepsilon(R_N)R_N^{2\delta(\omega)},$$

где $\varepsilon(R_N) \to 0$ при $R_N \to \infty$, то $u \equiv 0$ в Ω.

В работах О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян [8], [9] доказана следующая теорема Фрагмена-Линделефа для решения $u(x,y)$ бигармонического уравнения с краевыми условиями (6) на границе области Ω, лежащей в полуплоскости $\mathbb{R}_2^+ = \{\overline{y} = (x,y) \in \mathbb{R}_2 \mid x > 0\}$. Пусть $\mu(r)$ — непрерывная функция такая, что

$$0 < \mu(r) \leqslant \mu'(r) = \inf\left\{\int\limits_{\gamma_r} \mathcal{E}(g)dy \;\middle|\; g(x,y) \in C_0^\infty(\Omega), \int\limits_{\gamma_r}[g_x^2 - gg_{xx} + g_y^2]dy = 1\right\}, \quad r > 0,$$

$\gamma_r = \{\overline{y} = (x,y) \in \Omega \mid x = r\}$ — конечное число ограниченных непересекающихся интервалов. Функция $\Phi(r,s)$ удовлетворяет при $t \le r \leqslant s$ уравнению $\Phi_{rr} - \mu(r)\Phi = 0$ с начальными условиями $\Phi(s,s) = 1,\ \Phi_r(s,s) = 0$. Тогда, если для некоторой последовательности $t_N \to \infty$ и некоторого числа $d > 0$ выполнены неравенства

$$\int\limits_{\Omega^{t_N}} \mathcal{E}(u)d\overline{y} \leqslant \varepsilon(t_N)\Phi(d,t_N),$$

где $\varepsilon(t_N) \to 0$ при $t_N \to \infty$, то $u \equiv 0$ в Ω. Здесь $\Omega^r = \{\overline{y} = (x,y) \in \Omega \mid x < r\}$. Рассмотрены также области, имеющие несколько ветвей, уходящих в бесконечность по различным направлениям.

В.А. Кондратьев и О.А. Олейник в работе [12] доказали следующий принцип Сен-Венана для решений внешних краевых задач. Пусть G — внешность ограниченной области $\widehat{G}$ в $\mathbb{R}_{n,\mathbf{x}}$ и $T_{k,\mathbf{y}}$ — k-мерный тор. В области $Q = G \times T_{k,\mathbf{y}}$, $n \ge 2,\ \mathbf{z} = (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in Q$ рассматриваются решения уравнения

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n+k} (a_{\alpha\beta}(\mathbf{z})u_{z_\alpha})_{z_\beta} = 0$$

с постоянными эллиптичности δ_1, δ_2 и краевыми условиями первого или второго типа на ∂Q. В случае первого краевого условия предполагается, что для функции $u(\mathbf{z})$ найдется $\rho^* > \rho_0$ такое, что при любом достаточно малом ε

$$I(u,|x|,\rho^* + \varepsilon) = I(u,|x|,\rho^*),$$

где $I(u,v,\rho) = \int\limits_{Q(\rho)} \mathcal{F}(u,v)d\mathbf{z},\ \mathcal{F}(u,v) = \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{n+k} a_{\alpha\beta}u_{z_\alpha}u_{z_\beta},\quad Q(\rho) = \{\mathbf{z} = (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in Q \mid |\mathbf{x}| < \rho\}$. Тогда для решения справедлив принцип Сен-Венана: при любых ρ_1, ρ_2, таких, что $\rho_0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho$, выполняется неравенство

$$I(u,u,\rho_1) \le \rho_1^\kappa \rho_2^{-\kappa} I(u,u,\rho_2), \quad \kappa = \delta_1^{1/2}\delta_2^{-1/2}(n-1)^{1/2}.$$

Из него выводится соответствующая теорема о единственности решений.

В работе [13] доказано, в частности, что неравенство $|u(\overline{\mathbf{y}})| \le C|\ln|\overline{\mathbf{y}}||^{1-\varepsilon},\ |\overline{\mathbf{y}}| > C$, выделяет класс единственности решений эллиптического уравнения $Lu = f(x), d = 0$, пригодный для любой неограниченной области на плоскости и краевых условий первого, второго и третьего типов.

В недавних работах [19], [15] устанавливаются классы единственности для квазиэллиптических и псевдодифференциальных уравнений в неограниченных областях. В работе [20] доказана теорема Фрагмена-Линделефа для квазилинейного эллиптического уравнения высокого порядка. Отметим, что точность результатов в последних трех работах не обсуждалась.

Будем предполагать, что $\partial\Omega \in C^2$ и коэффициенты оператора L удовлетворяют условию

$$\operatorname{div}\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n}(b_i)_{x_i} = 0 \tag{8}$$

и неравенствам

$$|\mathbf{b}|^2 \le d/2^m, \; x \in \Omega, \tag{9}$$

где $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

При $\Gamma_2 \ne \varnothing$ ограничимся рассмотрением областей вращения Ω_f

$$\Omega_f = \{x \in \mathbb{R}^n, \; x = (x_1, x')\big| \; |x'| < f(x_1), \; x_1 > 0\}, \tag{10}$$

определяемых функцией $f \in C^2[0,\infty)$. Положим $g(x) = g(x_1, |x'|)$, где $g(t,y)$ — решение задачи Коши $yf'(t)g_t = f(t)g_y, \; g(t,0) = t$. Легко показать (см. § 2), что функция $g(x)$ дифференцируема и ее поверхности уровня ортогональны к $\partial\Omega_f$. При $\Gamma_2 = \varnothing$ будем полагать $g(x) = |x|$.

Определим невозрастающую функцию $\lambda(r), \; r > 0$ равенством $\lambda(r) = \lambda(-\infty, r)$,

$$\lambda(a,r) = \inf\left\{\int\limits_{\Omega(a,r)} |\nabla v|^2 dx \Big| \; v \in C_0^\infty(R^n \setminus (\Gamma_1 \cup \Omega_r^\infty)), \int\limits_{\Omega(a,r)} v^2 dx = 1\right\}, \tag{11}$$

где $\Omega(a,r) = \{x \in \Omega \mid a < g(x) < r\}, \; \Omega(r) = \Omega(-\infty, r)$.

При $d = 0$ предполагается, что

$$\lim_{r\to\infty} r^2\lambda(r) = \infty. \tag{12}$$

В параграфе 2 доказывается, что в случае областей вращения при определенных условиях на Γ_2 достаточным для этого является условие

$$\lim_{r\to\infty} r/f(r) = \infty. \tag{13}$$

Будем требовать "регулярность" поведения функции f

$$\max_{[0,r]} f \le F \min_{[r/2,r]} f, \quad r \ge D, \tag{14}$$

и выполнение неравенств

$$|f'(r)| \le F, \quad r \ge D, \tag{15}$$

$$|(f(r)/f'(r))'| \le F, \quad r \in \{r \ge D | f'(r) \ne 0\}. \tag{16}$$

Здесь и далее одной и той же буквой F обозначаются, вообще говоря, различные постоянные, определяемые функцией f. Достаточным условием для справедливости (16) является неравенство

$$\left|\frac{f(r)f''(r)}{(f'(r))^2}\right| \le F, \quad r \in \{r \ge D | f'(r) \ne 0\}. \tag{17}$$

На коэффициенты $a_{ij}, \; i,j = \overline{1,n}$ будем накладывать требования $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ и

$$\sum_{i,j=1}^{n} |(a_{ij})_{x_j}|^2 \le M(d + \lambda(r)), \quad x \in \Omega_{r/2}^r, \quad r \ge D. \tag{18}$$

Теорема 1. *Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют неравенствам* (9), (8), (18). *Если $\Gamma_2 \neq \varnothing$, то будем требовать дополнительно $L_0 = \triangle$ и рассматривать область вида* (10) *с функцией f, удовлетворяющей условиям* (14), (15), (17). *Тогда найдется положительное число μ такое, что для всех $r > D$, $\nu \in (7/8, 1)$ равенство $L^2 u = 0$ в $\Omega(r)$ (в обобщенном смысле) влечет оценку*

$$\int\limits_{\Omega(r/2)} [|L_0 u|^2 + |du|^2] dx \leq C(\nu) \exp(-\mu r (d + \lambda(r))^{1/2}) \|u\|^2_{W_2^2(\Omega^r_{\nu r})}. \tag{19}$$

В случае $m = 3$ дополнительно требуем выполнение неравенства

$$\left| \frac{f^2(r) f'''(r)}{(f'(r))^3} \right| \leq F, \quad r \geq D, \ f \in C^3[0, \infty). \tag{20}$$

Коэффициенты $b_i(x)$ равны нулю на $\partial\Omega$. Будем предполагать также, что

$$\|\nabla b\| \leq d/8. \tag{21}$$

Теорема 2. *Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют соотношениям $L_0 = \triangle$,* (9), (8), (21). *Пусть $\Gamma_2 = \varnothing$, область Ω имеет вид* (10) *с функцией f, удовлетворяющей условиям* (14), (15), (17), (20). *Тогда найдется положительное число μ такое, что для всех $r > D$, $\nu \in (7/8, 1)$ равенство $L^3 u = 0$ в $\Omega(r)$ (в обобщенном смысле) влечет оценку*

$$\|u\|_{W_2^3(\Omega(r/2))} \leq C(\nu) \exp(-\mu r (d + \lambda(r))^{1/2}) \|u\|_{W_2^3(\Omega^r_{\nu r})}.$$

Пусть Ω_f — область вращения, $d = 0$, и это наиболее интересный случай. Пусть множество Γ_1 распределено достаточно регулярно, а именно: предполагается существование положительных чисел D и δ_1 таких, что при всех $b > a \geq D$, $b - a \geq \min\{f(a), f(b)\}/2$ выполнены неравенства

$$\operatorname{mes}_{n-1} \Gamma_1 \cap \{x | a < x_1 < b\} \geq \delta_1 \operatorname{mes}_{n-1} \partial\Omega \cap \{x | a < x_1 < b\}. \tag{22}$$

При этих условиях в параграфе 2 получена оценка функции $\lambda(r)$

$$\varepsilon f^{-2}(r) \leq \lambda(r) \leq \varepsilon^{-1} f^{-2}(r). \tag{23}$$

Она позволяет класс единственности, определяемый теоремой 1, записать в виде

$$\lim_{r \to \infty} \exp(-\varepsilon r / f(r)) \|u\|^2_{W_2^2(\Omega^r_{\nu r})} = 0. \tag{24}$$

Для подтверждения точности класса единственности (24) в случае, когда $\Gamma_2 = \emptyset$, воспользуемся теоремой из работы [19].

Теорема K. Пусть область Ω_f определена функцией f, удовлетворяющей условию (14). Тогда найдется неотрицательная гармоническая в области вращения Ω_f, равная нулю на границе и подчиняющаяся оценке

$$\int\limits_{\Omega(r)} |\nabla u|^2 dx \leqslant m \exp(K r / f(r)) \tag{25}$$

с положительными числами K, m.

Поскольку из $Lu = 0$ очевидным образом следует, что $L^2 u = 0$, то построенный в теореме K пример неединственности подтверждает точность класса единственности (24).

2. Определения пространств и вспомогательные неравенства

Гильбертово пространство $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega;\Gamma_1)$ (иногда просто $\overset{\circ}{H}{}^1$) определим как замыкание множества функций $C_0^\infty(R^n\setminus\Gamma_1)$ в пространстве $W_2^1(\Omega)$.

Пространство $H^2_\sigma(\Omega;\Gamma_1)$ определим как замыкание множества функций из $W_2^2(\Omega)$ с нулевым следом на Γ_1 таких, что след $\dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x)u=0$ при почти всех $x\in\Gamma_2$. Здесь коэффициенты a_{ij} и функция $\sigma(x)$ предполагаются класса $C^1(\partial\Omega)$, $\partial\Omega\in C^2$, хотя для рассматриваемых нами вопросов эти требования можно ослабить.

Пространство $H^3_\Delta(\Omega)$ определим как замыкание множества функций из $W_2^3(\Omega)$ с нулевым следом на $\partial\Omega$ таких, что след $\Delta u=0$ на $\partial\Omega$.

Пространства $L_{2,lc}(\Omega)$, $\overset{\circ}{H}{}^1_{lc}(\Omega;\Gamma_1)$, $H^2_{\sigma,lc}(\Omega;\Gamma_1)$, $H^3_{\Delta,lc}(\Omega)$ составим из функций u, для которых при каждом $r>0$ найдутся функции v из пространств $L_2(\Omega)$, $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega,\Gamma_1)$, $H^2_\sigma(\Omega;\Gamma_1)$, $H^3_\Delta(\Omega)$, соответственно, совпадающие с u на множестве $\{x\in\Omega\big|\ |x|<r\}$.

Установим два вспомогательных неравенства.

Пусть $E\subset[a,b]$ — измеримое подмножество и $v\in C^1[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b v^2(t)dt\le\frac{2(b-a)}{\operatorname{mes}E}\int_E v^2(t)dt+4(b-a)^2\int_a^b v'^2(t)dt. \tag{26}$$

Действительно, из формулы Ньютона-Лейбница легко следует, что

$$v^2(t)-v^2(s)\le\int_a^b 2|vv'|d\tau.$$

Проинтегрируем это сначала по $s\in E$, затем по $t\in[a,b]$. Получим

$$\operatorname{mes}E\int_a^b v^2(t)dt\le(b-a)\int_E v^2(s)ds+(b-a)\operatorname{mes}E\int_a^b 2|vv'|ds.$$

Применив неравенство $2|vv'|\le\frac{v^2}{2(b-a)}+2v'^2(b-a)$, выводим (26).

Следующее неравенство для шара B_ρ и его измеримого подмножества E является многомерным аналогом (26) для функции $v\in C^1(\overline{B_\rho})$.

$$\int_{B_\rho} v^2(x)dx\le\frac{\operatorname{mes}B_\rho}{\operatorname{mes}E}\int_E v^2(x)dx+C(n)\rho^2\frac{\operatorname{mes}^2B_\rho}{\operatorname{mes}^2E}\int_{B_\rho}|\nabla v|^2dx. \tag{27}$$

Частный случай этого неравенства, когда $v|_E=0$, установлен в [14]. Для доказательства при произвольных $x,y\in B_\rho$ запишем соотношение

$$u(y)-u(x)=\int_0^{|x-y|}\frac{\partial u(x+r\omega)}{\partial r}dr,\ \omega=\frac{y-x}{|y-x|},$$

где (r,ω) — сферические координаты с центром в точке x. Обозначив через $\chi(r,\omega)$ характеристическую функцию шара B_ρ, запишем неравенство

$$|u(x)|\le|u(y)|+\int_0^{2\rho}\chi|\nabla u(x+r\omega)|dr.$$

Проинтегрируем его по $y \in E$

$$|u(x)|\mathrm{mes}\, E \leq \int\limits_E |u(y)|dy + \int\limits_E dy \int\limits_0^{2\rho} \chi|\nabla u(x+r\omega)|dr$$

и оценим сверху правую часть следующим образом

$$\int\limits_E dy \int\limits_0^{2\rho} \chi|\nabla u(x+r\omega)|dr \leq \int\limits_0^{2\rho} \tau^{n-1}d\tau \int\limits_{S_1} d\omega \int\limits_0^{2\rho} \chi|\nabla u(x+r\omega)|dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\rho} \tau^{n-1}d\tau \int\limits_{B_\rho} \frac{|\nabla u(\xi)|d\xi}{r^{n-1}} = \frac{(2\rho)^n}{n} \int\limits_{B_\rho} \frac{|\nabla u(\xi)|d\xi}{|x-\xi|^{n-1}}.$$

Получившееся неравенство

$$|u(x)|\mathrm{mes}\, E \leq \int\limits_E |u(y)|dy + \frac{(2\rho)^n}{n} \int\limits_{B_\rho} \frac{|\nabla u(\xi)|d\xi}{|x-\xi|^{n-1}}$$

проинтегрируем по $x \in B_\rho$:

$$\mathrm{mes}\, E \int\limits_{B_\rho} |u(x)|dx \leq \mathrm{mes}\, B_\rho \int\limits_E |u(y)|dy + \frac{(2\rho)^n}{n} \int\limits_{B_\rho} |\nabla u(\xi)|d\xi \int\limits_{B_\rho} \frac{dx}{|x-\xi|^{n-1}}.$$

Очевидно, что

$$(\frac{(2\rho)^n}{n} \int\limits_{B_\rho} \frac{dx}{|x-\xi|^{n-1}} \leq 2\rho \mathrm{mes}\, B_{2\rho}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{B_\rho} |u(x)|dx \leq \frac{\mathrm{mes}\, B_\rho}{\mathrm{mes}\, E} \left(\int\limits_E |u(y)|dy + 2^{n+1}\rho \int\limits_{B_\rho} |\nabla u(\xi)|d\xi \right).$$

Положив теперь $u = v^2$ и применив неравенство $|\nabla u| = 2|v\nabla v| \leq \varepsilon v^2 + \varepsilon^{-1}|\nabla v|^2$, получим (27).

Определим последовательность $\{z_N\}$ индуктивным равенством, начиная с произвольного $z_0 > 0$:

$$z_N = \sup\{t| \min_{[z_{N-1},t]} f \geq t - z_{N-1}\},\ N = \overline{1,\infty}. \tag{28}$$

Оценим колебание функции f на отрезке $[z_N, z_{N+1}]$. Пусть t_N — точка минимума функции $f(t)$ на отрезке $[z_N, z_{N+1}]$. Очевидно из определения (28) последовательности $\{z_N\}$, что

$$f(t_N) = z_{N+1} - z_N. \tag{29}$$

Из (28) и (14) легко следуют также соотношения

$$z_{N+1} - z_N \leq f(t) \leq wf(t_N),\ t \in [z_N, z_{N+1}). \tag{30}$$

Перейдем к оценке величины λ^N снизу

$$\lambda^N = \inf\left\{ \int\limits_{\Omega(z_N,z_{N+1})} |\nabla v|^2\, dx \middle| v \in C_0^\infty(R^n \backslash \Gamma_1),\ \int\limits_{\Omega(z_N,z_{N+1})} v^2\, dx = 1 \right\} > 0.$$

Покажем сначала, что при $\delta = \varepsilon = \delta_1/(2w^{n-2})$ для множеств $Pr(N) = \{t \in [z_N, z_{N+1}] | \operatorname{mes}_{n-2}\Gamma_1 \cap \{x_1 = t\} \geq \varepsilon f^{n-2}(t)\}$ справедливы неравенства

$$\operatorname{mes} Pr(N) \geq \delta(z_{N+1} - z_N)/2, \ N = \overline{0, \infty}. \tag{31}$$

Пусть, для определенности, $t_N < (z_{N+1}+z_N)/2$. Тогда $z_{N+1} - t_N \geq (z_{N+1} - z_N)/2 \geq f(t_N)/2$. Поэтому для пары чисел t_N, z_{N+1} справедливо неравенство (22). Если же (31) не выполнено, то

$$\operatorname{mes}_{n-1}\Gamma_1 \cap \{x | t_N < x_1 < z_{N+1}\} \leq \sigma_{n-2}(\delta(\max_{[t_N, z_{N+1}]} f)^{n-2}(z_{N+1} - z_N)/2+$$

$$+\varepsilon(\max_{[t_N, z_{N+1}]} f)^{n-2}(z_{N+1} - t_N)) < \delta_1 \sigma_{n-2} f(t_N)^{n-2}(z_{N+1} - t_N) \leq \delta_1 \operatorname{mes}_{n-1}\partial\Omega \cap \{x | t_N < x_1 < z_{N+1}\},$$

что противоречит (22). Здесь σ_{n-2} — площадь единичной сферы размерности $n-2$. При $t_N \geq (z_{N+1} + z_N)/2$ справедливость соотношения (31) устанавливается аналогично.

Возьмем произвольное $t \in Pr(N)$. Запишем следующее неравенство в цилиндрических координатах для функции $v \in C_0^\infty(R^n \backslash \Gamma_1)$

$$\int_0^{f(t)} r^{n-2} v^2(t, r, \omega) dr \leq \lambda^{-1} f^2(t) \int_0^{f(t)} r^{n-2} v_r^2(t, r, \omega) dr. \tag{32}$$

Здесь ω такая "угловая" координата, что $(t, f(t), \omega) \in \Gamma_1$. Множество таких ω обозначим через E_t^0. Очевидно, что в качестве λ можно взять первое собственное значение оператора Лапласа в единичном шаре размерности $n-1$ с условием Дирихле на границе. Через E_t обозначим следующее множество

$$E_t = \{(t, r, \omega) | 0 < r < f(t), \ \omega \in E_t^0\}.$$

Положим также $S_t = \{(t, x') | \ |x'| < f(t)\}$. Интегрируя (32) по $\omega \in E_t^0$, устанавливаем неравенство

$$\int_{E_t} v^2(t, x') dx' \leq \lambda^{-1} f^2(t) \int_{E_t} v_r^2(t, x') dx'. \tag{33}$$

Пользуясь принадлежностью $t \in Pr(N)$, находим, что $\frac{\operatorname{mes} S_t}{\operatorname{mes} E_t} \leq \frac{\sigma_{n-2}}{\varepsilon}$. Неравенство (27) для S_t и E_t запишется в виде

$$\int_{S_t} v^2(t, x') dx' \leq 2\frac{\sigma_{n-2}}{\varepsilon} \int_{E_t} v^2(t, x') dx' + C(n) f^2(t) \frac{\sigma_{n-2}^2}{\varepsilon^2} \int_{S_t} |\nabla v(t, x')|^2 dx'.$$

Соединяя это с (33), устанавливаем, что

$$\int_{S_t} v^2(t, x') dx' \leq C(n) f^2(t) \frac{\sigma_{n-2}^2}{\varepsilon^2} \int_{S_t} |\nabla v(t, x')|^2 dx'. \tag{34}$$

Запишем теперь неравенство (26) в виде

$$\int_{z_N}^{z_{N+1}} v^2(t, x') dt \leq \frac{2(z_{N+1} - z_N)}{Pr(N)} \int_{Pr(N)} v^2(t, x') dt + 4(z_{N+1} - z_N)^2 \int_{z_N}^{z_{N+1}} v_t^2(t, x') dt.$$

Интегрируя последнее по $x' \in B(N) = \{|x'| < f(t_N)\}$, учитывая (31) и применяя (30), (34), нетрудно установить, что

$$\int_{[z_N, z_{N+1}] \times B(N)} v^2(x) dx \leq \frac{C(n) w^4 f^2(t_N)}{\delta \varepsilon^2} \int_{\omega_1^N} |\nabla v|^2 dx + 4(z_{N+1} - z_N)^2 \int_{\omega_1^N} v_t^2 dx, \tag{35}$$

где $\omega_1^N = \Omega(z_N, z_{N+1})$.

Применим неравенство (27) на этот раз для S_t и $\widetilde{E_t} = \{(t,x') \in S_t | x' \in B(N)\}$ и учтем (30):

$$\int\limits_{S_t} v^2(t,x')dx' \le 2F \int\limits_{\widetilde{E_t}} v^2(t,x')dx' + C(n)F^2 w^2 f^2(t_N) \int\limits_{S_t} |\nabla v(t,x')|^2 dx'.$$

После интегрирования по t и применения неравенства (35) будем иметь

$$\int\limits_{\omega_1^N} v^2 dx \le \left(\frac{C(n) f^2(t_N)}{\delta \varepsilon^4} + (z_{N+1} - z_N)^2 \right) F \int\limits_{\omega_1^N} |\nabla v|^2 dx.$$

Ввиду неравенства (29) отсюда следует оценка

$$\theta \le (z_{N+1} - z_N)^2 \lambda^N$$

с некоторым числом $\theta > 0$.

Замечание. Ввиду (29), отсюда следует оценка

$$\widetilde{\theta} \le (z_{N+1} - z_N)^2 \lambda(z_N, z), \ \ z \in [z_{N+1}, z_{N+2}]. \tag{36}$$

Установим еще оценку для функции $\lambda(z)$. Нетрудно проверить справедливость неравенства

$$\lambda(z) \ge \min\{\lambda(z_0), \lambda^0, ..., \lambda^{N-1}, \lambda(z_N, z)\}.$$

Пользуясь (36), учитывая неравенства (29),(30), находим, что

$$\lambda(z) \ge \min\{\lambda(z_0), \theta f^{-2}(t) | t \in [z_0, z]\}.$$

Отсюда, пользуясь (14), выводим при достаточно малом $c > 0$ также оценку

$$\lambda(z) \ge c(\min_{[z/2,z]} f)^{-2}, \ \ z \ge D. \tag{37}$$

Отсюда несложно вывести оценки (23).

Обобщенным решением уравнения

$$L^2 u = \Phi, \quad \Phi \in \left(H_\sigma^2\right)^* \tag{38}$$

назовем функцию $u \in H^2_{\sigma,lc}$, удовлетворяющую тождеству

$$\int\limits_\Omega L u L^* v dx = \Phi(v), \ \ \text{где} \ \ L^* = L_0 - L_1 - d, \ L_1 = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{39}$$

при любой пробной функции $v \in H^2_\sigma$ с ограниченным носителем. Нетрудно проверить, что гладкие решения тождества (39) удовлетворяют краевым условиям (3) и

$$Lu\big|_{x\in\Gamma_1} = 0, \quad \left[\frac{\partial Lu}{\partial n} + \left(\sum_{i=1}^n b_i n_i + \sigma(x) \right) Lu \right]\Bigg|_{x\in\Gamma_2} = 0. \tag{40}$$

Таким образом, "настоящий"квадрат оператора L в (38) получается лишь при $\sum\limits_{i=1}^n b_i n_i = 0$.

При подстановке в (39) пробных функций вида $v = \xi u$ необходимо обеспечить требование $\dfrac{d\xi}{dn} = 0$ на Γ_2. Поэтому, при непустом множестве Γ_2, будем требовать $L_0 u = \Delta u$ и выбирать ξ с линиями уровня, ортогональными к $\partial\Omega$. Мы полагаем $\xi = \xi(g(x))$, где линии уровня функции g ортогональны к $\partial\Omega$. Докажем это.

Легко видеть, что семейство линий $y = cf(t)$ на плоскости (t, y) суть интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = yf'(t)/f(t)$. Тогда линии уровня решения задачи

Коши $yf'(t)g_t = f(t)g_y$, $g(t,0) = t$, ортогональны этому семейству. Функция $g(t,y)$ будет дифференцируема по крайней мере столько раз, сколько дифференцируема функция f'/f. Легко видеть, что функция g из введения, определенная равенством $g(x) = g(x_1, |x'|)$, удовлетворяет соотношениям

$$g(x) = \begin{cases} h^{-1}\left(\dfrac{|x'|^2}{2} + h(x_1)\right) & \text{при } f'(x_1) \neq 0, \\ x_1 & \text{при } f'(x_1) = 0, \end{cases}$$

где функция h определяется равенством $h' = \dfrac{f}{f'}$, с точностью до постоянной, которая выбирается произвольно в каждом интервале монотонности функции f; h^{-1} — обратная функция к h.

В дальнейшем понадобятся оценки производных функции g в тех точках области Ω, где $f(x_1) \neq 0$. Из соображений непрерывности они будут справедливыми всюду в Ω. Дифференцируя равенство

$$h(g) = \frac{|x'|^2}{2} + h(x_1),$$

находим, что

$$h'(g)\nabla g = (h'(x_1),\ x') = \left(\frac{f(x_1)}{f'(x_1)},\ x'\right). \tag{41}$$

Выведем отсюда оценку (при $|x'| < f(x_1)$)

$$|\nabla g| = \left|\left(\frac{h'(x_1)}{h'(g)}, \frac{x'f'(g)}{f(g)}\right)\right| \leq F, \quad g \geq D, \tag{42}$$

в которой постоянная F, вообще говоря, иная, чем в (15). Заметим, что если $f'(x_1) > 0$, то $g(x) > x_1$ и $(x_1, g(x))$ — интервал возрастания f, так что $f(x_1) \leq f(g(x))$. Аналогично, если $f'(x_1) < 0$, то $g(x) < x_1$ и $(g(x), x_1)$ — интервал убывания f, поэтому $f(x_1) \leq f(g(x))$. Далее,

$$h'(x_1) = h'(g) - h''(\theta)(g - x_1).$$

Приращение $(g - x_1)$ оценим так:

$$f^2(x_1)/2 > |x'|^2/2 = h(g) - h(x_1) = h'(\widehat{\theta})(g - x_1).$$

Таким образом, нужная оценка следует из (15),(16):

$$\left|\frac{h'(x_1)}{h'(g)}\right| \leq 1 + \left|\frac{h''(\theta)f^2(x_1)}{2h'(g)h'(\widehat{\theta})}\right| \leq F.$$

Отметим, что обратное отношение также ограничено:

$$\left|\frac{h'(g)}{h'(x_1)}\right| \leq 1 + \left|\frac{h''(\theta)f^2(x_1)}{2h'(x_1)h'(\widehat{\theta})}\right| \leq F.$$

Повторное дифференцирование равенства (41) приводит к соотношению

$$h''(g)\nabla g \otimes \nabla g + h'(g)\nabla^2 g = \operatorname{diag}(h''(x_1), 1, \ldots, 1).$$

При помощи (15), (16) получаем оценку

$$\|\nabla^2 g\| \leq \frac{F}{f(g)}, \quad g \geq D. \tag{43}$$

Аналогично, при $f \in C^3(0,\infty)$, ограничение (20) влечет оценку $|h'''(r)| \leq \frac{F}{|h'(r)|}$, $r \geq D$, из которой выводим, что

$$\|\nabla^3 g\| \leq \frac{F}{|h'(g)|^2} \leq \frac{F}{f^2(g)}, \quad g \geq D. \tag{44}$$

Для функций $v \in C_0^\infty(R^n \setminus (\Gamma_1 \cup \Omega_r^\infty))$ из (11) следует неравенство

$$\lambda(r) \int\limits_{\Omega(r)} v^2 dx \leq \int\limits_{\Omega(r)} |\nabla v|^2 dx. \tag{45}$$

Далее, если $v \in H_\sigma^2$, то

$$\gamma \int\limits_{\Omega(r)} |\nabla v|^2 dx \leq \int\limits_{\Omega(r)} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} dx = \int\limits_{\partial\Omega(r)} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i} n_j v dS - \int\limits_{\Omega(r)} v L_0 v dx =$$

$$= -\int\limits_{\Gamma_2} \sigma v^2 dS - \int\limits_{\Omega(r)} v L_0 v dx \leq \int\limits_{\Omega(r)} \left(\frac{(L_0 v)^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon v^2}{2} \right) dx.$$

Выбирая $\varepsilon = \gamma\lambda(r)$ и пользуясь (45), устанавливаем, что

$$\gamma^2 \lambda^2(r) \int\limits_{\Omega(r)} v^2 dx \leq \gamma^2 \lambda(r) \int\limits_{\Omega(r)} |\nabla v|^2 dx \leq \int\limits_{\Omega(r)} (L_0 v)^2 dx. \tag{46}$$

Полезно также промежуточное неравенство

$$\gamma \int\limits_{\Omega(r)} |\nabla v|^2 dx \leq -\int\limits_{\Omega(r)} v L_0 v dx. \tag{47}$$

Перейдем к построению срезающей функции, используемой при доказательстве теорем 1, 2. Пусть $\eta(t)$ — гладкая монотонная функция, равная нулю при $t < 0$ и единице при $t > 1$, такая, что $\eta' \leq 2$, $|\eta''| \leq 8$, $|\eta'''| \leq 32$. Пусть $\nu \in (7/8, 1)$ и $\beta = 1 - \nu$. Определим функцию $\alpha(t,r)$ при $r > 0$ равенством

$$\alpha(t,r) = \delta\eta\left(\frac{t - r/2}{\beta r}\right)\eta\left(\frac{\nu r - t}{\beta r}\right).$$

Отметим, что при фиксированном r носитель функции α лежит в отрезке $[r/2, \nu r]$. Положим

$$\xi(t,r) = \exp\left(-\int\limits_0^t \alpha(\tau,r) d\tau\right)\eta\left(\frac{r-t}{\beta r}\right).$$

Легко видеть, что

$$|\alpha| \leq \delta, \quad |\alpha_t| \leq \frac{2\delta}{\beta r}, \quad |\alpha_{tt}| \leq \frac{8\delta}{\beta^2 r^2}. \tag{48}$$

Кроме того, $\xi_t = -\alpha\xi$ при $t \leq \nu r$, $\xi = 0$ при $t \geq r$ и

$$|D_t^i \xi| \leq \left(\frac{4}{\beta r}\right)^i \exp\left(-\frac{\delta r}{8}\right), \quad i = 0,1,2,3, \quad t \geq \nu r. \tag{49}$$

Оценим теперь производные функции $\xi(g(x);r)$ при $r \geq D$. Очевидно, что $\nabla\xi = \xi_t \nabla g = -\alpha\xi\nabla g$ при $g(x) \leq \nu r$. Поэтому из (42) и (48) следует неравенство

$$|\nabla\xi| \leq F\delta\xi, \quad \text{при } g(x) \leq \nu r. \tag{50}$$

При помощи (42), (49) находим также, что

$$|\nabla\xi| \le \frac{C}{\beta r}\exp(-\frac{\delta r}{8}), \quad \text{при } \ g(x) \ge \nu r. \tag{51}$$

Далее, пользуясь (48), (43), (42), выводим оценку

$$\|\nabla^2\xi\| = \|\xi_t\nabla^2 g + \xi_{tt}\nabla g\otimes\nabla g\| = \xi\| - \alpha\nabla^2 g + (\alpha^2 - \alpha_t)\nabla g\otimes\nabla g\| \le$$
$$\le C\left(\frac{\varepsilon_g F\delta}{m(r)} + \delta^2 + \frac{\delta}{\beta r}\right)\xi, \quad \text{при } \ g(x)\le\nu r, \quad m(r) = \min_{[r/2,r]} f,$$

в которой $\varepsilon_g = 0$ при $g = |x|$ и единице в ином случае. Мы будем выбирать $\delta \ge \dfrac{1}{\beta r}$, поэтому

$$\|\nabla^2\xi\| \le F(\frac{\varepsilon_g\delta}{m(r)} + \delta^2)\xi, \quad g\le\nu r. \tag{52}$$

При $g(x)\ge\nu r$, благодаря (14),(49) и (42), имеем оценку

$$\|\nabla^2\xi\| \le F\left(\frac{\varepsilon_g}{\beta r f(r)} + (\beta r f(r))^{-2}\right)\exp\left(-\frac{\delta r}{8}\right). \tag{53}$$

Аналогично, пользуясь (44), устанавливаем оценки

$$\|\nabla^3\xi\| \le F\left(\frac{\varepsilon_g}{\beta r f^2(r)} + (\beta r f(r))^{-3}\right)\exp\left(-\frac{\delta r}{8}\right), \quad g(x)\ge\nu r, \tag{54}$$

$$\|\nabla^3\xi\| \le F\left(\frac{\varepsilon_g\delta}{f^2(r)} + \delta^3\right)\xi, \quad g\le\nu r. \tag{55}$$

3. Доказательство теорем 1, 2

Введем обозначения $w = \xi u$, $K^*u = [L^*,\xi]u = L^*w - \xi L^*u$, $Ku = [L,\xi]u$, χ — характеристическая функция множества $\Omega(\nu r)$. Тогда

$$Lu\cdot L^*\xi^2u = Lu\cdot(\xi L^*w + K^*w) = \xi Lu\cdot(L^*w + \xi^{-1}(\chi + 1 - \chi)K^*w) =$$
$$= (Lw - Ku)\cdot(L^*w + \xi^{-1}\chi K^*w) + (1-\chi)Lu\cdot K^*w =$$
$$= Lw\cdot L^*w + (Lw - Ku)\cdot\xi^{-1}\chi K^*w - \chi Ku\cdot L^*w -$$
$$-(1-\chi)(Ku\cdot L^*w - Lu\cdot K^*w).$$

Пусть $\Phi(v) = 0$ для функций $v\in H^2_\sigma$, $\ \operatorname{supp} v\subset\Omega(r)$. Подставив в (39) пробную функцию $v = \xi^2(g(x), r)u$, получим

$$\int\limits_{\Omega(r)} \left[(L_0w)^2 - 2d\,w\,L_0w + (d\,w)^2\right]dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega(r)} \left\{(L_1w)^2 - (Lw - Ku)\cdot\xi^{-1}\chi K^*w + \chi Ku\cdot L^*w\right\}dx + I, \tag{56}$$

$$I = \int\limits_{\Omega^r_{\nu r}} (Ku\cdot L^*w - Lu\cdot K^*w)dx.$$

Очевидны оценки

$$|-(Lw - Ku)\cdot\xi^{-1}\chi K^*w + \chi Ku\cdot L^*w| \le$$
$$\le \frac{\varepsilon|Lw|^2}{2} + \frac{\varepsilon|L^*w|^2}{2} + \frac{\chi}{\varepsilon}(|Ku|^2 + \xi^{-2}|K^*w|^2) \le$$
$$\le 3\varepsilon(|L_0w|^2 + |L_1w|^2 + |dw|^2) + \frac{\chi}{\varepsilon}(|Ku|^2 + \xi^{-2}|K^*w|^2).$$

Воспользовавшись неравенствами (47) и (9), имеем

$$\int\limits_{\Omega} |L_1 w|^2 dx \leq \int\limits_{\Omega} |b|^2 |\nabla w|^2 dx \leq -\frac{d}{4} \int\limits_{\Omega} w L_0 w dx.$$

Выбрав теперь $\varepsilon = 1/6$, приведем соотношение (56) к виду

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} [|L_0 w|^2 - dw L_0 w + |dw|^2] dx \leq \int\limits_{\Omega} 6\chi(|Ku|^2 + \xi^{-2}|K^* w|^2) dx + I. \tag{57}$$

Заметим, что

$$Ku = Lw - \xi Lu = uL_0\xi + uL_1\xi + 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \xi_{x_j} =$$
$$= w\xi^{-1}(L_0\xi + L_1\xi) + 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(w_{x_i}\xi^{-1}\xi_{x_j} - \xi^{-2}\xi_{x_i}\xi_{x_j} w). \tag{58}$$

Далее, $L_0\xi = \sum\limits_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\xi_{x_i x_j} + \xi_{x_i}(a_{ij})_{x_j})$. Пользуясь (50), (52), (18) и неравенством $\delta/m \leq \varepsilon\gamma/m^2 + \delta^2/(\varepsilon\gamma)$, находим, что

$$|L_0\xi| \leq \Big(\varepsilon(d + \gamma\lambda(r)) + \frac{\varepsilon_g \varepsilon\gamma c}{m^2(r)} + \frac{MF\delta^2}{\varepsilon\gamma c}\Big)\xi, \ g \leq \nu r.$$

$$|\xi^{-1} L_1 \xi| \leq |b||\xi^{-1}\nabla\xi| \leq C\sqrt{d}\delta \leq C(\mu d + \mu^{-1}\delta^2); \quad \mu < 1.$$

Поэтому при помощи (23),(9) и (18) получаем оценку

$$|\chi Ku| \leq 2\delta F|\nabla w| + \Big(2\varepsilon(d + \gamma\lambda(r)) + \frac{MF\delta^2}{\varepsilon\gamma c}\Big)|w|, \ g \leq \nu r. \tag{59}$$

Аналогичной оценке подчиняется величина

$$\chi\xi^{-1} K^* w = \xi^{-1}(L^*\xi w - \xi L w) = \xi^{-1}(wL_0\xi + wL_1\xi + 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_{x_i}\xi_{x_j}).$$

Мы будем выбирать δ так, чтобы $c^{-1}MF\delta^2 = \gamma\varepsilon^2(d + \gamma\lambda(r))$. Благодаря (12), при достаточно больших r будет выполнено неравенство $\delta \geq 1/(\beta r)$. Тогда из (59) выводим,что

$$|\chi Ku|^2 \leq \varepsilon^2\gamma(d + \gamma\lambda(r))|\nabla w|^2 + 36\varepsilon^2(d^2 + \gamma^2\lambda(r)^2)w^2.$$

Выбирая $\varepsilon = 1/36$, при помощи (46) и (47) приводим (57) к виду

$$\frac{1}{4} \int\limits_{\Omega} [|L_0 w|^2 + |dw|^2] dx \leq I.$$

Преобразуем интеграл I, пользуясь формулами

$$K^* w = \xi K u + 2u \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_{x_i}\xi_{x_j}, \quad L^* w = \xi L^* u + Ku - 2uL_1\xi.$$

Имеем

$$KuL^*w - LuK^*w = -2uLu\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_{x_i}\xi_{x_j} + Ku(Ku - 2L_1(\xi u)).$$

Теперь, действуя, как при выводе (59), нетрудно получить оценки

$$|Ku| \le \left(C/(\beta r)|\nabla w| + |u|\Big(\frac{\varepsilon_g F}{f^2(r)} + (d + \gamma\lambda(r)) + \frac{C}{\beta^2 r^2}\Big)\right)\exp\left(-\frac{\delta r}{8}\right),$$

$$|I| \le C \int\limits_{\Omega^r_{\nu r}} \exp\left(-\frac{\delta r}{4}\right)\left(|uLu| + u^2 + |\nabla u|^2\right)dx.$$

Теорема 1 доказана.

Уравнение

$$L^3 u = \Phi, \quad \Phi \in \left(H^3_\Delta\right)^*, \quad L = \Delta + L_1 - d \tag{60}$$

будем рассматривать только в областях вида (10), определяемых функцией $f \in C^3[0,\infty)$.

Для функций $v \in H^3_\Delta$, с ограниченным носителем supp $v \subset \overline{\Omega}(r)$ будет использоваться неравенство

$$\int\limits_\Omega |\Delta v|^2 dx \le c^{-1} m^2(r) \int\limits_\Omega |\nabla \Delta v|^2 dx, \tag{61}$$

являющееся следствием (45) и (37).

В случае области с отрицательной средней кривизной границы справедливо также неравенство

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v^2_{x_i x_j} dx \le \int\limits_\Omega |\Delta v|^2 dx. \tag{62}$$

Обобщенным решением уравнения (60) назовем функцию $u \in H^3_{\Delta,lc}$, удовлетворяющую тождеству

$$\int\limits_\Omega \left\{\nabla Lu \cdot \nabla L^* v + [(L_1 - d)Lu]\cdot L^* v\right\} dx = \Phi(v) \tag{63}$$

при любой функции $v \in H^3_\triangle$ с ограниченным носителем.

Предположим, что $\Phi(v) = 0$ при всех v с носителем, лежащим в $\overline{\Omega(r)}$. Подставим в (63) пробную функцию $v = \xi^2 u$. Для обоснования законности такой подстановки следует убедиться, что Lv имеет нулевой след на $\partial\Omega$. Для этого достаточно, чтобы $\Delta v = \xi^2 \Delta u + u\Delta\xi^2 + 2\xi\nabla u \nabla\xi = 0$ на $\partial\Omega$. Последнее обеспечивается ортогональностью линий уровня функции $g(x)$ к $\partial\Omega$, поскольку $\partial\Omega$ лежит на поверхности уровня функции u. Введем обозначения $w = \xi u$, $K^* u = [L^*, \xi]u = L^* w - \xi L^* u$, $Hu = [(L_1 - d)L, \xi]u$, $G^* u = [\nabla L^*, \xi]u$, $Gu = [\nabla L, \xi]u$.

Тогда

$$\begin{gathered}\nabla Lu \cdot \nabla L^* \xi^2 u = \nabla Lu \cdot (\xi \nabla L^* w + G^* w) = \xi \nabla Lu \cdot (\nabla L^* w + \xi^{-1}(\chi + 1 - \chi) G^* w) = \\ = (\nabla Lw - Gu)\cdot(\nabla L^* w + \xi^{-1}\chi G^* w) + (1-\chi)\nabla Lu \cdot G^* w = \\ = \nabla Lw \cdot \nabla L^* w + (\nabla Lw - Gu)\cdot \xi^{-1}\chi G^* w - \chi Gu \cdot \nabla L^* w - \\ -(1-\chi)(Gu \cdot \nabla L^* w - \nabla Lu \cdot G^* w).\end{gathered}$$

Аналогично,

$$\begin{gathered}\big((L_1 - d)Lu\big)\cdot L^*\xi^2 u = \big((L_1 - d)Lu\big)\cdot(\xi L^* w + K^* w) = \\ = \big((L_1 - d)Lw - Hu\big)\cdot(L^* w + \xi^{-1}\chi K^* w) + \\ +(1-\chi)\big((L_1 - d)Lu\big)\cdot K^* w = (L_1 - d)Lw \cdot L^* w + \\ +\big((L_1 - d)Lw - Hu\big)\cdot \xi^{-1}\chi K^* w - \chi Hu \cdot L^* w + \\ +(1-\chi)\Big(\big((L_1 - d)Lu\big)\cdot K^* w - Hu \cdot L^* w\Big).\end{gathered}$$

В левой части тождества (63) оставим слагаемые $\nabla Lw \cdot \nabla L^* w$ и $dLw \cdot L^* w$, а все остальные слагаемые перенесем вправо и оценим сверху. При оценке выражения $L_1 Lw \cdot L^* w$ будем использовать неравенство $ab \le a^2/6 + 3b^2/2$ для слагаемых с множителем $L_1 \Delta w = b \cdot \nabla \Delta w$ и неравенство $ab \le a^2/2 + b^2/2$ для остальных слагаемых. Получим

$$\int\limits_{\Omega} \bigl\{ |\nabla \Delta w|^2 + |d\nabla w|^2 - 2d\nabla w \nabla \Delta w - |\nabla L_1 w|^2 +$$

$$+ d(|\Delta w|^2 + (dw)^2 - 2dw\Delta w - (L_1 w)^2) \bigr\} dx \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega} \bigl\{ \frac{1}{2} |\nabla \Delta w|^2 + \frac{3}{2} |\nabla L_1 w|^2 + \frac{3}{2} |d\nabla w|^2 + \frac{5}{2} |b|^2 (|\Delta w|^2 + |L_1 w|^2 + |dw|^2) \bigr\} dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \chi \bigl\{ |Gu \cdot \nabla L^* w| + |\xi^{-1} G^* w \cdot \nabla Lw| + \frac{1}{2} (\xi^{-1} G^* w)^2 + \frac{1}{2} (Gu)^2 +$$

$$+ |Hu \cdot L^* w| + |\xi^{-1} K^* w \cdot (L_1 - d) Lw| + \frac{d}{2} (\xi^{-1} K^* w)^2 + \frac{1}{2d} (Hu)^2 \bigr\} dx + J, \qquad (64)$$

где

$$J = \int\limits_{\Omega^r_{\nu r}} \bigl\{ |Gu \cdot \nabla L^* w - G^* w \cdot \nabla Lu| + |K^* w \cdot (L_1 - d) Lu - Hu \cdot L^* w| \bigr\} dx.$$

Докажем, что Gu при $x \in \Omega^{\nu r}_{r/2}$ приводится к виду $A(w)$, где

$$A(w) = \sum_{i,j=1}^n \delta B_{ij}(x) w_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n (\mu M + \mu^{-1} \delta^2) B_i(x) w_{x_i} + \delta(M + \delta^2) B(x) w, \ \mu < 1, \qquad (65)$$

$M = \max(d, m^{-2}(r))$.

Далее, большой буквой B с индексами или без, будем обозначать скалярные или вектор-функции, ограниченные в Ω постоянной, зависящей только от F. Для доказательства соотношения (65) прямыми вычислениями найдем, что

$$[d\nabla, \xi] u = du \nabla \xi, \quad [\nabla L_1, \xi] u = L_1 u \cdot \nabla \xi + \nabla (u L_1 \xi),$$

$$[\nabla \Delta, \xi] w = \Delta u \cdot \nabla \xi + \nabla (u \Delta \xi) + 2\nabla (\nabla u \cdot \nabla \xi).$$

Покажем, как оцениваются отдельные слагаемые, входящие в Gu. При помощи (50) получаем оценку

$$|du \nabla \xi| = |dw \xi^{-1} \nabla \xi| \le |F d\delta w| \le C\delta M w.$$

Далее, используя (21), (50) и (52), оценим, например, слагаемое

$$\nabla (u L_1 \xi) = \nabla (w \xi^{-1} L_1 \xi) = \xi^{-1} L_1 \xi \nabla w + w \nabla (\xi^{-1} L_1 \xi);$$

$$|\nabla \xi^{-1} L_1 \xi| \le |\xi^{-2} \nabla \xi| \cdot |b| \cdot |\nabla \xi| + \|\xi^{-1} |b| \nabla^2 \xi\| + \xi^{-1} \|\nabla b\| \cdot |\nabla \xi| \le$$

$$\le C(\sqrt{d} \delta^2 + \sqrt{d} (\delta^2 + \frac{\delta}{m(r)}) + d\delta) \le 3C\delta(M + \delta^2).$$

Оценивая аналогичным образом остальные слагаемые, устанавливаем (65). Точно также устанавливается соотношение $\xi^{-1} G^* w = A^* w$, где A^* имеет вид (65). Нетрудно установить, что $\sqrt{d} \xi^{-1} K^* w = A^k w$, где A^k имеет вид (65) с $B_{ij} = 0$. Далее, $d^{-\frac{1}{2}} Hu = -\sqrt{d} [L, \xi] u + d^{-\frac{1}{2}} b \cdot Gu$, поэтому, ввиду (21), $d^{-\frac{1}{2}} Hu$ также имеет вид (65). Таким образом,

$$\frac{\chi}{2} \bigl((\xi^{-1} G^* w)^2 + (Gu)^2 + d(\xi^{-1} K^* w)^2 + d^{-1} (Hu)^2 \bigr) \le$$

$$\le C \bigl(\delta^2 \|\nabla^2 w\|^2 + (\mu^2 M^2 + \mu^{-2} \delta^4) |\nabla w|^2 + \delta^2 (M^2 + \delta^4) w^2 \bigr).$$

Покажем, как оцениваются другие слагаемые правой части (64),

$$|Gu\nabla L^*w| \le \frac{\varepsilon}{2}(|\nabla\Delta w|^2 + |\nabla L_1 w|^2 + |d\nabla w|^2) + \frac{3}{2\varepsilon}(Gu)^2.$$

Далее,

$$|Hu \cdot L^*w| = |d^{-\frac{1}{2}}Hu \cdot d^{\frac{1}{2}}L^*w| \le \frac{\varepsilon d}{2}(|\Delta w|^2 + |L_1 w|^2 + d^2w^2) + \frac{3}{2\varepsilon d}(Hu)^2.$$

Точно так же, имеем

$$|\xi^{-1}K^*w \cdot (L_1 - d)Lw| = |d^{\frac{1}{2}}\xi^{-1}K^*w \cdot d^{-\frac{1}{2}}(L_1 - d)Lw| =$$

$$= \left| d^{-\frac{1}{2}}\xi^{-1}K^*w \left(\frac{b \cdot \nabla Lw}{\sqrt{d}} - d^{\frac{1}{2}}Lw \right) \right| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2}\big(|\nabla\Delta w|^2 + |\nabla L_1 w|^2 + |d\nabla w|^2 + d(|\Delta w|^2 + |L_1 w|^2 + d^2w^2)\big) + \frac{3}{\varepsilon d}(\xi^{-1}K^*w)^2.$$

Заметим еще, что

$$-2d\int\limits_\Omega \{\nabla w \cdot \nabla\Delta w + dw\Delta w\}dx = 2d\int\limits_\Omega \{|\Delta w|^2 + d|\nabla w|^2\}dx.$$

Наконец, при помощи (62), (9), (21) устанавливаем, что

$$\int\limits_\Omega |\nabla L_1 w|^2 dx \le 2\int\limits_\Omega \{|b|^2\|\nabla^2 w\|^2 + \|\nabla b\|^2|\nabla w|^2\}dx \le$$

$$\le \frac{1}{4}\int\limits_\Omega \{d|\Delta w|^2 + d^2|\nabla w|^2\}dx.$$

Выбирая $\varepsilon = \dfrac{1}{6}$, приводим (64) к виду

$$I = \int\limits_\Omega \{|\nabla\Delta w|^2 + d|\Delta w|^2 + d^2|\nabla w|^2 + d^3w^2\}dx \le$$

$$\le C\int\limits_\Omega \{\delta^2\|\nabla^2 w\|^2 + (\mu^2 d^2 + \mu^{-2}\delta^4)|\nabla w|^2 + \delta^2(d^2 + \delta^4)w^2\}dx + CJ. \tag{66}$$

Выбираем μ и δ так, чтобы $C\delta^2 = \dfrac{M}{8}$, $C\mu^2 = \dfrac{1}{4}$. Если $M = d$, то из (66) с учетом (62), получаем $I \le 2CJ$. Если $M = m^{-2}(r)$, то, пользуясь неравенствами (46), получаем такое же соотношение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлов В.П. *О первой краевой задаче для одного класса гипоэллиптических уравнений* // Матем. сб. Т. 63(105). №2. 1964. С. 11–51.
2. Михайлов В.П. *Первая краевая задача для некоторых полуограниченных гипоэллиптических уравнений* // Матем. сб. Т. 64(106). № 1. 1964. С. 11–51.
3. E. Phragmen, E. Lindelof // Acta math. V. 31. 1908. P. 381–406.
4. Ландис Е.М., Панасенко Г.П. *Об одном варианте теоремы Фрагмена-Линделефа для эллиптических уравнений с коэффициентами, периодическими по всем переменным, кроме одной* // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 5. 1979. С. 105–136.
5. R.A. Toupin *Saint-Venant's principle* // Arch. Rat. Mech. Anal. V.18. 1965. P. 83–96.
6. J.K. Knowles *On Saint-Venant's principle in the two-dimensional linear theory of elasticity* //Arch. Rat. Mech. Anal. V. 21. 1966. P.1–22.

7. Кондратьев В.А., Копачек И., Ленвеншвим Д.М., Олейник О.А. *Неулучшаемые оценки в пространствах Гельдера и точный принцип Сен-Венана для решения бигармонического уравнения* // Тр. Мат. института СССР. Т. 166. 1984. С. 91–106.
8. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *О принципе Сен-Венана в плоской теории упругости* // Докл. АН СССР. Т. 239. № 3. 1978. С. 530–533.
9. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *Принцип Сен-Венана в плоской теории упругости и краевые задачи для бигармонического уравнения в неоганиченной области* // Сиб. мат. жур. 19. № 5. 1978. С. 1154–1165.
10. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *Энергетические оценки обобщенных решений краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка и их приложения* // ДАН СССР. Т. 232. № 6. 1977. С. 1257–1260.
11. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *Об устранимых особенностях на границе и единственности решений краевых задач для эллиптических и параболических уравнений второго порядка* // Функциональный анализ и его приложения. Вып. 3. 1977. С. 54–67.
12. Кондратьев В.А., Олейник О.А. *Теорема единственности решений внешних краевых задач и аналог принципа Сен-Венана* // УМН. Т. 39. № 4. 1984. С. 165–166.
13. Кондратьев В.А., Олейник О.А. *О единственности решений краевых задач в неограниченных областях и об изолированных особых точках решений системы теории упругости и эллиптических уравнений второго порядка* // УМН. Т. 42. № 4. 1987. С. 189–190.
14. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука. 1973. 576 с.
15. Кожевникова Л.М. *О существовании и единственности решений задачи Дирихле для псевдодифференциальных эллиптических уравнений в областях с некомпактными границами* // Уфимский матем. ж. Том 1. № 1. 2009. С. 38–68.
16. *Герфанов А.Р., Мукминов Ф.Х.* Широкий класс единственности решения для неравномерно эллиптического уравнения в неограниченной области // Уфимский матем. ж. Том 1. № 3. 2009. С. 11–27.
17. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука. 1983. 424 с.
18. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука. 1971. 512 с.
19. Кожевникова Л.М. *Анизотропные классы единственности решения задачи Дирихле для квазиэллиптических уравнений* // Изв. РАН. Т. 70. № 6. 2006 С. 93–128.
20. Шишков А.Е. *Принцип Фрагмена-Линделефа для квазилинейных дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка* // Успехи мат. наук Т. 43. № 4. 1988. С. 231–232.
21. Биккулов И.М., Мукминов Ф.Х. *О стабилизации нормы решения одной смешанной задачи для параболических уравнений 4-го и 6-го порядков в неограниченной области* // Матем. сб. Т. 195. № 3. 2004. С. 115–142.

Ильгиз Мидехатович Биккулов,
Стерлитамакская государственная педагогическая академия,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: im_radosti@rambler.ru

Фарит Хамзаевич Мукминов,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул.Карла Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: mfkh@rambler.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 1 (2010). С. 52-58.

УДК 517.5

ОБОБЩЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ФОКА

А.М. ДИЛЬМУХАМЕТОВА, А.У. МУЛЛАБАЕВА, В.В. НАПАЛКОВ

Аннотация. В данной статье введены обобщённые пространства Фока и рассмотрены основные свойства этих пространств. Найдена операция, сопряженная к операции умножения на переменную z в обобщенном пространстве Фока. Также определены собственные функции сопряженного оператора. Изучены обобщенное преобразование Лапласа и задача построения базиса для введенных пространств.

Ключевые слова: Пространство Фока, сопряженный оператор, преобразование Лапласа, базис пространства, порядок и тип целых функций, оператор обобщенного дифференцирования.

1. Введение

В математической физике важную роль играет пространство Фока, введенное в 1932 году (см. [1]). Обозначим через $H(\mathbb{C})$ пространство целых функций с топологией компактной сходимости. По определению пространство Фока в одномерном случае имеет вид:

$$F = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} d\mu < \infty \right\},$$

где $d\mu$ — мера Лебега на плоскости.

Известно, что пространство F обладает следующими свойствами
(см., например, [2], [3]):

1. Преобразование Лапласа переводит элементы из F в F :
$$f \to \hat{f}(\lambda) = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} \overline{f(z)} e^{\lambda z} e^{-|z|^2} d\mu = \overline{f(\overline{\lambda})} \in F;$$
2. Оператор дифференцирования является сопряженным к оператору умножения на переменную z.

Эти свойства лежат в основе приложений пространства Фока к задачам физики.

В данной статье введены обобщённые пространства Фока F в одномерном случае и рассмотрены основные свойства этих пространств. В пространстве F найден оператор, сопряженный к оператору умножения на переменную z. Определены собственные функции сопряженного оператора. Также изучено обобщенное преобразование Лапласа и построен базис для введенных пространств.

2. Оператор обобщенного дифференцирования

В дальнейшем нам понадобится оператор обобщенного дифференцирования. Возьмем последовательность комплексных чисел $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ таких, что $m_0 = 0$, $m_n \neq 0$ при $n \geq 1$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|m_n|} < \infty$. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H(\mathbb{C}).$$

A.M. Dilmukhametova, A.U. Mullabaeva, V.V. Napalkov, Generalized Fock space.

Поступила 18 февраля 2010 г.

Оператором обобщенного дифференцирования, порожденным последовательностью $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$, назовем оператор D, который действует по правилу

$$Df = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} a_n m_n z^n.$$

Этот оператор связан с оператором Гельфонда-Леонтьева [4] и произведением Адамара [5]. В силу условий на $\{m_n\}$ оператор D будет действовать из $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$ линейно и непрерывно.

Собственные функции оператора обобщенного дифференцирования, соответствующие собственным числам λ, имеют вид

$$y(z) = c\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n z^n}{m_1 ... m_n}\right),$$

где c — произвольное комплексное число.

При дополнительном условии $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|m_1| \dots |m_n|} = \infty$ собственные функции оператора D являются целыми.

Теорема 1. *Если выполнено условие* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|m_n|}{Bn^p} = 1$, *где B=const>0, то собственные функции оператора обобщенного дифференцирования D целые и имеют порядок* $\rho = \frac{1}{p}$, *тип* $\sigma = \frac{p}{B^{\frac{1}{p}}}$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|m_n|}{Bn^p} = 1$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N, начиная с которого будут выполняться оценки:

$$n^p(B-\varepsilon) \leqslant |m_n| \leqslant n^p(B+\varepsilon) \text{ для всех } n \geq N.$$

Рассмотрим функцию

$$y_{1,\varepsilon}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda^n z^n}{m_1 ... m_n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\lambda^n z^n}{m_1 ... m_N (B+\varepsilon)^{n-N} \frac{(n!)^p}{(N!)^p}}.$$

Поскольку

$$\left|\frac{\lambda^n}{m_1 ... m_N (B+\varepsilon)^{n-N} \frac{(n!)^p}{(N!)^p}}\right| < \left|\frac{\lambda^n}{m_1 ... m_N m_{N+1} ... m_n}\right| \forall n : n > N,$$

то порядки соответствующих функций удовлетворяют неравенству:
$\rho_1 \leqslant \rho$, где ρ — порядок собственной функции, а ρ_1 — порядок рассматриваемой.

Посчитаем порядок $y_{1,\varepsilon}(z)$ по формуле (см. [6]):

$$\rho_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \ln n}{\ln\left|m_1 ... m_N (B+\varepsilon)^{n-N} \frac{(n!)^p}{(N!)^p}\right|} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \ln n}{\ln \frac{m_1 ... m_N}{(N!)^p} + (n-N)\ln(B+\varepsilon) + pn \ln\left(\frac{n}{e} \sqrt[2n]{2\pi n}\right)} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\frac{L}{n} + \ln(B+\varepsilon) - p + p\ln n + p \ln \sqrt[2n]{2\pi n}} = \frac{1}{p},$$

где $L = \ln \frac{m_1 ... m_N}{(N!)^p} - N \ln(B+\varepsilon)$.

Аналогично можно подсчитать порядок функции

$$y_{2,\varepsilon}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda^n z^n}{m_1 ... m_n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\lambda^n z^n}{m_1 ... m_N (B-\varepsilon)^{n-N} \frac{(n!)^p}{(N!)^p}}.$$

Так как $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$, а $\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{p}$, то $\rho = \frac{1}{p}$.

Посчитаем тип функции $y_{1,\varepsilon}(z)$:

$$\left(\sigma_{1,\varepsilon} e\frac{1}{p}\right)^p = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^p}{\sqrt[n]{m_1...m_N(B+\varepsilon)^{n-N}\frac{(n!)^p}{(N!)^p}}} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^p}{(B+\varepsilon)\sqrt[n]{\tilde{B}\left((\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}\right)^p}},$$

$$\text{где } \tilde{B} = \frac{m_1...m_N}{(B+\varepsilon)^N(N!)^p}.$$

$$\sigma_{1,\varepsilon}{}^p = \left(\frac{p}{e}\right)^p \frac{1}{(B+\varepsilon)} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^p e^p}{n^p\sqrt[n]{\tilde{B}}\,\sqrt[2n]{2\pi n}^p}.$$

Тогда для любого ε

$$\sigma_{1,\varepsilon} \leqslant \frac{p}{\sqrt[p]{B+\varepsilon}}.$$

Точно так же можно оценить σ сверху, тогда

$$\frac{p}{\sqrt[p]{B+\varepsilon}} \leqslant \sigma \leqslant \frac{p}{\sqrt[p]{B-\varepsilon}} \text{ для любого } \varepsilon.$$

Следовательно, $\sigma = \frac{p}{\sqrt[p]{B}}$.

3. Обобщенное пространство Фока

Возьмем $\beta > 0$ и введём пространство

$$F_\beta = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|^2 = \frac{1}{\pi\frac{2}{\beta}\Gamma(\frac{2}{\beta})} \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^\beta} d\mu < \infty \right\},$$

где $d\mu$ — мера Лебега на плоскости.

Теорема 2. *Порядок функций, входящих в пространство F_β, не превосходит β, а при порядке β тип не выше $\frac{1}{2}$.*

Доказательство. Возьмем функцию $f(z)$ из F_β, её модуль — субгармоническая функция. Применим теорему о среднем для субгармонических функций (см. [7]):

$$|f(z_0)| \leqslant \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{|z-z_0|\leqslant R} |f(z)|\, d\mu, \text{ где } z_0 \neq 0 \in \mathbb{C}.$$

Подынтегральное выражение умножим и разделим на $e^{-\frac{|z|^\beta}{2}}$. Тогда

$$|f(z_0)| \leqslant \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{|z-z_0|\leqslant R} |f(z)|\, e^{-\frac{|z|^\beta}{2}} e^{\frac{|z|^\beta}{2}} d\mu.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$|f(z_0)| \leqslant \frac{1}{\pi R^2} \left(\int\limits_{|z-z_0|\leqslant R} |f(z)|^2 e^{-|z|^\beta} d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{|z-z_0|\leqslant R} e^{|z|^\beta} d\mu \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

В правой части последнего неравенства первое подкоренное выражение оценивается следующим образом:

$$\int\limits_{|z-z_0|\leqslant R} |f(z)|^2 e^{-|z|^\beta} d\mu \leqslant \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^\beta} d\mu = \|f\|^2 \pi \frac{2}{\beta}\Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right).$$

Оценим второе подкоренное выражение в правой части (1):

$$\int\limits_{|z-z_0|\leqslant R} e^{|z|^\beta} d\mu \leqslant \int\limits_{|z-z_0|\leqslant R} e^{(|z-z_0|+|z_0|)^\beta} d\mu =$$

$$= \int\limits_{|z-z_0|\leqslant R} e^{|z_0|^\beta (1+\frac{|z-z_0|}{|z_0|})^\beta} \leqslant \int\limits_{|z-z_0|\leqslant R} e^{|z_0|^\beta (1+\frac{R}{|z_0|})^\beta}.$$

$(1+\frac{R}{|z_0|})^\beta < 2^\beta$, если $R \leqslant |z_0|$. Тогда

$$|f(z_0)| \leqslant \sqrt{\pi \frac{2}{\beta}\Gamma(\frac{2}{\beta})} \frac{\|f\|}{\pi R^2} \left(\int\limits_{|z-z_0|\leqslant R} e^{|z_0|^\beta 2^\beta} d\mu \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|f\|}{\pi R^2} e^{\frac{|z_0|^\beta}{2} 2^\beta} \sqrt{\pi R^2} \sqrt{\pi \frac{2}{\beta}\Gamma(\frac{2}{\beta})} = M e^{\frac{|z_0|^\beta}{2} 2^\beta},$$

где $M = \frac{\|f\|}{R}\sqrt{\frac{2}{\beta}\Gamma(\frac{2}{\beta})}$. Отсюда видно, что порядок функций из обобщенного пространства Фока $\rho \leqslant \beta$.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $|z_0|$, что верна следующая оценка $(1+\frac{R}{|z_0|})^\beta < 1+\varepsilon$. Тогда

$$|f(z_0)| \leqslant M e^{\frac{|z_0|^\beta}{2}},$$

т.е. при порядке $\rho = \beta$ тип не превосходит $\frac{1}{2}$.

4. Сопряженный оператор к оператору умножения на переменную z

Перейдем к описанию сопряженного оператора к оператору умножения на переменную z в обобщенном пространстве Фока. Пусть A — оператор, действующий по правилу:

$$Af : f \to z \cdot f, f \in F_\beta.$$

Теорема 3. *Оператор, сопряженный к оператору умножения на переменную z, имеет вид:*

$$A^* g = A^* \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} b_n m_n z^n, \tag{2}$$

где $m_n = \frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+1))}{\Gamma(\frac{2n}{\beta})}, n \geq 1, m_0 = 0.$

Доказательство. Согласно определению сопряженного оператора

$$(Af, g) = (f, A^* g),$$

где $(f,g) = \frac{1}{\pi\frac{2}{\beta}\Gamma(\frac{2}{\beta})} \int\limits_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)} e^{-|z|^\beta} d\mu$. В пространстве Фока F сопряженным к оператору умножения на переменную z является оператор дифференцирования.

Определим в пространстве F_β оператор, сопряженный к оператору умножения на переменную z.

Возьмем две функции $f(z) = z^n$ и $g(z) = z^{n+1}, n \geq 0$. Поскольку $(z^n, z^k) = \frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+1))}{\Gamma(\frac{2}{\beta})}$ при $n = k$, то

$$(Af, g) = (zf, g) = (zz^n, z^{n+1}) = \frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+2))}{\Gamma(\frac{2}{\beta})}.$$

С другой стороны, $(Af, g) = (f, A^* g) = (z^n, A^* z^{n+1})$. Так как это не ноль, A^* должна понижать степень z на единицу

$$A^* z^{n+1} = m_{n+1} z^n.$$

Тогда, продолжая равенство, имеем

$$\frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+2))}{\Gamma(\frac{2}{\beta})} = (z^n, m_{n+1} z^n) = m_{n+1}(z^n, z^n) = m_{n+1} \frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+1))}{\Gamma(\frac{2}{\beta})}.$$

Откуда находятся числа $m_{n+1} = \frac{\Gamma(2/\beta\cdot(n+2))}{\Gamma(2/\beta\cdot(n+1))}$, при $n \geq 0$. Положим $m_0 = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Найдем A^*, при этом будем считать, что $A^*1 = 0$, тогда:

$$A^*g = A^*\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n A^* z^n = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} b_n m_n z^n. \tag{3}$$

А это и есть оператор D, порожденный последовательностью m_n. В случае $\beta = 2$ он совпадает с оператором дифференцирования.

5. Собственные функции в обобщенных пространствах Фока

Собственные функции оператора обобщенного дифференцирования(2) имеют вид (см. п. 2)

$$y(z) = c\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k z^k}{m_1 m_2 ... m_k}\right). \tag{4}$$

Используя асимптотическое представление Г-функции [8]

$$\Gamma(\alpha) \approx \sqrt{2\pi}\alpha^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{-\alpha},$$

покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|m_n|}{(\frac{2}{\beta})^{\frac{2}{\beta}}n^{\frac{2}{\beta}}} = 1:$

$$|m_n| = \frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+1))}{\Gamma(\frac{2n}{\beta})} \approx \frac{\sqrt{2\pi}(\frac{2}{\beta}(n+1))^{\frac{2}{\beta}(n+1)-\frac{1}{2}}e^{-\frac{2}{\beta}(n+1)}}{\sqrt{2\pi}(\frac{2n}{\beta})^{\frac{2n}{\beta}-\frac{1}{2}}e^{-\frac{2n}{\beta}}} \approx$$

$$\approx \left(\frac{\frac{2}{\beta}(n+1)}{\frac{2n}{\beta}}\right)^{\frac{2n}{\beta}-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\beta}(n+1)\right)^{\frac{2}{\beta}}e^{-\frac{2}{\beta}} \approx$$

$$\approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{\beta}-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\beta}(n+1)\right)^{\frac{2}{\beta}}e^{-\frac{2}{\beta}} \approx$$

$$\approx e^{2/\beta}e^{-2/\beta}(\frac{2n}{\beta}+\frac{2}{\beta})^{\frac{2}{\beta}} \approx (\frac{2}{\beta})^{\frac{2}{\beta}}n^{2/\beta}, n\to\infty.$$

Согласно теореме 1, собственные функции оператора обобщенного дифференцирования (2) являются функциями порядка $\rho = \frac{\beta}{2}$ и типа $\sigma = 1$.

Заметим, что при $\beta = \frac{2}{s}$, где s — целое положительное число:

$$m_n = \frac{\Gamma(s(n+1))}{\Gamma(sn)} = (sn+s-1)(sn+s-2)...sn = p(n),$$

здесь $p(z)$ — многочлен степени s.

Операторы обобщенного дифференцирования, порожденные последовательностью $p(n)$:

$$Df = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} b_n p(n) z^n,$$

были рассмотрены в статье [9], [10]. Как оказалось, такие операторы связаны с операторами типа Эйлера конечного порядка.

6. Обобщенное преобразование Лапласа

В обобщенных пространствах Фока справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Обобщенное преобразование Лапласа переводит обобщенное пространство Фока в себя.*

Собственными функциями оператора дифференцирования являются экспоненты, а собственными функциями оператора обобщенного дифференцирования D, как уже было показано, функции

$$y(z) = c\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k z^k}{m_1 m_2 ... m_k}\right).$$

Введем обобщенное преобразование Лапласа функции обобщенного пространства Фока $(f, y(\lambda z))$.

$$(f, y(\lambda z)) = \frac{1}{\frac{2\pi}{\beta}\Gamma(\frac{2}{\beta})}\int\limits_{\mathbb{C}}\overline{f(z)}y(\lambda z)e^{-|z|^{\beta}}d\mu =$$

$$= \frac{1}{\frac{2\pi}{\beta}\Gamma(\frac{2}{\beta})}\int\limits_{\mathbb{C}}\sum_{k=0}^{\infty}\overline{a_k z^k}\cdot c\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k z^k}{m_1 m_2 ... m_k}\right)e^{-|z|^{\beta}}d\mu =$$

$$= \frac{c\overline{a_0}}{\frac{2\pi}{\beta}\Gamma(\frac{2}{\beta})}\int\limits_{\mathbb{C}}e^{-|z|^{\beta}}d\mu + c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\overline{a_k}\lambda^k}{m_1 m_2 ... m_k}\frac{1}{\frac{2\pi}{\beta}\Gamma(\frac{2}{\beta})}\int\limits_{\mathbb{C}}|z|^{2k}e^{-|z|^{\beta}}d\mu =$$

$$= c\left(\overline{a_0}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\overline{a_k}\lambda^k}{m_1 m_2 ... m_k}m_k ... m_2 m_1\right) = c\sum_{k=0}^{\infty}\overline{a_k}\lambda^k = c\overline{f(\overline{\lambda})}.$$

7. Базис в обобщенных пространствах Фока

В работе [11] доказан следующий результат:

Теорема 5. *Пусть $\varphi(|z|)$ — выпуклая функция в $\mathbb{C}$. Если $\varphi^*(t) = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant\infty}(tx-\varphi(x))$ — сопряженная по Юнгу — ограничена в окрестности начала координат, тогда система многочленов плотна в пространстве*

$$F_{\varphi} = \left\{f\in H(\mathbb{C}) : \|f\|^2 = \int\limits_{\mathbb{C}}|f(z)|^2 e^{-\varphi(|z|)}d\mu < \infty\right\}.$$

Пространства, рассмотренные выше, являются частным случаем весовых пространств F_{φ}.

Вернемся к нашему обобщенному пространству Фока. В этом случае в роли $\varphi(|z|) = |z|^{\beta}$, которая при $\beta \geq 1$ удовлетворяет всем условиям теоремы.

Рассмотрим систему: $R = \left\{\frac{z^n}{\sqrt{\frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+1))}{\Gamma(\frac{2}{\beta})}}}, n = 0, 1, 2, ...\right\}$. Она ортонормирована в обобщенном пространстве Фока. Следовательно, согласно теореме 4 из [12], образует базис в обобщенном пространстве Фока при $\beta \geq 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V.A. Fock *Configuration space and second guantization* // Zs.f.Phys. Bd. 75. № 9-10. 1932. P. 622–647.
2. V. Bargmann *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform* // Commun.Pure and Applied Math. 14. 1961. P. 187–214.
3. D.J. Newman, H.S. Shapiro *Certain Hilbert spaces of entire functions* // Communicated by L.Cesari. March 31. 1961. P. 971–977.
4. Леонтьев А.Ф. *Обобщения рядов экспонент.* М.: Наука. 1981. 320 с.
5. Бибербах Л. *Аналитическое продолжение.* М.: Наука. 1967. 240 с.
6. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1983. 175 с.
7. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ.* Т. 1. М.: Наука. 1985. 336 с.
8. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций.* Т. 2. М.: Наука. 1968. 624 с.

9. Напалков В.В., Дильмухаметова А.М. *Операторы обобщенного дифференцирования с переменными коэффициентами* // ДАН. Т. 424. № 5. 2009. С. 591–593.
10. Кутателадзе С.С. *Основы функционального анализа.* Новосибирск. 2000. 221 с.
11. B.A. Taylor *On weighted polynomial approximation of entire functions* // Pacific journal of mathematics. Vol.36. № 2. 1971. P. 523–539.
12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука. 1981. 544 с.

Алия Мидхатовна Дильмухаметова,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: aliya-0887@mail.ru

Айгуль Ураловна Муллабаева,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: mullabaeva.87@mail.ru

Валентин Васильевич Напалков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: napalkov@matem.anrb.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 1 (2010). С. 59-70.

УДК 519.6

WENO/РУНГЕ-КУТТА МЕТОД ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ УПРУГИХ ВОЛН

М.Н. ДМИТРИЕВ, Е.И. РОМЕНСКИЙ

Аннотация. В работе представлено применение численного метода WENO/Рунге-Кутта высокого порядка точности для решения уравнений линейной теории упругости, записанной в виде гиперболической системы законов сохранения. Рассматривались методы до 5-го порядка точности по пространству и до 4-го порядка точности по времени. Сравнение результатов расчетов тестовых задач с результатами, полученными широко применяемым в сейсмике методом Вирье второго порядка по пространству и по времени, показывает несомненное преимущество алгоритма WENO/Рунге-Кутта. Рассмотрено также применение метода в случае ограничения расчетной области посредством введения специальным образом построенных поглощающих слоев PML (Perfectly Matched Layer).

Ключевые слова: линейная теория упругости, упругие волны, методы высокого порядка точности.

1. Введение

Методы численного моделирования в геофизике в последние годы приобретают все более важную роль. Необходимость улучшения методик зондирования нефтяных резервуаров и акустического каротажа скважин требует повышения качества моделирования и разработки новых высокоточных численных методов.

Для моделирования сейсмических волн наиболее широко распространена традиционная формулировка уравнений линейной теории упругости в виде дифференциальных уравнений второго порядка для перемещений среды, и многие численные методы основаны именно на таком подходе. В последние годы многие исследователи используют другую формулировку уравнений в виде гиперболической системы законов сохранения первого порядка, для которых разрабатываются эффективные численные конечно-разностные алгоритмы высокого порядка точности как по пространству, так и по времени. В задачах сейсмики и сейсмоакустики используются, в частности, разностная схема Вирье [2], схема на повернутых сетках [3], которые могут со вторым порядком точности моделировать волновые процессы в сложноустроенных (слоистых, трещиноватых) упругих средах. Отметим, что основные трудности при численном исследовании упругих волн в геофизических приложениях заключаются в необходимости расчета волн высокой частоты (до нескольких сотен килогерц) и на больших временах (характерное время — время пробега нескольких сотен длин волн). Для такого типа задач традиционные конечно-разностные методы дают нежелательные эффекты, такие как сильное размазывание волновых фронтов или осцилляции за волной. В последние годы для гиперболических законов сохранения разрабатываются алгоритмы, позволяющие получать более высокий порядок точности как по

M.N. Dmitriev, E.I. Romenski, WENO/RK method for modelling elastic waves.

Работа поддержана РФФИ (проекты 07-05-00538, 08-05-00265, 09-05-00221), Президиумом РАН (проект № 2).

Поступила 20 октября 2009 г.

пространству, так и по времени. Можно упомянуть такие методы, как дискретный метод Галеркина, ADER метод, WENO методы [4].

В данной работе представлено применение WENO/Рунге-Кутта алгоритма для решения гиперболической системы законов сохранения линейной теории упругости. Рассматривались методы до 5-го порядка точности по пространству и до 4-го порядка точности по времени. Сравнение результатов расчетов тестовых задач с результатами, полученными широко используемым в сейсмике методом Вирье второго порядка по пространству и по времени, показывает несомненное преимущество WENO/Рунге-Кутта методов. Отметим, что разработанные методы могут быть прямо использованы для расчета упругих волн в средах с переменными (в том числе с разрывными) характеристиками среды (плотность, скорости звука).

В работе также рассмотрено применение метода в случае ограничения расчетной области посредством введения специальным образом построенных поглощающих слоев PML (Perfectly Matched Layer), предложенных в работах [7, 8]. Разработанные алгоритмы иллюстрируются серией расчетов тестовых задач, одномерных и двумерных.

2. Уравнения линейной теории упругости

Мы будем рассматривать уравнения линейной теории упругости как гиперболическую систему уравнений первого порядка, которая формулируется в терминах скоростей движения среды u_i и деформаций ε_{ij}.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i,j = 1,2,3, \\ &\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = 0, \quad i,j = 1,2,3. \end{aligned} \tag{1}$$

Первое уравнение здесь выражает закон сохранения импульса, второе уравнение описывает эволюцию тензора малых деформаций при движении среды. Мы будем рассматривать случай изотропной среды, для которой напряжения σ_{ij} связаны с деформациями и законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}. \tag{2}$$

Здесь ρ — плотность среды, λ, μ — постоянные Ламе.

Известно, что система (1) является гиперболической, что позволяет применять для ее решения современные численные методы, разработанные для решения гиперболических систем законов сохранения.

В данной статье проведен сравнительный анализ численных методов для решения одномерных и двумерных задач, поэтому ниже приведены соответствующие варианты уравнений.

Двумерная система уравнений может быть получена из (1) в предположении, что движение вдоль одной оси координат, например x_3, отсутствует. Это означает, что $u_3 = 0$, а значит, и $\sigma_{13} = 0, \sigma_{23} = 0, \sigma_{33} = 0$. При этом система (1) сводится к нижеследующей векторной форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Здесь консервативные переменные $\mathbf{U}$ и конвективные потоки $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ имеют вид

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} -\sigma_{11} \\ -\sigma_{12} \\ -u_1 \\ 0 \\ -u_2/2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} -\sigma_{12} \\ -\sigma_{22} \\ 0 \\ -u_2 \\ -u_1/2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Далее для конструирования численных методов будут использоваться одномерные варианты системы (3)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

а для решения задачи Римана (задачи о распаде разрыва) — их эквивалентные формы, записанные в характеристических переменных.

Для одномерной системы, описывающей распространение волн вдоль оси x, такая система имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(u_1 \mp \frac{c_p}{\lambda+2\mu}\sigma_{11}\right) \pm c_p \frac{\partial}{\partial x}\left(u_1 \mp \frac{c_p}{\lambda+2\mu}\sigma_{11}\right) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial t}\left(u_2 \mp \frac{c_s}{\mu}\sigma_{12}\right) \pm c_s \frac{\partial}{\partial x}\left(u_2 \mp \frac{c_s}{\mu}\sigma_{12}\right) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ соответственно продольная и поперечная скорости звука. Система для волн вдоль оси z имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(u_2 \mp \frac{c_p}{\lambda+2\mu}\sigma_{22}\right) \pm c_p \frac{\partial}{\partial y}\left(u_2 \mp \frac{c_p}{\lambda+2\mu}\sigma_{22}\right) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial t}\left(u_1 \mp \frac{c_s}{\mu}\sigma_{12}\right) \pm c_s \frac{\partial}{\partial y}\left(u_1 \mp \frac{c_s}{\mu}\sigma_{12}\right) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Системы (6), (7) могут быть применены для решения задачи Римана, которая в случае одномерного движения вдоль оси x имеет нижеследующую формулировку. Пусть при $t = 0$ на оси x заданы начальные данные $u_1^L, u_2^L, \varepsilon_{11}^L, \varepsilon_{22}^L, \varepsilon_{12}^L$ при $x < 0$ и $u_1^R, u_2^R, \varepsilon_{11}^R, \varepsilon_{22}^R, \varepsilon_{12}^R$ при $x > 0$. Требуется найти решение при $t > 0$.

Решение задачи Римана является кусочно-постоянным в плоскости (x, t), разделенной характеристиками $dx/dt = -c_p$, $dx/dt = -c_s$, $dx/dt = 0$, $dx/dt = c_s$, $dx/dt = c_p$. Нас интересует решение $u_1^*, u_2^*, \varepsilon_{11}^*, \varepsilon_{22}^*, \varepsilon_{12}^*$ в области, ограниченной характеристиками $dx/dt = -c_s$ и $dx/dt = c_s$, и выражающие его формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{1}{2}(u_1^R + u_1^L) + \frac{1}{2}\frac{c_p}{\lambda+2\mu}(\sigma_{11}^R - \sigma_{11}^L), \\ u_2^* &= \frac{1}{2}(u_2^R + u_2^L) + \frac{1}{2}\frac{c_s}{\mu}(\sigma_{12}^R - \sigma_{12}^L), \\ \sigma_{11}^* &= \frac{1}{2}(\sigma_{11}^R + \sigma_{11}^L) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda+2\mu}{c_p}(u_1^R - u_1^L), \\ \sigma_{12}^* &= \frac{1}{2}(\sigma_{12}^R + \sigma_{12}^L) + \frac{1}{2}\frac{\mu}{c_s}(u_2^R - u_2^L). \end{aligned} \tag{8}$$

Отметим, что задача Римана для случая, когда среда слева и справа от разрыва имеет разные материальные характеристики (ρ^L, c_p^L, c_s^L слева и ρ^L, c_p^L, c_s^L справа), также может быть решена методом характеристик, и ее решение в области, ограниченной характеристиками $dx/dt = -c_s^L$ и $dx/dt = c_s^R$, имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
u_1^* &= \frac{\rho^R c_p^R u_1^R + \rho^L c_p^L u_1^L + \sigma_{11}^R - \sigma_{11}^L}{\rho^L c_p^L + \rho^R c_p^R}, \\
u_2^* &= \frac{\rho^R c_s^R u_2^R + \rho^L c_s^L u_2^L + \sigma_{11}^R - \sigma_{11}^L}{\rho^L c_s^L + \rho^R c_s^R}, \\
\sigma_{11}^* &= \frac{\rho^L c_p^L \rho^R c_p^R}{\rho^L c_p^L + \rho^R c_p^R} \left[\frac{\sigma_{11}^R}{\rho^R c_p^R} + \frac{\sigma_{11}^L}{\rho^L c_p^L} + u_1^R - u_1^L \right], \\
\sigma_{12}^* &= \frac{\rho^L c_s^L \rho^R c_s^R}{\rho^L c_s^L + \rho^R c_s^R} \left[\frac{\sigma_{12}^R}{\rho^R c_s^R} + \frac{\sigma_{12}^L}{\rho^L c_s^L} + u_2^R - u_2^L \right].
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Заметим, что для решения задачи Римана в последнем случае необходимо использовать условия на контактном разрыве

$$[u_1] = 0, \quad [\sigma_{11}] = 0, \quad [u_2] = 0, \quad [\sigma_{12}] = 0,$$

где $[f] = f^R - f^L$ — скачок функции f при переходе через разрыв.

3. Ограничение расчетной области

Во многих задачах сейсмики и сейсмоакустики волны могут распространяться в неограниченной области. Для того чтобы ограничить расчетную область, применяются различные методы. Ниже будет описана адаптация к применяемому методу высокого порядка точности подхода, использующего окаймление расчетной области поглощающим слоем. Такой слой должен обеспечивать поглощение без отражения волн, приходящих в него из расчетной области. В данной работе мы остановимся на так называемых идеально-согласованных поглощающих слоях PML (от английского Perfectly Matched Layer). Это специальным образом сконструированный слой, расположенный вдоль границы расчетной области и обеспечивающий затухание решения по мере его распространения. Впервые описание таких слоев было изложено в работе [7] для расчета электромагнитных волновых полей, а применительно к уравнениям упругости — в работе [8].

Сформулируем уравнения, моделирующие распространение волн внутри PML и обеспечивающие затухание решения. Решение системы (3) представляется в виде суммы

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^{\mathbf{x}} + \mathbf{U}^{\mathbf{y}},$$

слагаемые которой являются решениями уравнений

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{U}^{\mathbf{x}}}{\partial t} + d(x)\mathbf{U}^{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0, \\
\frac{\partial \mathbf{U}^{\mathbf{y}}}{\partial t} + d(y)\mathbf{U}^{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Здесь $d(s) > 0$ — демпфирующая функция, которая, следуя работе [3], выбиралась следующим образом:

$$d(s) = \frac{2c_p}{L} \log(1/R) \left(\frac{s}{L}\right)^4,$$

где $s \in [0, L]$, L — ширина поглощающего слоя, R — константа характеризующая коэффициент отражения. В численных расчетах выбиралось $R = 10^{-5}$.

4. Численные методы

В данном параграфе приведено краткое описание конечно-объемного метода WENO в применении к описанным в предыдущем параграфе двумерным уравнениям линейной теории упругости (3).

Предположим, что плоскость x, y разбита на счетные ячейки

$$\Pi_{ij} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$$

с номерами i, j и длинами сторон $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$, $\Delta y = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$. Пространственная аппроксимация уравнения (3) имеет следующий вид

$$\frac{d\mathbf{U}_{i,j}}{dt} = -\frac{\mathbf{F}_{i+1/2,j} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{\mathbf{G}_{i,j+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}}{\Delta x}. \tag{11}$$

Здесь $\mathbf{U}_{i,j}$ — значение решения, отнесенное к ячейке Π_{ij}, а $\mathbf{F}_{i-1/2,j}$,$\mathbf{F}_{i+1/2,j}$, $\mathbf{G}_{i,j-1/2}$,$\mathbf{G}_{i,j+1/2}$ — значения потоков через грани ячейки. Вычисление потоков на гранях счетных ячеек может быть выполнено различными способами. Мы опишем здесь конечно-объемный WENO алгоритм [6], который использует усредненные значения решения по счетным ячейкам:

$$\mathbf{U}_{ij}(t) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{U}(t, x, y) dx dy.$$

Выражения для потоковых членов в (11) получаются при интегрировании уравнения по объему ячейки $\Pi_{ij} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$:

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} = \frac{1}{\Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i+1/2}, y)) dy,$$

$$\mathbf{G}_{i,j+1/2} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{G}(\mathbf{U}(t, x, y_{j+1/2})) dx. \tag{12}$$

Опишем общую процедуру нахождения $\mathbf{F}_{i+1/2,j}$. Для этого интегралы в формуле (12) аппроксимируются N-точечной квадратурной формулой

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} \approx \frac{1}{\Delta y} \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i+1/2}, y_\alpha)) K_\alpha, \tag{13}$$

где K_α — веса квадратурной формулы. Далее для нахождения величин $\mathbf{U}_{i+1/2,\alpha} = \mathbf{U}(t, x_{i+1/2}, y_\alpha)$ применяется WENO реконструкция из средних значений по ячейкам слева и справа на гранях между ячейками ${\mathbf{U}^{\mathbf{L}}}_{i+1/2,\alpha} = \mathbf{U}(t, x_{i+1/2} - 0, y_\alpha)$, ${\mathbf{U}^{\mathbf{R}}}_{i+1/2,\alpha} = \mathbf{U}(t, x_{i+1/2} + 0, y_\alpha)$. После этого приближенное значение $\mathbf{F}_{i+1/2,j}$ получается из решения задачи о распаде разрыва в узлах y_α:

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} \approx \frac{1}{\Delta y} \sum_{\alpha=1}^{N} \widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{U}^{\mathbf{L}}_{\mathbf{i+1/2},\alpha}, \mathbf{U}^{\mathbf{R}}_{\mathbf{i+1/2},\alpha}) K_\alpha. \tag{14}$$

В данной работе для аппроксимации интеграла использовалась двухточечная квадратура 4-го порядка:

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} \approx \frac{1}{2}\mathbf{F}\left(\mathbf{U}(x_{i+1/2}, y_j - \frac{\Delta y}{2\sqrt{3}}, t)\right) + \frac{1}{2}\mathbf{F}\left(\mathbf{U}(x_{i+1/2}, y_j + \frac{\Delta y}{2\sqrt{3}}, t)\right). \tag{15}$$

Для вычисления $\mathbf{U}(x_{i+1/2}, y_j \pm \frac{\Delta y}{2\sqrt{3}}, t)$ применялась двумерная WENO реконструкция 5-го порядка. Для этого сначала применяем одномерную реконструкцию $\mathbf{U}(x_{i+1/2}, y_k, t)$ из средних значений $\mathbf{U}(x_i, y_k, t)$ слева и справа от грани $x = x_{i+1/2}$ для $k = j-3\cdots, j+3$. В качестве шаблона используется взвешенная комбинация трех шаблонов:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{(0)} &= \frac{1}{6}(-\mathbf{U}_{i+2} + 5\mathbf{U}_{i+1} + 2\mathbf{U}_i),\\
\mathbf{U}^{(1)} &= \frac{1}{6}(-\mathbf{U}_{i-1} + 5\mathbf{U}_{i} + 2\mathbf{U}_{i+1}),\\
\mathbf{U}^{(2)} &= \frac{1}{6}(2\mathbf{U}_{i-2} - 7\mathbf{U}_{i-1} + 11\mathbf{U}_i),\\
\mathbf{U}^{L}_{i+1/2} &= \mathbf{U}_{i+1/2}(x_{i+1/2} - 0) = \sum_{l=0}^{2}\omega_l \mathbf{U}^{(l)}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Веса ω_l имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\omega_l = \frac{\alpha_l}{\sum\limits_{l=0}^{2}\alpha_l}, \quad \alpha_0 = \frac{d_0}{(\varepsilon+\beta_0)^2}, \quad \alpha_1 = \frac{d_1}{(\varepsilon+\beta_1)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{d_2}{(\varepsilon+\beta_2)^2},\\
&d_0 = \frac{3}{10}, \quad d_1 = \frac{3}{5}, \quad d_2 = \frac{1}{10}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Индикаторы гладкости шаблонов:

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{13}{12}(\mathbf{U}_i - 2\mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{U}_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3\mathbf{U}_i - 4\mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{U}_{i+2})^2,\\
\beta_1 &= \frac{13}{12}(\mathbf{U}_{i-1} - 2\mathbf{U}_{i} + \mathbf{U}_{i+1})^2 + (\mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{U}_{i+1})^2,\\
\beta_2 &= \frac{13}{12}(\mathbf{U}_{i-2} - 2\mathbf{U}_{i-1} + \mathbf{U}_{i})^2 + \frac{1}{4}(\mathbf{U}_{i-2} - 4\mathbf{U}_{i-1} + \mathbf{U}_{i})^2.
\end{aligned} \tag{18}$$

Формулы для вычисления $\mathbf{U}^R_{i-\frac{1}{2}}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{(0)} &= \frac{1}{6}(2\mathbf{U}_{i+2} - 7\mathbf{U}_{i+1} + 11\mathbf{U}_i),\\
\mathbf{U}^{(1)} &= \frac{1}{6}(-\mathbf{U}_{i+1} + 5\mathbf{U}_{i} + 2\mathbf{U}_{i-1}),\\
\mathbf{U}^{(2)} &= \frac{1}{6}(-\mathbf{U}_{i-2} + 5\mathbf{U}_{i-1} + 2\mathbf{U}_i),\\
\mathbf{U}^{R}_{i-1/2} &= \mathbf{U}_{i-1/2}(x_{i-1/2} + 0) = \sum_{l=0}^{2}\omega_l \mathbf{U}^{(l)}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Веса d_0, d_1 и d_2 получаются циклической перестановкой:

$$d_0 = \frac{1}{10}, \quad d_1 = \frac{3}{5}, \quad d_2 = \frac{3}{10}. \tag{20}$$

После этого проводим одномерную WENO реконструкцию по переменной y, используя найденные выше значения. Формулы для реконструкции в точке $y_j - \frac{\Delta y}{2\sqrt{3}}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{U}_j + (3\mathbf{U}_j - 4\mathbf{U}_{j+1} + \mathbf{U}_{j+2})\frac{\sqrt{3}}{12},\\
&\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}_j - (-\mathbf{U}_{j-1} + \mathbf{U}_{j+1})\frac{\sqrt{3}}{12},\\
&\mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{U}_j - (3\mathbf{U}_j - 4\mathbf{U}_{j-1} + \mathbf{U}_{j-2})\frac{\sqrt{3}}{12},\\
&\mathbf{U}\left(y_j - \frac{\Delta y}{2\sqrt{3}}\right) = \sum_{l=0}^{2} \omega_l \mathbf{U}^{(l)}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Веса d_0, d_1 и d_2 имеют вид

$$d_0 = \frac{210 - \sqrt{3}}{1080}, \quad d_1 = \frac{11}{18}, \quad d_2 = \frac{210 + \sqrt{3}}{1080}. \tag{22}$$

Формулы для вычисления $\mathbf{U}\left(y_j + \frac{\Delta y}{2\sqrt{3}}\right)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{U}_j - (3\mathbf{U}_j - 4\mathbf{U}_{j+1} + \mathbf{U}_{j+2})\frac{\sqrt{3}}{12},\\
&\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}_j - (\mathbf{U}_{j-1} - \mathbf{U}_{j+1})\frac{\sqrt{3}}{12},\\
&\mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{U}_j - (-3\mathbf{U}_j + 4\mathbf{U}_{j-1} - \mathbf{U}_{j-2})\frac{\sqrt{3}}{12},\\
&\mathbf{U}\left(y_j + \frac{\Delta y}{2\sqrt{3}}\right) = \sum_{l=0}^{2} \omega_l \mathbf{U}^{(l)}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Веса d_0, d_1 и d_2 получаются циклической перестановкой:

$$d_0 = \frac{210 + \sqrt{3}}{1080}, \quad d_1 = \frac{11}{18}, \quad d_2 = \frac{210 - \sqrt{3}}{1080}. \tag{24}$$

Шаг интегрирования по времени Δt выбирается из условия Куранта-Фридрихса-Леви:

$$\Delta t \le CFL \min_{ij}\left(\frac{\Delta x}{S_{ij}^x}, \frac{\Delta y}{S_{ij}^y}\right)$$

S_{ij}^x и S_{ij}^y — максимальные скорости распространения волн в направлении осей x и y соответственно. CFL — число Куранта-Фридрихса-Леви, которое выбирается как $CFL < 1$ в одномерном случае и $CFL < 1/2$ в двумерном случае.

5. Численные примеры

В данном параграфе будет проведен сравнительный анализ результатов расчетов, полученных с использованием метода WENO/Рунге-Кутта и других классических методов, в частности широко используемого в задачах сейсмики метода Вирье. Применение численных методов в изучении распространения упругих волн сталкивается с такими трудностями, как необходимость точного вычисления волн высоких частот (10–100 kHz) на очень больших временах пробега (до нескольких сотен длин волн). Мы продемонстрируем преимущество WENO/Рунге-Кутта методов при решении такого рода задач.

5.1. Одномерные упругие волны. Продемонстрируем теперь преимущество метода WENO/Рунге-Кутта по сравнению с некоторыми другими конечно-разностными методами на серии одномерных задач о распространении упругих волн. Рассмотрим вначале волну, распространяющуюся вправо вдоль оси x. Волна задается в начальных данных следующим образом:

$$u_1(0,x) = e^{-10(x-2)^2},\ \varepsilon_{11}(0,x) = -e^{-10(x-2)^2}.$$

Точное решение на момент времени t, соответствующее этим начальным данным, выражается формулой

$$u_1(t,x) = e^{-10(x-c_pt)^2},\ \varepsilon_{11}(t,x) = -e^{-10(x-c_pt)^2}.$$

На рис. 1 слева приведено сравнение результата расчета методом С.К. Годунова распада разрыва (первый порядок точности)[1] с аналитическим решением на момент времени, соответствующий прохождению волной расстояния около 50 длин волн. Первоначально на длину волны приходилось 40 точек, число Куранта в расчетах было взято 0.7. Полученный численно профиль скорости дает сильное падение амплитуды и размазывание профиля. Можно сделать вывод, что такого рода методы дают неудовлетворительные результаты при решении подобных задач.

На рис. 1 справа приведено сравнение с точным решением численных результатов, полученных схемой Вирье и схемой WENO/Рунге-Кутта пятого порядка по пространству и 3-го и 4-го порядков по времени. На длину волны приходится 20 точек, число Куранта равно 0.7. Видно, что схема Вирье создает существенные осцилляции за волной, а сам фронт волны оказывается несколько запаздывающим по сравнению с точным решением. Методы WENO-5/Рунге-Кутта-3,4 дают гораздо лучшие результаты, но падение амплитуды достигает 20%. Можно тем не менее увидеть, что повышение точности интегрирования по времени уменьшает падение амплитуды волны.

На рис. 2 показаны результаты расчета той же задачи с более мелким пространственным шагом (число точек на длину волны — 40), из которых видно, что метод Вирье и в этом случае дает осциллирующее решение, в то время как WENO-5/Рунге-Кутта-4 дает очень хорошее соответствие точному решению.

Метод WENO/Рунге-Кутта легко может быть обобщен на случай переменных коэффициентов уравнений (различные скорости звука и плотности в среде). Оказывается, что для этого не нужно выделять контактную границу, и сквозной счет обеспечивает нужный порядок точности. На рис. 3 слева приведены результаты расчета задачи о распространении волны в двухслойной среде. Внутри расчетной области $x \in [0, 100]$ при $x < 50$ параметры среды $\rho = 1,\ c = 1$, а при $x > 50$ параметры среды $\rho = 1,\ c = 2$. Форма источника прежняя, в начальных данных было взято 20 точек на длину волны. Видно, что метод Вирье дает неудовлетворительные результаты по сравнению с методом WENO-5/Рунге-Кутта-3.

Только при существенном увеличении числа точек на длину волны метод Вирье дает результат, приближающийся по точности к методу WENO/Рунге-Кутта. На рис. 3 справа приведен тот же расчет, но для числа точек на длину волны 20 для WENO-5/Рунге-Кутта-3 схемы и 400 точек на длину волны для схемы Вирье.

5.2. Двумерные упругие волны. Приведем теперь пример расчета распространения упругих волн, инициированных точечным источником, и их взаимодействия с поглощающим слоем. Расчетная область представляет собой прямоугольник $(x, y) \in [0, 8] \times [0, 8]$. В начальный момент времени в центре области задается источник в виде импульса Риккера, который входит как правая часть в уравнения для ε_{11}, ε_{22}:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial x} &= f(t)\delta(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_s}), \\ \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial y} &= f(t)\delta(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_s}), \end{aligned} \tag{25}$$

где $f(t) = 1 - 2\pi^2\nu^2(t-t_0)^2 e^{-\pi^2\nu^2(t-t_0)^2}$, $\nu = 30$, $t_0 = \frac{3}{\nu}$.

Поглощающие слои заданы внутри расчетной области в виде $(x, y) \in [0, 8] \times [0, 1.5]$, $(x, y) \in [6.5, 8] \times [0, 8]$.

Для расчета во всей области, включая PML, использовался описанный выше метод WENO-5/Рунге-Кутта-4. Уравнения, моделирующие затухание внутри PML, брались в виде (10).

На рис. 4 приведено поле напряжения σ_{11}, полученное в результате расчета для различных моментов времени $t = 1.2, 1.5, 1.7, 1.9$. Видно, что волна уходит за пределы расчетной области, при этом не возникает видимых отражений от границы раздела основной области и PML.

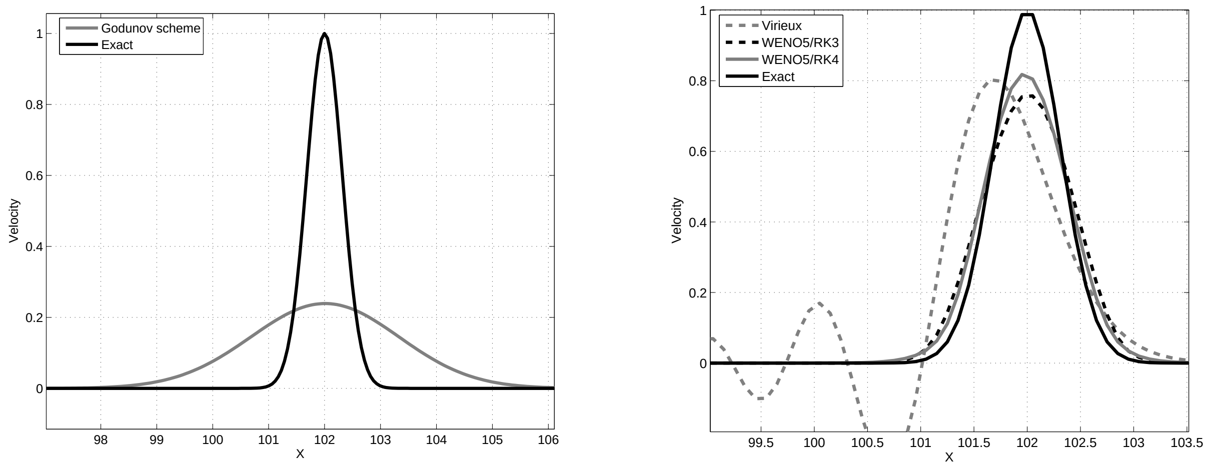


Рис. 1. Искажение импульса. На левом графике – распределение скорости, сравнение численного решения по схеме Годунова с аналитическим решением. Справа – сравнение численного решения по схеме Вирье и WENO/Рунге-Кутта методов с аналитическим решением

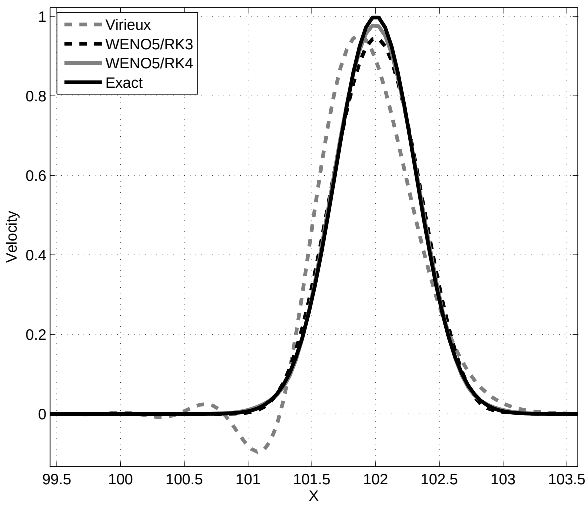
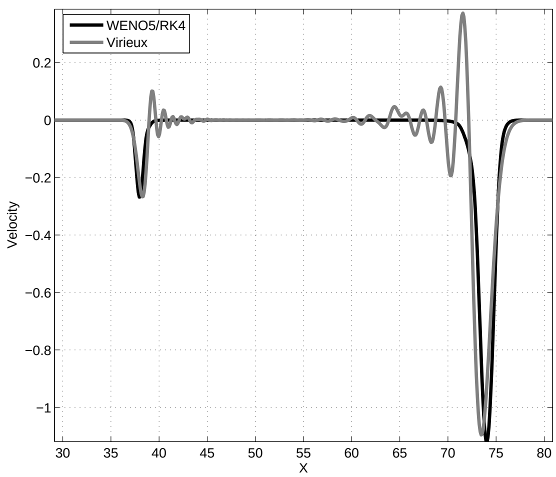


Рис. 2. Искажение импульса. Сравнение численного решения по схеме Вирье и WENO/Рунге-Кутта методов с аналитическим решением



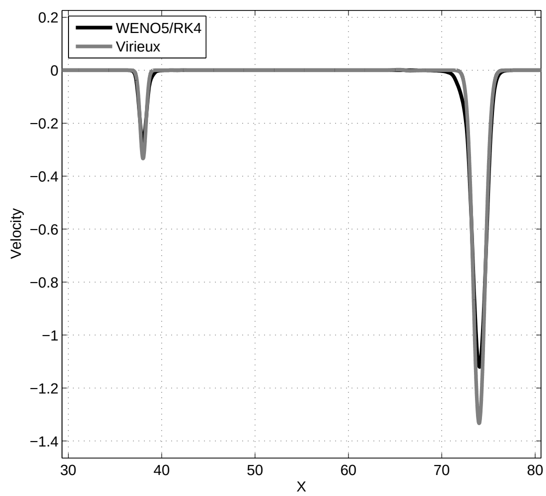
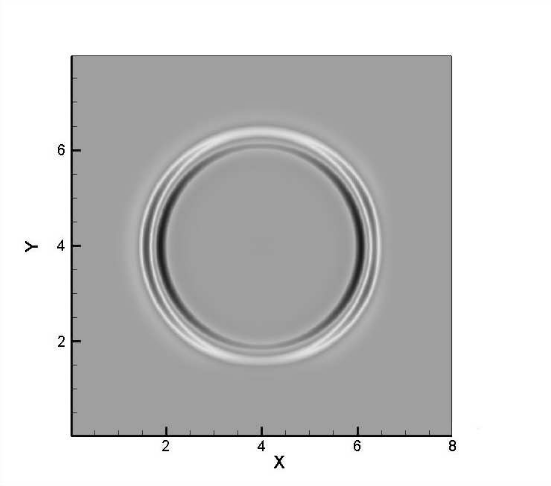


Рис. 3. Искажение импульса для двухслойной модели. Распределение скорости, сравнение численного решения по схеме Вирье с WENO-5/Рунге-Кутта-4 методом

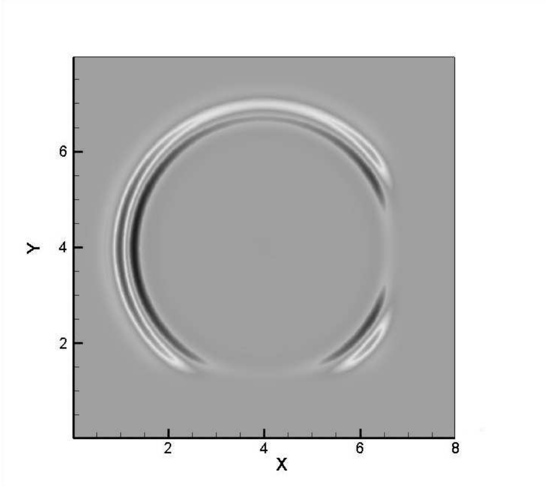
6. Заключение

Метод WENO/Рунге-Кутта может эффективно применяться для расчета распространения упругих волн, в том числе в средах с переменными характеристиками упругости. При этом точность результатов, полученных методом WENO/Рунге-Кутта, превосходит классические конечно-разностные методы. Включение в расчет поглощающих PML слоев не представляет трудностей в применении метода. Заметим, что представленный алгоритм легко обобщается на трехмерный случай.

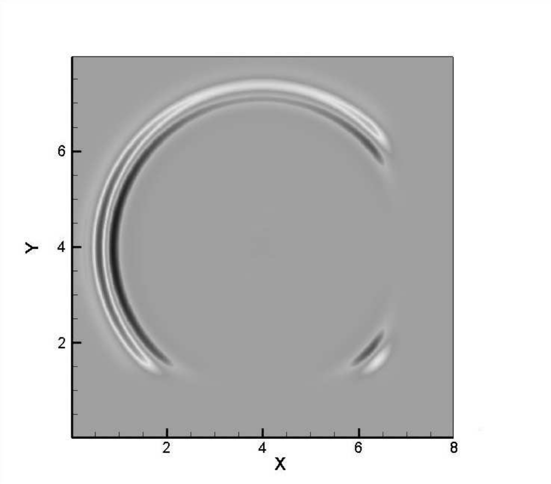
Авторы выражают признательность В.А. Титареву, В.А. Чеверде за плодотворные обсуждения данной работы.



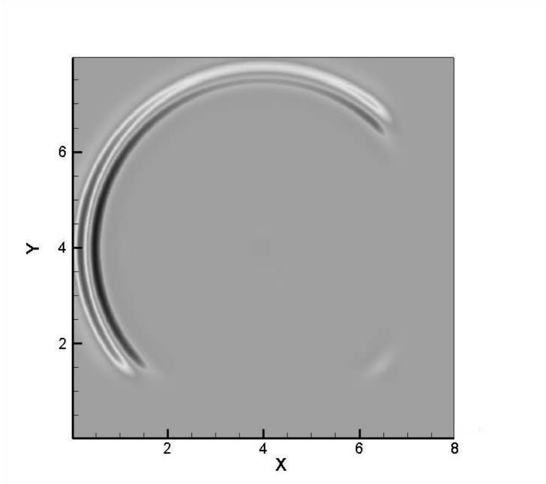
$t = 1.2$



$t = 1.5$



$t = 1.7$



$t = 1.9$

Рис. 4. Снимки волнового поля σ_{11} для различных времен

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. *Численное решение многомерных задач газовой динамики.* М.: Наука. 1976.
2. J. Virieux *P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method* // Geophysics. 1986. Vol. 103. №. 4. P. 889–901.
3. E.H. Saenger, N. Gold, S.A. Shapiro *Modeling the propagation of the elastic waves using a modified finite-difference grid* // Wave Motion. 2000. Vol. 31. №. 1. P. 77–92.
4. E.F. Toro *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics.* Springer. 2009.
5. G.S. Jiang, C.W. Shu *Efficient implementation of weighted ENO schemes* // J. Comput. Phys. 1996. Vol. 126. P. 202–212.
6. V.A. Titarev, E.F. Toro *Finite-volume WENO schemes for three-dimensional conservation laws* // J. Comput. Phys. 2004. Vol. 201. №. 1. P. 238–260.
7. J.P. Berenger *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves* // J. Comput. Phys. 1994. Vol. 114. P. 185–200.
8. F. Collino, C. Tsogka *Application of the perfectly matched layer absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media* // Geophysics. 2001. Vol. 66. P. 294–307.

9. C.W. Shu *Total variation diminishing Runge-Kutta schemes* // J. Mathematics of Computation. Vol. 67. P. 73–85.
10. D. Drikakis, W. Rider *High-resolution methods for incompressible and low-speed flows.* Springer-Verlag 2004.

Максим Николаевич Дмитриев,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090, г. Новосибирск, Россия
E-mail: mnd@ngs.ru

Евгений Игоревич Роменский,
Институт математики им. С.Л. Соболева СОРАН,
ул. Коптюга, 4,
630090, г. Новосибирск, Россия
E-mail: evrom@math.nsc.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 1 (2010). С. 71-86.

УДК 517.54

БАЗИСЫ РИССА ИЗ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕРГМАНА НА ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКАХ

К.П. ИСАЕВ

Аннотация. В работе рассмотрена проблема существования базисов Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых ограниченных многоугольниках. Базисы построены.

Ключевые слова: ряды экспонент, базисы Рисса, пространство Бергмана.

1. Введение

Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости. Через $B_2(D)$ обозначим пространство Бергмана, состоящее из функций, аналитических в D и интегрируемых с квадратом по плоской мере Лебега $B_2(D) = \{f \in H(D) : \int\limits_D |f(z)|^2\, dm(z) < \infty\}$.

Оно является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_D f(z)\overline{g}(z)\, dm(z)$ (см. [1]).

Семейство $\{h_k,\ k = 1,2,\ldots\}$ называется базисом Рисса в гильбертовом пространстве H, если:

1) семейство $\{h_k,\ k = 1,2,\ldots\}$ полно в пространстве H;

2) существуют положительные постоянные m, M такие, что для любой конечной последовательности комплексных чисел $\{a_k\}$ справедлива двусторонняя оценка

$$m\sum_k |a_k|^2\|h_k\|^2 \le \|\sum_k a_k h_k\|^2 \ \le M\sum_k |a_k|^2\|h_k\|^2. \tag{1}$$

Мы здесь придерживаемся определения из работы [2].

В работе [6] показано, что если граница выпуклой области D в некоторой своей точке имеет отличную от нуля кривизну, то в пространстве Бергмана $B_2(D)$ не может существовать базиса Рисса из экспонент $\{e^{\lambda_k z},\ k = 1,2,\ldots\}$. Таким образом, базисы Рисса из экспонент возможны лишь в тех пространствах $B_2(D)$, где D — область, кривизна границы которой в каждой точке равна нулю или не существует.

В данной работе построены базисы Рисса из экспонент в пространстве Бергмана $B_2(D)$, когда D — выпуклый многоугольник.

Основным инструментом исследований является преобразование Лапласа. Система экспонент $\{e^{\lambda z},\ \lambda \in \mathbb{C}\}$ полна в пространстве $B_2(D)$ (см. [1]). Это обстоятельство позволяет описать сопряженное пространство $B_2^*(D)$ в терминах преобразований Лапласа. Каждому функционалу $S \in B_2^*(D)$ поставим в соответствие функцию

$$\hat{S}(\lambda) = S_z(e^{\lambda z}),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

K.P. Isaev, Riesz bases of exponents in Bergman spaces on convex polygons.

Поступила 1 февраля 2010 г.

Работа поддержана грантом Президента РФ (МК-2532.2009.1).

которая и называется преобразованием Лапласа функционала S. В работе [6] показано, что отображение $L : S \longmapsto \hat{S}$ устанавливает изоморфизм пространства $B_2^*(D)$ с гильбертовым пространством целых функций $\hat{B}_2(D)$ с нормой

$$\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)} = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi} \frac{|F(re^{i\varphi})|^2}{K(re^{i\varphi})}\, d\Delta(\varphi) dr, \tag{2}$$

где $h(\varphi) = \max_{z\in\overline{D}} Re\, ze^{i\varphi}$, $\Delta(\varphi) = h'(\varphi) + \int\limits_0^{\varphi} h(\theta)\, d\theta$, $K(\lambda) = \int\limits_D |e^{\lambda z}|^2\, dv(z) = \|e^{\lambda z}\|^2$.

2. Свойства целых функций класса $\hat{B}_2(D)$

Обозначим через w_j, $j = \overline{1,n}$, вершины многоугольника D. Будем считать, что вершины пронумерованы против часовой стрелки. Через l_j обозначим сторону, соединяющую w_j и w_{j+1}. Пусть $\theta_j \in [0, 2\pi)$, $j = \overline{1,n}$, — угол между нормалью к стороне l_j и положительной полуосью абсцисс, d_j — длина стороны l_j.

Для многоугольников $\Delta(\varphi)$ — неубывающая кусочно-постоянная функция со скачками в точках θ_j. Величина скачка равна длине соответствующей стороны d_j. Поэтому норма (2) принимает вид:

$$\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)} = \sum_{j=1}^{n} d_j \int\limits_0^{\infty} \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{K(re^{i\theta_j})}\, dr. \tag{3}$$

В следующей лемме приводится асимптотика функции Бергмана $K(\lambda)$.

Лемма 1. *Пусть D — ограниченная выпуклая область. Для $\varphi \in [0; 2\pi]$ и $t > 0$ через $S(t,\varphi)$ обозначим площадь пересечения области D с полосой*

$$\{z:\ h(\varphi) - t < Re\, ze^{i\varphi} < h(\varphi)\}.$$

Тогда

$$e^{-2}e^{2h(\varphi)r} S(\frac{1}{r}, \varphi) \le K(re^{i\varphi}) \le 4e^{2h(\varphi)r} S(\frac{1}{r}, \varphi).$$

Доказательство.

Пусть $z(\varphi)$ — одна из точек на границе области D такая, что $h(\varphi) = Re\, z(\varphi)e^{i\varphi}$. С помощью отображения $z \to w = (z - z(\varphi))e^{i\varphi}$ преобразуем область D в область D', расположенную в левой полуплоскости. Тогда $0 \in \partial D$. После замены переменных в интеграле функция $K(re^{i\varphi})$ представляется в виде

$$K(re^{i\varphi}) = e^{2h(\varphi)r} \int_{D'} e^{2r Re\, w}\, dm(w).$$

Таким образом, требуется доказать соотношение

$$e^{-2} S\left(\frac{1}{r}\right) \le \int_{D'} e^{2r Re\, w}\, dm(w) \le 4S\left(\frac{1}{r}\right), \tag{4}$$

где $S(t)$ — площадь части области D', лежащей в вертикальной полосе $-t < Re\, w < 0$. Область D' может быть описана в виде

$$D' = \{w = x + iy:\ f_1(x) < y < f_2(x),\ -T < x < 0\}.$$

Пусть $f(x) = f_2(x) - f_1(x)$. Тогда $f(x)$ — неотрицательная вогнутая функция на $(-T; 0)$ и

$$\int_{D'} e^{2r Re\, w}\, dm(w) = \int_{-T}^{0} e^{2rx} f(x)\, dx.$$

Нижняя оценка в (4) получается немедленно:

$$\int_{D'} e^{2rRe\,w}\,dm(w) \geq \int_{D',Re\,w\geq -1/r} e^{2rRe\,w}\,dm(w) \geq e^{-2}S\left(\frac{1}{r}\right).$$

Для доказательства верхней оценки рассмотрим два случая.

1) Пусть $0 < r \leq \frac{1}{T}$. Для таких r, очевидно, $S(\frac{1}{r})$ есть площадь всей области D' и $2rx \leq 0$, поэтому

$$\int_{D'} e^{2rRe\,w}\,dm(w) \leq S\left(\frac{1}{r}\right).$$

2) Пусть $r > \frac{1}{T}$. Функция $f(x)$ — вогнутая неотрицательная, поэтому при $x \leq -\frac{1}{r}$ выполняется соотношение

$$f(-\frac{1}{r}) = f(-\frac{1}{xr}\cdot x + 0\cdot(1+\frac{1}{xr})) \geq -\frac{1}{xr}f(x) + (1+\frac{1}{xr})f(0) \geq -\frac{1}{xr}f(x),$$

откуда

$$f(x) \leq -f\left(-\frac{1}{r}\right)xr.$$

Следовательно,

$$\int_{D',Re\,w<-\frac{1}{r}} e^{2rRe\,w}\,dm(w) = \int_{-T}^{-\frac{1}{r}} e^{2rx}f(x)\,dx \leq -rf\left(-\frac{1}{r}\right)\int_{-\infty}^{-\frac{1}{r}} e^{2rx}x\,dx =$$

$$= \frac{3e^{-2}}{4}f\left(-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{r} \leq \frac{3e^{-2}}{2}S\left(\frac{1}{r}\right).$$

Отсюда

$$\int_{D'} e^{2rRe\,w}\,dm(w) \leq \left(\frac{3e^{-2}}{2}+1\right)S\left(\frac{1}{r}\right).$$

Сравнив результаты пунктов 1–2 получим требуемую оценку сверху в соотношении (4).

Лемма 1 доказана.

Таким образом, когда D многоугольник, норму (3) можно заменить на норму

$$\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)} = \sum_{j=1}^{n} d_j \int_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}S(\frac{1}{r},\theta_j)}\,dr. \tag{5}$$

Лемма 2. *Норма (5) эквивалентна норме:*

$$\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)} = \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2(r+1)}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr. \tag{6}$$

Доказательство.

Обозначим через $|D|$ площадь многоугольника D. Пусть L_{θ_j} — прямая, содержащая сторону l_j многоугольника, а $L_{\theta_j+\pi}$ — опорная прямая к области D, параллельная L_{θ_j}.

Обозначим через T_j расстояние между этими прямыми. Тогда для $r \geq \frac{1}{T_j}$ $S(\frac{1}{r},\theta_j) \geq \frac{1}{2}d_j\frac{1}{r}$, и для $r < \frac{1}{T_j}$ $S(\frac{1}{r},\theta_j) = |D|$. Поэтому для нормы (5) справедлива верхняя оценка

$$\sum_{j=1}^{n} d_j \int_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}S(\frac{1}{r},\theta_j)}\,dr \leq \sum_{j=1}^{n}\left(d_j\int_0^{T_j}\frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}S(\frac{1}{r},\theta_j)}\,dr + 2\int_{T_j}^{\infty}\frac{|F(re^{i\theta_j})|^2 r}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr\right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n}\left(d_j\int\limits_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}|D|}\,dr + 2\int\limits_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2 r}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr\right).$$

Пусть $c = \max_{j=\overline{1,n}}\left(\frac{d_j}{|D|}\right)$, $c_1 = \max\{2, c\}$, тогда

$$\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)} \leq c_1\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2(r+1)}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr. \qquad (7)$$

Пусть $diam\,(D) = \max_{\lambda,\zeta\in\overline{D}}|\lambda-\zeta|$ — диаметр многоугольника D. Тогда для любого r $S(\frac{1}{r},\theta_j) \leq diam\,(D)\frac{1}{r}$. Отсюда

$$\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)} \geq \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n} d_j\left(\int\limits_0^{T_j} \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}S(\frac{1}{r},\theta_j)}\,dr + 2\int\limits_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}S(\frac{1}{r},\theta_j)}\,dr\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n} d_j\left(\frac{1}{|D|}\int\limits_0^{T_j} \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr + \frac{2}{diam\,(D)}\int\limits_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2 r}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n} d_j\left(\frac{1}{|D|}\int\limits_0^{T_j} \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr + \frac{1}{diam\,(D)}\int\limits_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2 r}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr + \frac{T_j}{diam\,(D)}\int\limits_{T_j}^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr\right).$$

Пусть $a_1 = \min_{j=\overline{1,n}}\left(\frac{d_j}{|D|}\right)$, $a_2 = \min_{j=\overline{1,n}}\left(\frac{d_j}{diam\,(D)}\right)$, $a_3 = \min_{j=\overline{1,n}}\left(\frac{d_jT_j}{diam\,(D)}\right)$, $c_2 = \frac{1}{3}\min\{a_1, a_2, a_3\}$. И мы окончательно получаем:

$$\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)} \geq c_2\sum_{j=1}^{n}\left(\int\limits_0^{T_j} \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr + \int\limits_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2 r}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr + \int\limits_{T_j}^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr\right) =$$

$$= c_2\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2(r+1)}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr. \qquad (8)$$

Из (7) и (8) мы получаем требуемое утверждение.

Лемма 2 доказана.

Для дальнейшего изложения нам потребуется несколько лемм, сформулированных и доказанных в работе [3].

Лемма А. (Лемма 2.2 в [3])*Пусть* $\gamma \in (0,\pi)$, *функция* $f(\lambda)$ *— голоморфная и конечной степени в* $A_\gamma = \{\lambda : 0 < arg\,\lambda < \gamma\}$, *непрерывная в* $\overline{A}_\gamma$ *и*

$$\int\limits_0^\infty |f(r)|^2\,dr,\ \int\limits_0^\infty |f(re^{i\gamma})|^2\,dr \ < \infty.$$

Класс таких функций обозначим через H^2_γ. *Тогда для всех* $f \in H^2_\gamma$

$$\int\limits_0^\infty |f(re^{i\theta})|^2\,dr \leq c,\ \ 0 < \theta < \gamma, \qquad (9)$$

где c *— некоторая постоянная.*

Лемма B. (Лемма 2.5 в [3])*Пусть* $f(\lambda) \in H^2_\gamma$ *и* l_θ *есть пересечение угла* A_γ *с лучом* $\arg(\lambda - \lambda_0) = \theta$, *а* $P_{\theta,H}$ *— пересечение этого угла с полосой* $\{\lambda : |Im\,\lambda e^{-i\theta}| < H\}$ $(0 \le \theta \le \gamma)$. *Тогда*

$$\left(\int\limits_{l_\theta} |f(\lambda)|^2\, d|\lambda|\right)^{\frac{1}{2}} \le K\left(\left(\int\limits_0^\infty |f(r)|^2\, dr\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_0^\infty |f(re^{i\gamma})|^2\, dr\right)^{\frac{1}{2}}\right), \tag{10}$$

$$\left(\int\limits_{P_{\theta,H}} |f(\lambda)|^2\, dm(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}} \le K(2H)^{\frac{1}{2}}\left(\left(\int\limits_0^\infty |f(r)|^2\, dr\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_0^\infty |f(re^{i\gamma})|^2\, dr\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{11}$$

Лемма C. (Лемма 2.6 в [3])*Пусть* $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ *— последовательность точек, лежащих в* $P_{\theta,H}$, *такая, что*

$$\inf_{k\neq j} |\lambda_k - \lambda_j| = 2\delta > 0$$

и находящихся на расстоянии, большем 2δ *от сторон* $P_{\theta,H}$, *и пусть* $f(\lambda) \in H^2_\gamma$. *Тогда при некоторой константе* M_δ, *не зависящей от выбора функции* $f(\lambda)$, *справедливо неравенство*

$$\left(\sum_k |f(\lambda_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le M_\delta\left(\left(\int\limits_0^\infty |f(r)|^2\, dr\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_0^\infty |f(re^{i\gamma})|^2\, dr\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{12}$$

Лемма D. (Лемма 2.7 в [3])*Пусть функция* $f(\lambda) \in H^2_\gamma$. *Тогда внутри угла*

$$A_{\gamma,\delta} = \{\lambda : Im\,\lambda \ge \delta > 0, Im\,\lambda e^{-i\gamma} \le -\delta < 0\}$$

$f(\lambda)$ *равномерно стремится к* 0 *при* $|\lambda| \to \infty$.

Теперь мы готовы указать некоторые из свойств функции $f \in \hat{B}_2(D)$, получающихся непосредственным применением лемм A, B, C и D.

Нормали N_j к сторонам многоугольника D разбивают всю плоскость на углы Γ_j, $j = \overline{1,n}$ $(\Gamma_j = \{\lambda : \arg\lambda \in (\theta_j, \theta_{j+1})\})$, которые при $n > 2$ меньше, чем π. В каждом из этих углов справедливо равенство $H(\lambda) = Re\,\overline{w}_j\lambda$. Таким образом, в каждом из углов Γ_j $e^{-H(\lambda)} = |e^{-\overline{w}_j\lambda}|$ $(\lambda \in \Gamma_j)$. Через φ_j обозначим среднее арифметическое θ_j и θ_{j+1} :

$$\varphi_j = (\theta_j + \theta_{j+1})/2.$$

Тогда в угле Γ_j можно рассматривать аналитическую ветвь функции $\sqrt{\lambda + e^{i\varphi_j}}$, причем в этом угле $|\sqrt{\lambda + e^{i\varphi_j}}| \le \sqrt{|\lambda| + 1}$. Пусть $\lambda = re^{i\varphi}$, тогда для $\theta_j \le \varphi \le \theta_{j+1}$ выполняется оценка $|\lambda + e^{i\varphi_j}|^2 = r^2 + 1 + 2r\cos(\varphi - \varphi_j) \ge r^2 + 1 = |\lambda|^2 + 1 \ge \frac{1}{2}(|\lambda| + 1|)^2 = \frac{1}{2}(|\lambda| + 1)^2$. Следовательно, $e^{-H(\lambda)}\sqrt{|\lambda| + 1}$ сравнима с модулем голоморфной функции $|e^{-\overline{w}_j\lambda}\sqrt{\lambda + e^{i\varphi_j}}|$ в угле Γ_j.

Если $F \in \hat{B}_2(D)$, то функция $F(\lambda)e^{-\overline{w}_j\lambda}\sqrt{\lambda + e^{i\varphi_j}}$ голоморфна в угле Γ_j и по лемме 2 интегрируема с квадратом на границах Γ_j, следовательно, по лемме A и на каждом луче, исходящем из начала координат и содержащемся в Γ_j. Непосредственное применение лемм B, C и D к этой функции дает нам следующие свойства функций класса $\hat{B}_2(D)$.

Лемма 3. *1) Пусть функция* $F(\lambda) \in \hat{B}_2(D)$ *и* $Q_{H,A,\theta} = \{\lambda : Re\,\lambda e^{-i\theta} > A;\ \|Im\,\lambda e^{-i\theta}| < H\}$ *— произвольная полуполоса. Тогда*

$$\int\limits_{Q_{H,A,\theta}} |F(\lambda)|^2 e^{-2H(\lambda)}(|\lambda| + 1)\, dm(\lambda) \le C_{H,A,\theta}\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)}. \tag{13}$$

2) Если последовательность точек $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *лежит в полосе* $Q_{H,A,\theta}$ *и* $\inf_{k\neq j}|\lambda_k-\lambda_j|>0$, *то*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|F(\lambda_k)|^2e^{-2H(\lambda_k)}(|\lambda_k|+1)\leq const\,\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)}.$$

3) Если функция $F(\lambda)\in\hat{B}_2(D)$, *то* $|F(\lambda)|e^{-H(\lambda)}\sqrt{|\lambda|+1}$ *равномерно стремится к нулю при* $|\lambda|\to\infty$.

Для доказательства основной теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4. *Если функция* $F(\lambda)\in\hat{B}_2(D)$, *то функция* $F_\zeta(\lambda)=F(\lambda+\zeta)$ *при любом комплексном* ζ *принадлежит классу* $\hat{B}_2(D)$. *При этом*

$$\|F_\zeta(\lambda)\|^2_{\hat{B}_2(D)}\leq C_{D,\zeta}\|F(\lambda)\|^2_{\hat{B}_2(D)}. \tag{14}$$

Доказательство.

В каждом из углов Γ_j, $j=\overline{1,n}$, функция $F_j(\lambda)=F(\lambda)e^{-\overline{w}_j\lambda}\sqrt{\lambda+e^{i\varphi_j}}$ удовлетворяет условиям леммы B. В силу неравенства (10) мы имеем

$$\int\limits_{l_\zeta\bigcap\Gamma_j}|F_j(\lambda)|^2\,d|\lambda|\leq K_\zeta\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)},$$

где l_ζ — луч $\lambda=\zeta+re^{i\theta_j}$, $r>0$, K_ζ — некоторая константа.

Отсюда

$$\int\limits_{l_\zeta\bigcap\Gamma_j}|F(\lambda)|^2e^{-2\overline{w}_j\lambda}(|\lambda|+1)\,d|\lambda|\leq\sqrt{2}K_\zeta\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{\infty}|F(re^{i\theta_j}+\zeta)|^2e^{-2Re\,\overline{w}_j(re^{i\theta_j}+\zeta)}(|re^{i\theta_j}+\zeta|+1)\,dr\leq\sqrt{2}K_\zeta\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)}. \tag{15}$$

Для $r\leq|\zeta|$ мы имеем

$$|re^{i\theta_j}+\zeta|+1\geq|\zeta|-r+1\geq1\geq\frac{r+1}{|\zeta|+1}. \tag{16}$$

Для $r>|\zeta|$ мы имеем

$$|re^{i\theta_j}+\zeta|+1\geq r-|\zeta|+1=(|\zeta|+1)\frac{r+1}{|\zeta|+1}-|\zeta|=\frac{r+1}{|\zeta|+1}+|\zeta|\frac{r+1}{|\zeta|+1}-|\zeta|\geq\frac{r+1}{|\zeta|+1}. \tag{17}$$

Из (15), (16) и (17) получим, что

$$\int\limits_0^{\infty}|F(re^{i\theta_j}+\zeta)|^2e^{-2rh(\theta_j)}(r+1)\,dr\leq\sqrt{2}K_\zeta(|\zeta|+1)e^{2Re\,\overline{w}_j\zeta}\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)}.$$

Лемма 4 доказана.

3. Теорема об интерполяции и базисы Рисса

Для любого $K>0$ через

$$P_j(K)=\{\lambda:Re\,\lambda e^{-i\theta_j}>0;\ |Im\ \lambda e^{-i\theta_j}|<K\}$$

обозначим полуполосу в направлении θ_j. $D_K = \bigcup\limits_1^n P_j(K)$ — назовем D_K-звездой. Обозначим через $\tilde{S}_D$ класс всех целых функций $S(\lambda)$ экспоненциального типа, удовлетворяющих следующим условиям:

1) все нули функции S простые, и существует $K > 0$ (зависящая от функции S) такая, что все нули $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ функции $S(\lambda)$ попадают в D_K-звезду;

2) $\inf_{j\neq k} |\lambda_j - \lambda_k| = 2\delta > 0$;

3) при некоторых положительных константах $c\,, C$ (зависящих от функции S) выполняется неравенство

$$c < |S(\lambda)|e^{-H(\lambda)}\sqrt{|\lambda|+1} < C,\ \lambda \overline{\in} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_\sigma(\lambda_k), \tag{18}$$

где $B_\delta(\lambda_k) = \{\lambda : |\lambda - \lambda_k| < \delta\}$.

Существование функций, попадающих в класс $\tilde{S}_D$, мы покажем в следующем параграфе. Свойства функций класса $\tilde{S}_D$, которые потребуются нам в дальнейшем, мы соберем в одной теореме.

Теорема 1. *Пусть $S(\lambda)$ — функция класса $\tilde{S}_D$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность ее нулей. Тогда:*

1) при любом комплексном ζ функция $S_\zeta(\lambda) = S(\lambda+\zeta)$ принадлежит классу $\tilde{S}_D$,

2) число нулей функции $S(\lambda)$, в круговом кольце $\{\lambda : r \le |\lambda| \le r+1\}$ ограничено некоторой постоянной, не зависящей от r,

3) справедливо неравенство $\inf_k(|S'(\lambda_k)|e^{-H(\lambda_k)}\sqrt{|\lambda_k|+1}) > 0$.

Доказательство.

1) Последовательность нулей функции $S_\zeta(\lambda)$ попадает в $D_{K+|\zeta|}$-звезду.

Из определения функции $H(\lambda)$ следует, что для любых точек $\lambda,\ \zeta \in \mathbb{C}$ справедливо неравенство

$$H(\lambda+\zeta) \le H(\lambda) + H(\zeta). \tag{19}$$

Поэтому из (18) и (19) получим оценку

$$|S(\lambda+\zeta)|e^{-H(\lambda)}\sqrt{|\lambda|+1} < C\,\frac{e^{H(\lambda+\zeta)-H(\lambda)}\sqrt{|\lambda|+1}}{\sqrt{|\lambda+\zeta|+1}} \le C\,e^{H(\zeta)}\frac{\sqrt{|\lambda|+1}}{\sqrt{|\lambda+\zeta|+1}} =$$

$$= C\,e^{H(\zeta)}\sqrt{1+\frac{|\lambda|-|\lambda+\zeta|}{|\lambda+\zeta|+1}} \le C\,e^{H(\zeta)}\sqrt{1+\frac{|\zeta|}{|\lambda+\zeta|+1}} \le C\,e^{H(\zeta)}\sqrt{1+|\zeta|} < \infty,$$

здесь C — константа из (18).

Воспользовавшись далее неравенством $-H(-\zeta) \le H(\lambda+\zeta) - H(\lambda) \le H(\zeta)$, следующим непосредственно из (19), мы получим из (18)

$$|S(\lambda+\zeta)|e^{-H(\lambda)}\sqrt{|\lambda|+1} > c\,\frac{e^{H(\lambda+\zeta)}e^{-H(\lambda)}\sqrt{|\lambda|+1}}{\sqrt{|\lambda+\zeta|+1}} \ge c\,e^{-H(-\zeta)}\sqrt{\frac{|\lambda|+1}{|\lambda|+|\zeta|+1}} \ge$$

$$\ge c\,e^{-H(-\zeta)}\sqrt{1-\frac{|\zeta|}{|\lambda|+|\zeta|+1}} \ge c\,e^{-H(-\zeta)}\sqrt{1-\frac{|\zeta|}{|\zeta|+1}} = c\,e^{-H(-\zeta)}(1+|\zeta|)^{\frac{1}{2}} > 0,$$

здесь c — константа из (18). Первый пункт теоремы доказан.

2) Для доказательства второго пункта достаточно проверить, что при $j = \overline{1,n}$, $r > 0$ в прямоугольнике $F_{r,j} = \{\lambda : |Re\,\lambda e^{-i\theta_j} - r| \le 1,\ |Im\,\lambda e^{-i\theta_j}| \le K+\delta\}$ содержится не более чем N нулей (N не зависит от r). Круги $B(\lambda_k, \delta)$ попарно не пересекаются. Если в

прямоугольнике $F_{r,j}$ N нулей, то суммарная площадь кругов, попадающих в этот прямоугольник, $\pi N \frac{\sigma^2}{4}$. Эта площадь меньше площади прямоугольника $4(K+\delta)$. Таким образом, $N \leq \frac{16(K+\delta)}{\pi\sigma^2}$, и пункт (2) доказан.

3) По формуле Коши

$$\frac{1}{S'(\lambda_k)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda-\lambda_k|=\delta} \frac{\lambda-\lambda_k}{S(\lambda)(\lambda-\lambda_k)}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda-\lambda_k|=\delta} \frac{1}{S(\lambda)}\, d\lambda.$$

Из (18) следует, что

$$\left|\frac{1}{S'(\lambda_k)}\right| \leq \frac{\delta\sqrt{\delta+1}}{c} e^{\delta \max_{\zeta\in\overline{D}}|\zeta|} e^{-H(\lambda_k)}\sqrt{|\lambda_k|+1}.$$

Теорема доказана.

Сформулируем теперь основную теорему этого параграфа.

Теорема 2. *Пусть функция $S(\lambda) \in \tilde{S}_D$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность ее нулей, пронумерованных в порядке возрастания их модулей. Определим оператор T, действующий из пространства $\hat{B}_2(D)$ в пространство последовательностей равенством*

$$T(F) = \{F(\lambda_k)e^{-H(\lambda_k)}\sqrt{|\lambda_k|+1}\}_{k=1}^{\infty}. \qquad (20)$$

Утверждается, что этот оператор является изоморфизмом между пространствами $\hat{B}_2(D)$ и l^2. Обратный оператор определяется формулой

$$T^{-1}(\{c_k\})(\lambda) = S(\lambda)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k e^{H(\lambda_k)}}{S'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)\sqrt{|\lambda_k|+1}}. \qquad (21)$$

Причем ряд, стоящий в правой части равенства (21), сходится по норме пространства $\hat{B}_2(D)$.

Доказательство.

Непрерывность оператора T следует из пункта 2 леммы 3.

Докажем, что оператор T инъективен, то есть ядро отображения T состоит лишь из нуля. Пусть $F(\lambda) \in Ker\, T$, то есть $F(\lambda_k) = 0$, $k = \overline{1,\infty}$. Тогда функция $g(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{S(\lambda)}$ есть целая функция экспоненциального типа, которая, как следует из пункта 3 леммы 3, равномерно стремится к 0 при $|\lambda| \to \infty$ вне множества $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{\lambda : |\lambda-\lambda_k| < \delta\}$. Следовательно, $g(\lambda) \equiv 0 \equiv F(\lambda)$.

Поэтому достаточно проверить, что ряд, стоящий в правой части (21), определяет на всем l^2 ограниченный оператор $T^{-1} : l^2 \longmapsto \hat{B}_2(D)$, обратный к T.

Разобьем последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ на n последовательностей $\Lambda_j = \{\lambda_{k,j}\}_{k=1}^{\infty}$, $j = \overline{1,n}$, состоящих соответственно из нулей функции $S(\lambda)$, расположенных в полуполосах $P_j(K) = \{\lambda : Re\,\lambda e^{-i\theta_j} > 0;\ |Im\ \lambda e^{-i\theta_j}| < K\}$ (если корень λ_k принадлежит одновременно нескольким полуполосам $P_j(K)$, то отнесем его к полуполосе с меньшим номером). Элементы каждой из последовательностей Λ_j пронумерованы в порядке возрастания их модулей. Перенумеруем соответственно последовательность $\{c_k\}$ и перепишем (21) в виде

$$T^{-1}(\{c_k\})(\lambda) = S(\lambda)\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k,j} e^{H(\lambda_{k,j})}}{S'(\lambda_{k,j})(\lambda-\lambda_{k,j})\sqrt{|\lambda_{k,j}|+1}}.$$

Очевидно, достаточно доказать, что каждый из n внутренних рядов сходится по норме пространства $\hat{B}_2(D)$ и определяет непрерывный оператор

$$T_j^{-1}(\{c_{k,j}\})(\lambda) = S(\lambda)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k,j}e^{H(\lambda_{k,j})}}{S'(\lambda_{k,j})(\lambda-\lambda_{k,j})\sqrt{|\lambda_{k,j}|+1}}.$$

Из утверждения 2 теоремы 1 следует, что при некоторой положительной константе c справедливо неравенство

$$|\lambda_{k,j}| > ck \tag{22}$$

при достаточно больших k. Из утверждения 3 теоремы 1 следует, что

$$m = \inf_k\{|S'(\lambda_k)|e^{-H(\lambda_k)}\sqrt{|\lambda_k|+1}\} > 0.$$

Воспользуемся неравенством Гельдера:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k,j}e^{H(\lambda_{k,j})}}{S'(\lambda_{k,j})(\lambda-\lambda_{k,j})\sqrt{|\lambda_{k,j}|+1}}\right| \le sqrt\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda-\lambda_{k,j}|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|c_{k,j}|^2}{m^2}} = const\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda-\lambda_{k,j}|^2}}. \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует, что ряд, стоящий в правой части (21), сходится равномерно на каждом компакте в $\mathbb{C}$ к некоторой целой функции $F_j(\lambda)$ такой, что

$$F_j(\lambda_{k,i}) = 0, \text{ если } i \neq j. \quad F_j(\lambda_{k,i}) = c_{k,j}, \text{ если } i = j. \tag{24}$$

Надо показать, что функция $F_j(\lambda) \in \hat{B}^2(D)$ и $\|F_j(\lambda)\|_{\hat{B}^2(D)} \le const\,\|\{c_{k,j}\}\|_{l^2}$. В силу леммы 4 достаточно проверить, что при некотором $\zeta \in \mathbb{C}$ функция $F_j(\lambda-\zeta) \in \hat{B}^2(D)$ и

$$\|F_j(\lambda-\zeta)\|_{\hat{B}^2(D)} \le const\|\{c_{k,j}\}\|_{l^2}. \tag{25}$$

Доказательство проведем для $j=1$, считая, что $\theta_1 = 0$ и $h_D(0) = 0$.

Выберем ζ так, чтобы полуполоса $\zeta + P_1(K)$ целиком лежала в области $\{\lambda : \arg\lambda \in (0,\theta_2); Im\ \lambda > \eta > 0\}$. Принимая во внимание пункт 1 теоремы 1 и (18), мы можем утверждать, что каждое слагаемое и, следовательно, частичные суммы ряда

$$F_1(\lambda-\zeta) = S(\lambda-\zeta)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k,1}e^{H(\lambda_{k,1})}}{S'(\lambda_{k,1})(\lambda-\zeta-\lambda_{k,1})\sqrt{|\lambda_{k,1}|+1}}, \tag{26}$$

представляющего функцию $F_1(\lambda-\zeta)$, принадлежат пространству $\hat{B}^2(D)$. Для того, чтобы доказать сходимость ряда в этом пространстве и оценить его сумму, докажем справедливость оценки

$$\sup_{j=\overline{1,n}}\int_0^{\infty}|S(re^{i\theta_j})-\zeta|^2e^{-2H(re^{i\theta_j})}(r+1)\left|\sum_{k=l}^{m}\frac{c_{k,1}e^{H(\lambda_{k,1})}}{S'(\lambda_{k,1})(re^{i\theta_j}-\zeta-\lambda_{k,1})\sqrt{|\lambda_{k,1}|+1}}\right|^2 dr \le$$

$$\le const\sum_{l}^{m}|c_{k,1}|^2 \tag{27}$$

для любых натуральных чисел $l < m$. Произведение $|S(re^{i\theta_j})-\zeta|e^{-H(re^{i\theta_j})}\sqrt{r+1}$ ограничено сверху некоторой константой. Поэтому достаточно доказать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{k=l}^{m}\frac{c_{k,1}e^{H(\lambda_{k,1})}}{S'(\lambda_{k,1})(re^{i\theta_j}-\zeta-\lambda_{k,1})\sqrt{|\lambda_{k,1}|+1}}\right|^2 dr \le const\sum_{l}^{m}|c_{k,1}|^2. \tag{28}$$

Докажем это неравенство, полагая для определенности, что $j = 1$. Поскольку из-за выбора ζ все полюсы функции

$$G_{l,m}(\lambda) = \sum_{k=l}^{m} \frac{c_{k,1} e^{H(\lambda_{k,1})}}{S'(\lambda_{k,1})(\lambda - \zeta - \lambda_{k,1})\sqrt{|\lambda_{k,1}| + 1}}$$

расположены в верхней полуплоскости, то $G_{l,m}(\lambda) \in H^2_-$, где H^2_- — пространство Харди в нижней полуплоскости, а величина, стоящая в левой части неравенства (28), является квадратом H^2_--нормы функции $G_{l,m}$. Для вычисления этой нормы воспользуемся тем, что пространство, сопряженное к H^2_-, — это пространство H^2_+ (пространство Харди в верхней полуплоскости). Пространство H^2_+ с нормой сопряженного пространства обозначим через $\hat{H}^2_+$. Тогда

$$\|G_{l,m}\|_{\hat{H}^2_-} = \sup_{\psi \in H^2_+,\, \|\psi\|_{H^2_+} = 1} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G_{l,m}(r)\psi(r)\, dr \right|.$$

Вычисляя последний интеграл с помощью вычетов, мы получим

$$\|G_{l,m}\|_{\hat{H}^2_-} = \sup_{\psi \in H^2_+,\, \|\psi\|_{H^2_+} = 1} \left| \sum_{k=l}^{m} \frac{c_{k,1} e^{H(\lambda_{k,1})} \psi(\lambda_{k,1} + \zeta)}{S'(\lambda_{k,1})\sqrt{|\lambda_{k,1}| + 1}} \right| \leq$$

$$\leq \sup_{k=\overline{l,m}} \left| \frac{e^{H(\lambda_{k,1})}}{S'(\lambda_{k,1})\sqrt{|\lambda_{k,1}| + 1}} \right| \left(\sum_{k=l}^{m} |c_{k,1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=l}^{m} |\psi(\lambda_{k,1} + \zeta)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

Функции класса H^2_+ удовлетворяют условиям леммы C при $\gamma = \pi$. Применив эту лемму и теорему 1 (п. 3), мы из (29) получаем

$$\|G_{l,m}\|_{H^2_-} \leq const \sum_{k=l}^{m} |c_{k,1}|^2.$$

Соотношение (27) доказано. Аналогично рассматривается случай, когда $j \neq 1$. Так как $\{c_{k,1}\} \in l_2$, то последовательность $\{|c_{k,1}|^2\}$ фундаментальна. Значит, из последнего неравенства следует, что частичные суммы в правой части (26) образуют фундаментальную последовательность в $\hat{B}^2(D)$. По теореме Коши ряд в правой части (26) сходится в пространстве $\hat{B}^2(D)$ и $F_1 \in \hat{B}^2(D)$. Оценка (25) доказана. Из непрерывности оператора T_j^{-1}, которую мы доказали, следует непрерывность оператора $T^{-1} = \sum T_j^{-1}$. Из (24) следует, что $T\,T^{-1} = I$ в пространстве l^2, и так как $Ker\ T = 0$, то $T^{-1}\,T = I$ в пространстве $\hat{B}_2(D)$.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть функция $S(\lambda) \in \tilde{S}_D$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ее нули. Тогда система функций*

$$\left\{ \frac{S(\lambda)\sqrt{K(\lambda_k)}}{S'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)} \right\} \tag{30}$$

образует базис Рисса в $\hat{B}_2(D)$.

Теорема 3. *Пусть D — выпуклый многоугольник, $S(\lambda)$ — функция класса $\tilde{S}_D$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ее нули. Тогда система*

$$\left\{ \frac{e^{\lambda_k z}}{\sqrt{K(\lambda_k)}} \right\}_{k=1}^{\infty}, \tag{31}$$

построенная по этим нулям, является базисом Рисса в пространстве Бергмана $B_2(D^*)$ (через D^* обозначается многоугольник, симметричный D относительно вещественной оси).

Доказательство.

Как говорилось ранее, пространство $B_2^*(D)$ изоморфно пространству $\hat{B}_2(D)$. Поэтому по теореме 2 достаточно показать, что системы (30) и (31) биортогональны (см. [3]).

Пусть $\varphi_j \in B_2^*$, и $\varphi_j(e^{\lambda z}) = \frac{S(\lambda)\sqrt{K(\lambda_j)}}{S'(\lambda_j)(\lambda-\lambda_j)}$, $j = \overline{1,\infty}$.

Пусть

$$T_{j,k} = \varphi_j\left(\frac{e^{\lambda_k z}}{\sqrt{K(\lambda_k)}}\right) = \frac{S(\lambda_k)\sqrt{K(\lambda_j)}}{S'(\lambda_j)(\lambda_k-\lambda_j)\sqrt{K(\lambda_k)}},$$

тогда $T_{j,k} = 0$, если $k \neq j$. $T_{j,k} = 1$, если $k = j$. Следовательно, системы (30) и (31) биортогональны.

Теорема доказана.

4. Конструирование целой функции класса $\tilde{S}_D$

В этом параграфе мы покажем, что несмотря на жесткие ограничения на рост функций класса $\tilde{S}_D$, этот класс не является пустым.

Рассмотрим на положительной вещественной полуоси меру $d\mu(t)$, где $\mu(t)$ — некоторая возрастающая непрерывная функция такая, что

1) $\mu(t) \to +\infty$, $t \to +\infty$, $\mu(0) = 0$;

2) существуют положительные константы c и C такие, что $ch \leq \mu(t+h) - \mu(t) \leq Ch$, для любых $t, h \geq 0$.

Выберем последовательность точек $\{T_j\}_{j=0}^{\infty}$ таких, что

$$\mu(T_k) = k,\ k = \overline{0,\infty}\,. \tag{32}$$

По теореме о среднем значении существуют точки $t_k \in [T_{k-1}; T_k]$ такие, что

$$\int\limits_{T_{k-1}}^{T_k} t\,d\mu(t) = t_k,\ k = \overline{1,\infty}\,. \tag{33}$$

Элементарным примером такой функции может служить $\mu(t) = t$.

Докажем некоторые свойства функции $\mu(t)$.

Лемма 5. *Пусть $n(t) = \sum\limits_{t_k \leq t} 1$. Тогда*

1) $|\mu(t) - n(t)| \leq 2$ для любого t;

2) $\int\limits_{T_{k-1}}^{T_k} (\mu(t) - n(t))\,dt = 0$ для любого $k = \overline{1,\infty}$.

Доказательство.

1) Пусть $t \in [T_{k-1}, T_k]$. Тогда $|\mu(t) - n(t)| = |\mu(t) - \mu(T_k) + \mu(T_k) - n(t)| \leq \leq |\mu(t) - k| + |k - n(t)| \leq 2$.

2) По определению t_k мы имеем

$$\int\limits_{T_{k-1}}^{T_k} (t - t_k)\,d\mu(t) = 0.$$

Интегрируя по частям, получим

$$k(T_k - t_k) - (k-1)(T_{k-1} - t_k) - \int\limits_{T_{k-1}}^{T_k} \mu(t)\,dt = 0.$$

Отсюда

$$\int\limits_{T_{k-1}}^{T_k} (\mu(t) - (k-1))\,dt = T_k - t_k.$$

Или

$$\int\limits_{T_{k-1}}^{t_k} (\mu(t) - (k-1))\,dt + \int\limits_{t_k}^{T_k} (\mu(t) - k)\,dt + \int\limits_{t_k}^{T_k} dt = T_k - t_k.$$

То есть

$$\int\limits_{T_{k-1}}^{t_k} (\mu(t) - (k-1))\,dt + \int\limits_{t_k}^{T_k} (\mu(t) - k)\,dt = 0. \tag{34}$$

По определению $n(t) = k$, если $t_k \le t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Поэтому (34) перепишется в виде

$$\int\limits_{T_{k-1}}^{t_k} (\mu(t) - n(t))\,dt + \int\limits_{t_k}^{T_k} (\mu(t) - n(t))\,dt = 0,$$

откуда и следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 6. *Для любых $k = \overline{1, \infty}$ выполняются оценки*

$$\frac{1}{C} \le T_k - T_{k-1} \le \frac{1}{c}, \tag{35}$$

$$t_{k+1} - t_k \ge \frac{1}{C}\left(1 + \sqrt{\frac{C}{c}}\right)^{-1}, \tag{36}$$

где c и C — константы из определения функции μ.

Доказательство.

1) Из определения функции $\mu(t)$ следует, что $c(T_k - T_{k-1}) \le \mu(T_k) - \mu(T_{k-1}) = 1 \le$ $\le C(T_k - T_{k-1})$, откуда и следует (35).

2) Интегрируя по частям левую часть (33), мы получим

$$\int\limits_{t_k}^{T_k} (\mu(T_k) - \mu(t))\,dt = \int\limits_{T_{k-1}}^{t_k} (\mu(t) - \mu(T_{k-1}))\,dt. \tag{37}$$

По определению функции $\mu(t)$ $\mu(T_k) - \mu(t) \ge c(T_k - t)$ и $\mu(t) - \mu(T_{k-1}) \le C(t - T_{k-1})$. Из двух последних неравенств и из (37) мы получаем $\int\limits_{t_k}^{T_k} (T_k - t)\,dt \le C \int\limits_{T_{k-1}}^{t_k} (t - T_{k-1})\,dt$. Следовательно, $c(T_k - t_k)^2 \le C(t_k - T_{k-1})^2$. Из последнего неравенства и из (35) получаем $t_k - T_{k-1} \ge \frac{1}{C}\left(1 + \sqrt{\frac{C}{c}}\right)^{-1}$. Учитывая, что $t_k - t_{k-1} \ge t_k - T_{k-1}$, получим (36).

Лемма доказана.

Пусть $u(z)$ — некоторая субгармоническая функция с ассоциированной мерой $d\mu(t)$, $z \in \mathbb{C}$. Обозначим $B_n = B(0, T_n)$ — круг с центром в начале координат и радиусом T_n. Тогда в круге B_n имеет место представление Рисса:

$$u(z)=\int\limits_0^{T_k}\ln|z-t|\,d\mu(t)+H_n(z), \tag{38}$$

где $H_n(z)$ — некоторая функция, гармоническая в B_n (см. [8]). Пусть $H_n(z)=Re\,g_n(z)$, где $g_n(z)$ — функция, голоморфная в B_n. Положим

$$f_n(z)=e^{g_n(z)}\prod_{t_k\in B_n}(z-t_k).$$

Теорема 4. *Последовательность функций $f_n(z)$ сходится равномерно на компактах из $\mathbb{C}$ к целой функции $f(z)$ и для любого $\delta>0$ вне кругов $B(t_k,\delta)$, $k=0,1,...$, выполняется оценка*

$$|\ln|f(z)|-u(z)|\le A,$$

где A — некоторая положительная константа, зависящая только от C,c и δ.

Доказательство.

Докажем сначала, что для любых $\delta>0$, $s,n=\overline{0,\infty}$, $s>n$, вне множества

$$E_n^s(\delta)=\{z\in\mathbb{C}:\ T_n-\delta<Re\,z<T_s+\delta,\ |Im\,z|<\delta\}$$

выполняется соотношение

$$\left|\int_{T_n}^{T_s}\ln|z-t|\,d(\mu(t)-n(t))\right|\le\frac{2}{\delta c}\left(arctg\,\frac{T_s-x}{\delta}-arctg\,\frac{T_n-x}{\delta}\right), \tag{39}$$

где $z=x+iy$.

Для сокращения записи функцию $\ln|z-t|$ будем обозначать через $L(z,t)$. Дважды интегрируя по частям, учитывая определение точек T_k и пункт 2 леммы 5, получим

$$\int_{T_n}^{T_s}\ln|z-t|\,d(\mu(t)-n(t))=-\int_{T_n}^{T_s}L'_t(z,t)(\mu(t)-n(t))\,dt=$$

$$=\int_{T_n}^{T_s}L''_{tt}(z,t)\left(\int_{T_n}^{t}(\mu(\tau)-n(\tau)\,d\tau\right)dt.$$

Пусть $z=x+iy$, тогда

$$L''_{tt}=\frac{y^2-(x-t)^2}{(y^2+(x-t)^2)^2},$$

следовательно,

$$|L''_{tt}|\le\frac{1}{y^2+(x-t)^2}.$$

Кроме того, в силу пункта 1 леммы 5 и соотношения (35) для точек $t\in[T_{k-1};T_k]$ имеем $(n<k\le s)$

$$\left|\int_{T_n}^{t}(\mu(\tau)-n(\tau))\,d\tau\right|=\left|\int_{T_{k-1}}^{t}(\mu(\tau)-n(\tau))\,d\tau\right|\le 2(T_k-T_{k-1})\le\frac{2}{c}.$$

На основе последних двух оценок для $z\notin E_n^s(\delta)$ получим

$$\left|\int\limits_{T_n}^{T_s}\ln|z-t|\,d(\mu(t)-n(t))\right|\le\frac{2}{c}\int\limits_{T_n}^{T_s}\frac{dt}{(t-x)^2+\delta^2}.$$

Вычислив последний интеграл, получим (39).

Возьмем произвольный компакт K на плоскости и индекс m такой, что $K\subset B(0,T_{m-1})$. Для точек $z\in K$ и индексов $s>n>m$ имеем

$$|\ln|f_s(z)|-\ln|f_n(z)||=|(\ln|f_s(z)|-u(z))+(u(z)-\ln|f_n(z)|)|=$$

$$= \left| \int_0^{T_s} \ln|z-t|\, d(n(t)-\mu(t)) + \int_0^{T_n} \ln|z-t|\, d(\mu(t)-n(t)) \right| = \left| \int_{T_n}^{T_s} \ln|z-t|\, d(\mu(t)-n(t)) \right|.$$

По выбору индекса m точка $z \in K \subset B(0,T_{m-1})$, значит в силу соотношения (35) $Re\, z \le T_{m-1} \le T_m - \frac{1}{C} < T_n - \frac{1}{C}$. Можем применить (39) для постоянной $\delta = \frac{1}{C}$:

$$|\ln|f_s(z)| - \ln|f_n(z)|| \le \frac{2C}{c}\left(arctg\, C(T_s - x) - arctg\, C(T_n - x) \right).$$

Выражение в правой части при $n, s \to \infty$ стремится к нулю равномерно по $z \in K$. Таким образом, последовательность функций $\ln|f_s(z)|$ равномерно фундаментальна на компактах. Учитывая определение этих функций по теореме Коши, получим, что последовательность аналитических функций $f_s(z)$ имеет равномерный на компактах предел, который обозначим через $f(z)$.

Докажем требуемые оценки для функции $\ln|f(z)|$. Вначале рассмотрим точки $z \in \mathbb{C}$, лежащие вне полосы $|Im\, z| < \delta$. Если индекс s такой, что $|z| < T_s$, то по определению функции f_s

$$|u(z) - \ln|f_s(z)|| = \left| \int_0^{T_s} \ln|z-t|\, d(\mu(t)-n(t)) \right|.$$

Поскольку $|Im\, z| > \delta$, то по (39) для $z \notin E_0^s(\delta)$

$$|u(z) - \ln|f_s(z)|| \le \frac{2}{\delta c}\left(arctg\, \frac{T_s - x}{\delta} + arctg\, \frac{x}{\delta} \right) \le \frac{2\pi}{\delta c}. \tag{40}$$

Пусть теперь $|Im\, z| \le \delta$ и для всех $k = 0, 1, \ldots$ $|z - t_k| \ge \delta$. Через m обозначим такой индекс, что

$$|t_m - z| = \min_k |t_k - z|.$$

Тогда в силу оценок (36) имеем

$$\begin{aligned} 0 < x - t_{m-1} < \frac{t_m - t_{m-1}}{2} \le \frac{1}{c}, \\ 0 < t_{m+1} - x < \frac{t_{m+1} - t_m}{2} \le \frac{1}{c}. \end{aligned} \tag{41}$$

Кроме того, для $k = m-3, \ldots, m+2$ в силу (36) верны оценки

$$\delta < |z - t_k| < |x - t_k| + |y| < |t_{m+2} - t_{m-3}| + \delta \le \frac{5}{c} + \delta.$$

Следовательно, для $k = m-3, \ldots, m+2$

$$|\ln|z - t_k|| \le \max(|\ln \delta|, |\ln(\frac{5}{c} + \delta)|) := M_1(\delta, c). \tag{42}$$

Далее интегрированием по частям получим

$$\left| \int_{T_{m-3}}^{T_{m+2}} \ln|z-t|\, d\mu(t) \right| = \left| \int_{T_{m-3}}^{T_{m+2}} \ln|z-t|\, d(\mu(t) - \mu(x)) \right| \le$$

$$\le (\mu(T_{m+2}) - \mu(x))|\ln|z - T_{m+2}|| + (\mu(x) - \mu(T_{m-3}))|\ln|z - T_{m-3}|| + \left| \int_{T_{m-3}}^{T_{m+2}} \frac{|\mu(t) - \mu(x)|}{|z-t|}\, d\mu(t) \right|.$$

По условиям на функцию $\mu(t)$ для $t \in [T_{m-3}; T_{m+2}]$ выполняются оценки

$$|\mu(x) - \mu(t)| \le |x - t|,\ |\mu(x) - \mu(t)| \le |\mu(T_{m+2}) - \mu(T_{m-3})| = 5.$$

Поэтому

$$\left| \int_{T_{m-3}}^{T_{m+2}} \ln|z-t|\, d\mu(t) \right| \le$$

$$\leq 5|\ln|z-T_{m+2}||+5|\ln|z-T_{m-3}||+(T_{m-3}-T_{m+2}).$$

По выбору индекса m и в силу (35) теперь имеем

$$\left|\int_{T_{m-3}}^{T_{m+2}}\ln|z-t|\,d\mu(t)\right|\leq 5|\ln(\delta^2+\frac{2}{5}c^2)|+\frac{5}{c}. \tag{43}$$

Возьмем произвольную точку z, лежащую в полосе $|Im\,z|<\delta$, но вне кругов $B(t_k,\delta)$, $k=0,1,...$ Если индекс s таков, что $|z|<T_{s-3}$, а точка t_m — ближайшая к z, то

$$|u(z)-\ln|f_s(z)||=\left|\int_0^{T_s}\ln|z-t|d(\mu(t)-n(t))\right|=\left|\int_0^{T_{m-3}}\ln|z-t|d(\mu(t)-n(t))\right|+$$

$$+\left|\int_{T_{m-3}}^{T_{m+2}}\ln|z-t|d\mu(t)\right|+\left|\int_{T_{m-3}}^{T_{m+2}}\ln|z-t|dn(t)\right|+\left|\int_{T_{m+2}}^{T_s}\ln|z-t|d(\mu(t)-n(t))\right|.$$

По выбору индекса m и по соотношениям (35) имеем

$$x>t_{m-1}>T_{m-2}>T_{m-3}+\frac{1}{C},$$

$$x<t_{m+1}<T_{m+1}<T_{m+2}-\frac{1}{C}.$$

Для первого и последнего интеграла применим (39) с $\delta=\frac{1}{C}$:

$$\left|\int_0^{T_{m-3}}\ln|z-t|d(\mu(t)-n(t))\right|\leq\frac{2C\pi}{c},$$

$$\left|\int_{T_{m+2}}^{T_s}\ln|z-t|d(\mu(t)-n(t))\right|\leq\frac{2C\pi}{c}.$$

Второй и третий интеграл оцениваются по соотношениям (42) и (43).

Теорема 4 доказана.

Теорема 4 позволяет построить целую функцию требуемого роста. Пусть D — выпуклый многоугольник и d_j — длина стороны, перпендикулярной направлению $\{re^{i\varphi_j},\ r>0\}$, $j=1,2,...,n$. Тогда мера, ассоциированная с опорной функцией $u(re^{i\varphi})=h(\varphi)r$ многоугольника D, равна сумме мер $d_j\mu_j$, где μ_j — линейная мера Лебега на луче $\{re^{i\varphi_j},\ r>0\}$. Пусть число d определено из условия $dd_1=\frac{1}{2}$.

Представим меру μ_1 в виде суммы ее сужений на отрезок $[0,d]$ и на луч $(d,\infty):\ \mu_1={\mu_1}''+{\mu_1}'$. Тогда, очевидно, $\mu_1''(\mathbb{C})=\frac{1}{2d_1}$.

Если $v(z)$ — субгармоническая функция, ассоциированная мера которой совпадает с линейной мерой dx на положительной полуоси, то по теореме 4 существует целая функция $f(z)$, которая вне кругов с радиусами $\delta>0$ и центрами в своих нулях удовлетворяет условию

$$v(z)-A(\delta)\leq\ln|f(z)|\leq v(z)+A(\delta), \tag{44}$$

где $A(\delta)$ — некоторая константа, зависящая только от δ (для $\mu(x)=x,c=C=1$). Положим

$$u_0(z)=\int\ln|z-w|\,d\mu_1''(w).$$

Ассоциированная мера функции $v((z+d)e^{-i\varphi_1})$ совпадает с ${\mu_1}'$, а ассоциированные меры функций $v(ze^{-i\varphi_j})$, $j=2,3,...,n$, совпадают соответственно с мерами μ_j. Следовательно, ассоциированные меры функций $u(re^{i\varphi})$ и $d_1u_0+d_1v((z+d)e^{-i\varphi_1})+d_2v(ze^{-i\varphi_2})+...+$ $+d_nv(ze^{-i\varphi_n})$ совпадают. Значит,

$$u(re^{i\varphi})=d_1u_0+d_1v((z+d)e^{-i\varphi_1})+d_2v(ze^{-i\varphi_2})+...+d_nv(ze^{-i\varphi_n})+H(z),$$

где $H(z)$ — гармонична на всей плоскости. Пусть $G(z)$ — целая функция такая, что $Re\ G(z) = H(z)$.

В силу соотношения (44) имеем

$$d_1 v((z+d)e^{-i\varphi_1}) - A_1(\delta) \le \ln|f((z+d)e^{-i\varphi_1})| \le d_1 v((z+d)e^{-i\varphi_1}) + A_1(\delta), \tag{45}$$

$$d_j v(ze^{-i\varphi_j}) - A_j(\delta) \le \ln|f(ze^{-i\varphi_j})| \le d_j v(ze^{-i\varphi_j}) + A_j(\delta),\ j = 2, ..., n. \tag{46}$$

Кроме того, т.к. $\mu_1''(\mathbb{C}) = \frac{1}{2d_1}$, то при больших z ($|z| > 2d$)

$$\frac{1}{2}\ln|z| + \ln\frac{1}{2} \le d_1 u_0(z) \le \frac{1}{2}\ln|z| + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}. \tag{47}$$

Теперь положим

$$L(z) = f((z+d)e^{-i\varphi_1}) f(ze^{-i\varphi_2}) ... f(ze^{-i\varphi_n}) e^{G(z)}.$$

Из соотношений (45), (46), (47) видим, что $L(z)$ удовлетворяет всем условиям и принадлежит $\tilde{S}_D$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гайер Д. *Лекции по теории аппроксимации в комплексной области.* М.: Мир. 1986.
2. Никольский Н.К., Павлов Б.С., Хрущев С.В. *Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер. I.* // Препринт ЛОМИ. С. 8–80.
3. Левин Б.Я., Любарский Ю.И. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. АН СССР. Сер. матем. Т. 39. № 3. 1975. С. 657–702.
4. Любарский Ю.И. *Ряды экспонент в пространствах Смирнова и интерполяция целыми функциями специальных классов* // Изв. АН СССР. Сер. матем. Т. 52. № 3. 1988. С. 559–580.
5. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *Об отсутствии безусловных базисов из экспонент в пространствах Бергмана на областях, не являющихся многоугольниками* // Изв. РАН. Серия матем. Т 71. № 6. 2007. С. 69–90.
6. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *Преобразование Лапласа функционалов на пространствах Бергмана* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 68. № 4. 2004. С. 5–42.
7. Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций* // Сиб. мат. журн. Т. 26. № 4. 1985. С. 159–175.
8. Ландкоф Н.С. *Основы современной теории потенциала.* М.: Наука. 1966.

Константин Петрович Исаев,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: orbit81@list.ru

УДК 517.5

ПОЧТИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ БАЗИС

А.С. КРИВОШЕЕВ

Аннотация. В работе изучаются почти экспоненциальные последовательности функций, аналитических в выпуклой области. Рассматриваются ряды по системам таких функций. Получено описание пространства последовательностей коэффициентов подобных рядов. Показывается также, что почти экспоненциальный базис всегда является и базисом Кете.

Ключевые слова: аналитическая функция, выпуклая область, экспонента, базис.

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $\{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ — последовательность выпуклых компактов, исчерпывающая область D, т.е. выполнено следующее: 1) $K_p \subset intK_{p+1}$ для всех $p \geq 1$ (int обозначает внутренность множества), 2) $D = \bigcup_{p=1}^{\infty} K_p$. Пусть $H_M(z)$ обозначает опорную функцию множества M (точнее говоря, комплексно сопряженного с M множества):

$$H_M(z) = \sup_{w \in M} \mathrm{Re}(zw), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда из условия 1) следует, что для каждого $p \geq 1$ существует число $\alpha_p > 0$ такое, что

$$H_{K_p}(z) + \alpha_p |z| \leqslant H_{K_{p+1}}(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Последовательность функций $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$, аналитических в области D, будем называть почти экспоненциальной, если найдутся числа $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$, $|\lambda_m| \to \infty$ при $m \to \infty$, для которых выполнены два условия: 1) для каждого $p \geq 1$ существуют постоянная $a > 0$ и номер s такие, что

$$\sup_{w \in K_p} |e_m(w)| \leqslant a \exp(H_{K_s}(\lambda_m)), \quad m = 1, 2, \ldots;$$

2) для каждого $p \geq 1$ существуют постоянная $b > 0$ и номер s такие, что

$$b \exp(H_{K_p}(\lambda_m)) \leqslant \sup_{w \in K_s} |e_m(w)|, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Числа $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$ будем называть показателями функций $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$. Условия 1 и 2 означают, что последовательность $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ в некотором смысле схожа с последовательностью экспонент $\{\exp(\lambda_m z)\}_{m=1}^{\infty}$. Действительно, из условия 1 с учетом определения опорной функции получаем соотношения:

$$\sup_{w \in K_p} |e_m(w)| \leqslant a \exp(H_{K_s}(\lambda_m)) = a \sup_{w \in K_s} \exp(\mathrm{Re}(\lambda_m w)) = a \sup_{w \in K_s} |\exp(\lambda_m w)|, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Условие 2 дает аналогичную оценку снизу на модуль функции $e_m(w)$. Очевидно, что указанная последовательность экспонент является почти экспоненциальной последовательностью. В качестве примера последней рассмотрим еще семейство функций

A.S. Krivosheyev, An almost exponential basis.

Поступила 10 января 2010 г.

$\{z^n \exp(\lambda_m z)\}_{m=1,n=1}^{\infty,k_m}$. В работе [1] в предложении 2.3 по сути показано, что в случае ограниченной области D при условии $k_m/|\lambda_m| \to 0$ это семейство является почти экспоненциальной последовательностью. Более того, можно показать, что в случае ограниченной выпуклой области D условие $k_m/|\lambda_m| \to 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы семейство функций $\{z^n \exp(\lambda_m z)\}_{m=1,n=1}^{\infty,k_m}$ было почти экспоненциальной последовательностью.

Перейдем теперь к исследованию вопросов сходимости рядов вида

$$\sum_{m=1}^{\infty} d_m e_m(z), \tag{2}$$

где $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность функций в выпуклой области D.

Прежде всего опишем пространство коэффициентов $d = \{d_m\}$ рядов (2), сходящихся равномерно на компактах в области D. Пусть $\Lambda = \{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$, $|\lambda_m| \to \infty$ при $m \to \infty$. Для каждого $p \geq 1$ введем банахово пространство числовых последовательностей

$$Q_p(\Lambda) = \{d = \{d_m\} : ||d||_p = \sup_m (|d_m| \exp(H_{K_p}(\lambda_m))) < \infty\}.$$

Положим $Q(\Lambda, D) = \bigcap_{p=1}^{\infty} Q_p(\Lambda)$. На пространстве $Q(\Lambda, D)$ определим метрику по формуле

$$\rho(d, d') = \sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p} \frac{||d - d'||_p}{1 + ||d - d'||_p}.$$

С этой метрикой $Q(\Lambda, D)$ становится пространством Фреше. Сходимость по метрике равносильна сходимости в каждом $Q_p(\Lambda)$, $p \geq 1$. Таким образом, $Q(\Lambda, D)$ является проективным пределом пространств $Q_p(\Lambda)$.

Лемма 1. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$. Предположим, что для системы $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ выполнен пункт 2 из определения почти экспоненциальной последовательности в D с показателями $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$. Предположим, что ряд (2) сходится равномерно на каждом компакте области D. Тогда верно включение $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$.*

Доказательство. Фиксируем номер $p \geq 1$. По условию существуют постоянная $b > 0$ и номер s такие, что

$$b \exp(H_{K_p}(\lambda_m)) \leqslant \sup_{w \in K_s} |e_m(w)|, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

В силу равномерной сходимости ряда (2) на компакте K_s найдется номер N такой, что для всех $m > N$ и всех $w \in K_s$ выполнено неравенство $|d_m||e_m(w)| \leqslant 1$. Следовательно, имеет место также оценка $|d_m| \sup_{w \in K_s} |e_m(w)| \leqslant 1$, $m > N$. Отсюда с учетом (3) получаем:

$$b|d_m| \exp(H_{K_p}(\lambda_m)) \leqslant 1, \quad m > N.$$

Таким образом, $d = \{d_m\} \in Q_p(\Lambda)$. В силу произвольности p это означает, что верно включение $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$. Лемма доказана.

Далее мы покажем, что при некотором условии на рост показателей λ_m верно утверждение, обратное к лемме 1. Введем следующую характеристику роста последовательности Λ:

$$\Im(\Lambda) = \overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{\ln m}{|\lambda_m|}.$$

В книге [2] величина $\Im(\Lambda)$ использовалась для оценки расстояния между абсциссами простой и абсолютной сходимости ряда Дирихле. В частности, там показано, что при $\Im(\Lambda) = 0$

эти абсциссы совпадают. Такое становится возможным благодаря тесной связи между величиной $\Im(\Lambda)$ и сходимостью ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \exp(-\varepsilon|\lambda_m|). \tag{4}$$

Эта связь отражена в следующей лемме.

Лемма 2. *Ряд (4) сходится для любого $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда $\Im(\Lambda) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\Im(\Lambda) = 0$. Тогда для каждого $\delta > 0$ существует номер $N(\delta)$ такой, что $\ln m < \delta|\lambda_m|$ для всех $m \geq N(\delta)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta < \varepsilon$. Имеем:

$$\sum_{m=N(\delta)}^{\infty} \exp(-\varepsilon|\lambda_m|) < \sum_{m=N(\delta)}^{\infty} \exp(-\frac{\varepsilon \ln m}{\delta}) = \sum_{m=N(\delta)}^{\infty} \frac{1}{m^{\frac{\varepsilon}{\delta}}} < \infty.$$

Следовательно, ряд (4) сходится для любого $\varepsilon > 0$. Покажем обратное. Пусть верно последнее утверждение. Поскольку члены ряда (4) положительны, то их перестановка не влияет на сходимость ряда. Поэтому можно считать, что λ_m пронумерованы по возрастанию модулей, т.е. $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots$. Кроме того, если последовательность $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена, то ряд (4) расходится. Следовательно, $|\lambda_m| \to \infty$, когда $m \to \infty$. Дальнейшее доказательство проведем от противного. Предположим, что $\Im(\Lambda) = 4c > 0$. Тогда существует подпоследовательность натуральных чисел $\{m(j)\}_{j=1}^{\infty}$ такая, что $\ln m(j) \geq 2c|\lambda_{m(j)}|$, $j = 1, 2, \ldots$ Переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что $2|\lambda_{m(j)}| \leqslant |\lambda_{m(j+1)}|$, $j = 1, 2, \ldots$ Составим теперь новую подпоследовательность $m(j,l)$, $j = 1, 2, \ldots$, $l = 1, 2, \ldots, j'$, где j' — целая часть числа $m(j)/2$. Положим $m(j,l) = m(j) - j' + l$. В силу возрастания модулей λ_m имеем:

$$\frac{\ln m(j,l)}{|\lambda_{m(j,l)}|} \geq \frac{\ln m(j,l)}{|\lambda_{m(j)}|} \geq \frac{\ln m(j,1)}{|\lambda_{m(j)}|} \geq \frac{\ln m(j) - \ln 2}{|\lambda_{m(j)}|} \geq 2c - \frac{\ln 2}{|\lambda_{m(j)}|}.$$

Так как $|\lambda_m| \to \infty$, то найдется номер j_0 такой, что

$$\frac{\ln m(j,l)}{|\lambda_{m(j,l)}|} \geq c, \quad j \geq j_0, \quad l = 1, 2, \ldots, j'.$$

Отсюда для всех $j \geq j_0$ и $\varepsilon = c$ получаем:

$$\sum_{m=m(j)-j'+1}^{m(j)} \exp(-\varepsilon|\lambda_m|) = \sum_{l=1}^{j'} \exp(-\varepsilon|\lambda_{m(j,l)}|) \geq \sum_{l=1}^{j'} \exp(\frac{-\varepsilon}{c} \ln m(j,l)) =$$

$$= \sum_{l=1}^{j'} \frac{1}{m(j,l)^{\frac{\varepsilon}{c}}} = \sum_{l=1}^{j'} \frac{1}{m(j,l)} \geq \frac{j'}{m(j)} \geq \frac{2^{-1}m(j) - 1}{m(j)}.$$

Поскольку $m(j) \to \infty$, когда $j \to \infty$, то это противоречит сходимости ряда (4) при $\varepsilon = c$. Таким образом, $\Im(\Lambda) = 0$ и лемма доказана.

Покажем теперь, что при условии $\Im(\Lambda) = 0$ имеет место утверждение, обратное к лемме 1 и даже более сильное.

Лемма 3. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$. Предположим, что для системы $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ выполнен пункт 1 из определения почти экспоненциальной последовательности в D с показателями $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$ такими, что $\Im(\Lambda) = 0$. Пусть далее $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$. Тогда для каждого номера $p \geq 1$ существует номер s и постоянная $A > 0$, не зависящие от $d = \{d_m\}$, для которых выполнено неравенство*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z\in K_p} |e_m(z)| \leqslant A||d||_s.$$

В частности, ряд (2) сходится абсолютно и равномерно на каждом компакте области D.

Доказательство. Пусть $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$. Фиксируем номер $p \geq 1$. По условию найдется номер s и постоянная $a > 0$ такие, что

$$\sup_{w\in K_p} |e_m(w)| \leqslant a \exp(H_{K_{s-1}}(\lambda_m)), \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно, мы имеем:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z\in K_p} |e_m(z)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \exp(H_{K_{s-1}}(\lambda_m)) =$$

$$= a \sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \exp(H_{K_s}(\lambda_m)) \exp(H_{K_{s-1}}(\lambda_m) - H_{K_s}(\lambda_m)) \leqslant$$

$$\leqslant a||d||_s \sum_{m=1}^{\infty} \exp(H_{K_{s-1}}(\lambda_m) - H_{K_s}(\lambda_m)) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-\alpha_{s-1}|\lambda_m|).$$

При получении последней оценки мы воспользовались неравенством (1). Учитывая лемму 2, окончательно получаем:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z\in K_p} |e_m(z)| \leqslant A||d||_s < \infty,$$

где номер s и постоянная A зависят лишь от функций e_m, чисел λ_m, $m \geq 1$ и номера p. Лемма доказана.

Сравнивая лемму 1 и лемму 3, легко заметить, что при условии $\Im(\Lambda) = 0$ равномерная сходимость ряда (2) влечет за собой его абсолютную сходимость. Более точно, имеет место следующее утверждение.

Следствие. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$; $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность в D с показателями $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$, такими, что $\Im(\Lambda) = 0$. Предположим, что ряд (2) сходится равномерно на каждом компакте области D. Тогда для каждого номера $p \geq 1$ существует номер s и постоянная $A > 0$, не зависящая от $d = \{d_m\}$, для которых выполнено неравенство*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z\in K_p} |e_m(z)| \leqslant A||d||_s.$$

В частности, ряд (2) сходится абсолютно в области D.

Отметим, что условие $\Im(\Lambda) = 0$ в лемме 3 в случае ограниченной выпуклой области D является необходимым на всем классе последовательностей $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$, что и подтверждает следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$; $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность в D с показателями $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$. Предположим, что для всех $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$ и каждого номера $s = 1, 2, \ldots$ сходится ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z\in K_s} |e_m(z)|.$$

Тогда верно равенство $\Im(\Lambda) = 0$.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку последовательность компактов $\{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ исчерпывает область D, а последняя ограничена, то найдется номер $p = 1, 2, \dots$ такой, что выполняется неравенство

$$H_D(z) \leqslant H_{K_p}(z) + \varepsilon|z|, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Согласно определению почти экспоненциальной последовательности существуют постоянная $b > 0$ и номер s, удовлетворяющие условию

$$b \exp(H_{K_p}(\lambda_m)) \leqslant \sup_{w \in K_s} |e_m(w)|, \quad m = 1, 2, \dots \tag{6}$$

Положим $d_m = \exp(-H_{K_m}(\lambda_m))$, $m = 1, 2, \dots$ Используя неравенство (1) для каждого $l = 1, 2, \dots$, имеем:

$$\sup_{m \geq l}(|d_m| \exp(H_{K_l}(\lambda_m))) = \sup_{m \geq l}(\exp(H_{K_l}(\lambda_m) - H_{K_m}(\lambda_m))) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{m \geq l}(\exp(H_{K_m}(\lambda_m) - H_{K_m}(\lambda_m))) = 1.$$

Это означает, что $d = (d_m) \in Q_l(\Lambda)$. В силу произвольности номера l верно также включение $d \in Q(\Lambda, D)$. Тогда по условию леммы сходится ряд $\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z \in K_s} |e_m(z)|$. Учитывая это, неравенства (5),(6) и то, что $H_{K_m}(z) \leqslant H_D(z)$, $z \in \mathbb{C}$, (в силу вложения $K_m \subset D$), $m = 1, 2, \dots$, получаем:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \exp(-\varepsilon|\lambda_m|) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \exp(H_{K_p}(\lambda_m) - H_D(\lambda_m)) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \exp(H_{K_p}(\lambda_m) - H_{K_m}(\lambda_m)) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} d_m \exp(H_{K_p}(\lambda_m)) \leqslant b^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} d_m \sup_{z \in K_s} |e_m(z)| = b^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z \in K_s} |e_m(z)| < \infty.$$

Таким образом, ряд (4) сходится для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, по лемме 2 мы получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Из доказанных утверждений следует, что для почти экспоненциальной последовательности $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ в выпуклой области D с показателями $\Lambda = \{\lambda_m\}$ такими, что $\Im(\Lambda) = 0$, множество последовательностей коэффициентов $d = \{d_m\}$, при которых ряд (2) сходится равномерно на компактах из D, совпадает с множеством $Q(\Lambda, D)$. Оказывается верно и обратное. Более точно, имеет место

Теорема 1. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda_m\}$ — последовательность комплексных чисел такая, что $\Im(\Lambda) = 0$. Тогда равносильны следующие утверждения.*

1) $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность в D с показателями λ_m.

2) Множество последовательностей коэффициентов $d = \{d_m\}$, при которых ряд (2) сходится равномерно на компактах из D, совпадает с множеством $Q(\Lambda, D)$, и функции $e_m(w)$ отличны от тождественного нуля, $m \geq 1$.

Доказательство. 1)⇒2). Эта импликация уже установлена в леммах 1 и 3.

2)⇒1). Предположим, что ряд (2) сходится равномерно на компактах из области D для каждой последовательности коэффициентов $d \in Q(\Lambda, D)$. Покажем, что в этом случае выполнен пункт 1 из определения почти экспоненциальной последовательности. Проведем доказательство от противного. Допустим, что пункт 1 не выполняется. Тогда найдется номер $p \geq 1$ такой, что для каждого $s \geq 1$ и некоторого номера m_s верно неравенство

$$\sup_{w \in K_p} |e_{m_s}(w)| \geq \exp(H_{K_s}(\lambda_{m_s})). \tag{7}$$

При этом очевидно можно считать, что $m_s \to \infty$, когда $s \to \infty$. Рассмотрим последовательность $d = \{d_m\}$, где $d_{m_s} = \exp(-H_{K_s}(\lambda_{m_s}))$, $s \geq 1$, и $d_m = 0$ для всех номеров m, отличных от m_s, $s \geq 1$. С учетом (1) и определения d_m для каждого номера $l \geq 1$ имеем:

$$|d_m| \exp(H_{K_l}(\lambda_m)) \leqslant 1, \quad m \geq l.$$

Следовательно, $d = \{d_m\}$ является элементом пространства $Q(\Lambda, D)$. Тогда по условию ряд (2) с этими коэффициентами d_m сходится равномерно на компактах из D. В частности, это означает, что $|d_m| \sup_{w \in K_p} |e_m(w)| \to 0$ при $m \to \infty$. С другой стороны, в силу (7) и определения чисел d_{m_s} верно неравенство

$$d_{m_s} \sup_{w \in K_p} |e_{m_s}(w)| = \exp(-H_{K_s}(\lambda_{m_s})) \sup_{w \in K_p} |e_{m_s}(w)| \geq 1, \quad s \geq 1.$$

Это противоречит предыдущему, поскольку $m_s \to \infty$, когда $s \to \infty$. Таким образом, наше допущение неверно, т.е. для $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ выполнен пункт 1 из определения почти экспоненциальной последовательности. Покажем, что для $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ выполнен также и пункт 2 из этого определения. Предположим, что это не так. Тогда, учитывая, что $e_m(w)$ отлична от тождественного нуля, $m \geq 1$, найдем номер $p \geq 1$ такой, что для каждого $s \geq 1$ и некоторого m_s имеет место неравенство

$$\exp(H_{K_p}(\lambda_{m_s})) \geq \sup_{w \in K_s} |e_{m_s}(w)|. \tag{8}$$

При этом можно считать, что $|\lambda_{m_s}| \geq s$ для всех $s \geq 1$. Рассмотрим последовательность $d = \{d_m\}$ где $d_{m_s} = \exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m_s}))$, $s \geq 1$, и $d_m = 0$ для всех остальных номеров m. В силу определения чисел d_m для всех $l \geq 1$ имеем:

$$m \sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z \in K_l} |e_(z)| = \sum_{s=1}^{\infty} |d_{m_s}| \sup_{z \in K_l} |e_{m_s}(z)| = \sum_{s=1}^{\infty} \exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m_s})) \sup_{z \in K_l} |e_{m_s}(z)| =$$

$$= \sum_{s=1}^{l} \exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m_s})) \sup_{z \in K_l} |e_{m_s}(z)| + \sum_{s=l+1}^{\infty} \exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m_s})) \sup_{z \in K_l} |e_{m_s}(z)|.$$

Так как K_j — возрастающая последовательность компактов, то с учетом неравенств (8) и (1) получаем отсюда

$$m \sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z \in K_l} |e_(z)| \leqslant \sum_{s=1}^{l} \exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m_s})) \sup_{z \in K_l} |e_{m_s}(z)| +$$

$$+ \sum_{s=l+1}^{\infty} \exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m_s})) \sup_{z \in K_l} |e_{m_s}(z)| \leqslant \sum_{s=1}^{l} \exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m_s})) \sup_{z \in K_l} |e_{m_s}(z)| +$$

$$+ \sum_{s=l+1}^{\infty} \exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m_s})) \exp(H_{K_p}(\lambda_{m_s})) \leqslant \sum_{s=1}^{l} \exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m_s})) \sup_{z \in K_l} |e_{m_s}(z)| +$$

$$+ \sum_{s=l+1}^{\infty} \exp(-\alpha_p |\lambda_{m_s}|).$$

Поскольку $|\lambda_{m_s}| \geq s$ для всех $s \geq 1$, то $\ln s / |\lambda_{m_s}| \to 0$, когда $s \to \infty$. Тогда по лемме 2 последний ряд сходится. Это означает, что ряд (2) с выбранной нами последовательностью коэффициентов $d = \{d_m\}$ сходится равномерно на каждом компакте K_l, $l \geq 1$, а так как последовательность $\{K_l\}$ исчерпывает область D, то и на любом компакте из D.

Следовательно, по условию $d = \{d_m\}$ должна принадлежать множеству $Q(\Lambda, D)$. С другой стороны, в силу определения последовательности $d = \{d_m\}$ с учетом неравенства (1) имеем:

$$||d||_{p+1} = \sup_m(|d|_m \exp(H_{K_{p+2}}(\lambda_m))) = \sup_s(|d_{m_s}| \exp(H_{K_{p+2}}(\lambda_{m_s}))) =$$

$$= \sup_s(\exp(H_{Kp+1}(\lambda_{m_s})) \exp(H_{K_{p+2}}(\lambda_{m_s}))) \geq \sup_s(\exp(\alpha_{p+1}|\lambda_{m_s}|) = \infty,$$

т.е. $d = \{d_m\}$ не принадлежит $Q(\Lambda, D)$. Полученное противоречие означает, что для $\{e_m\}_{m=1}^\infty$ выполнен пункт 2 из определения почти экспоненциальной последовательности.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Приведем еще некоторую модификацию теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1) $\{e_m\}_{m=1}^\infty$ — почти экспоненциальная последовательность в D с показателями $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$ и $\Im(\Lambda) = 0$.

2) Множество последовательностей коэффициентов $d = \{d_m\}$, при которых ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z \in K_s} |e_m(z)| \tag{9}$$

сходится для каждого $s \geq 1$, совпадает с множеством $Q(\Lambda, D)$, и функция $e_m(w)$ отлична от тождественного нуля, $m \geq 1$.

Доказательство. 1)⇒2). Эта импликация уже установлена в леммах 1 и 3, поскольку сходимость ряда (9) для всех $s \geq 1$ влечет за собой равномерную сходимость ряда (2) на каждом компакте из области D.

2)⇒1). Пусть ряд (9) сходится для каждой последовательности коэффициентов $d \in Q(\Lambda, D)$ и всех $s \geq 1$. Тогда ряд (2) сходится равномерно на компактах из области D для всех $d \in Q(\Lambda, D)$. Повторяя далее дословно рассуждения из теоремы 1, убеждаемся, что для $\{e_m\}_{m=1}^\infty$ выполнен пункт 1 из определения почти экспоненциальной последовательности. Пункт 2 из этого определения также выполнен для $\{e_m\}_{m=1}^\infty$. Действительно, в противном случае в теореме 1 построена последовательность коэффициентов $d = \{d_m\}$, не принадлежащая множеству $Q(\Lambda, D)$, такая, что ряд (9) сходится для всех $s \geq 1$. Таким образом, $\{e_m\}_{m=1}^\infty$ — почти экспоненциальная последовательность. Тогда с учетом утверждения 2 настоящей теоремы по лемме 4 получаем равенство $\Im(\Lambda) = 0$. Теорема доказана.

Обратимся теперь к основной задаче данной работы. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область, $H(D)$ — пространство функций, аналитических в D с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах D, $\{e_m\}_{m=1}^\infty$ — последовательность функций из $H(D)$. Через W обозначим замыкание в $H(D)$ линейной оболочки системы $\{e_m\}_{m=1}^\infty$. Проблему, стоящую перед нами, можно сформулировать следующим образом: при каких условиях на $\{e_m\}_{m=1}^\infty$ каждая функция из W разлагается в ряд вида (2)? При этом наиболее интересна ситуация, когда такое разложение является единственным, поскольку в этом случае подпространство $W \subset H(D)$ получает наиболее простое описание. В связи с этим приведем соответствующий результат. Но прежде введем еще некоторые определения и обозначения. Будем говорить, что $\{e_m\}_{m=1}^\infty$ является почти экспоненциальным базисом с показателями $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$ в подпространстве W, если $\{e_m\}_{m=1}^\infty$ — почти экспоненциальная последовательность в D с показателями λ_m, и каждая функция из W единственным образом разлагается в ряд вида (2), который сходится равномерно на каждом компакте из области D.

Определим оператор $\aleph$, действующий на пространстве $Q(\Lambda, D)$, со значениями в подпространстве $W \subset H(D)$ по правилу: последовательности $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$ поставим в соответствие сумму ряда (2), сходящегося в топологии пространства $H(D)$.

Пусть $H^*(D)$ обозначает пространство линейных непрерывных функционалов на $H(D)$, называемое еще пространством аналитических функционалов в области D. Последовательность $\{\mu\}_{m=1}^{\infty} \subset H^*(D)$ называется биортогональной к $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$, если $\mu_m(e_m) = 1$ и $\mu_k(e_m) = 0$ при $k \neq m$.

Теорема 3. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda_m\}$ — последовательность комплексных чисел такая, что $\Im(\Lambda) = 0$. Предположим, что $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальный базис с показателями λ_m в W. Тогда оператор $\aleph$ является изоморфизмом линейных топологических пространств $Q(\Lambda, D)$ и W, и существует биортогональная к $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ последовательность функционалов $\{\mu\}_{m=1}^{\infty} \subset H^*(D)$.*

Доказательство. Пусть $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность в D с показателями λ_m такими, что $\Im(\Lambda) = 0$. Тогда по лемме 3 для любой последовательности $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$ ряд (2) сходится равномерно на каждом компакте области D. Поэтому оператор $\aleph$ определен на всем пространстве $Q(\Lambda, D)$. Поскольку $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — базис в W, то любая функция из W раскладывается в ряд (2), сходящийся в топологии $H(D)$. При этом по лемме 1 последовательность его коэффициентов является элементом множества $Q(\Lambda, D)$. Следовательно, оператор $\aleph$ сюръективен. Заметим еще, что по определению почти экспоненциального базиса указанное разложение единственное. Это влечет за собой инъективность $\aleph$. Таким образом, $\aleph$ — биективный линейный оператор. Далее по лемме 3 для любого $p \geq 1$ существует номер s и постоянная $A > 0$, не зависящие от $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$, такие, что

$$\sup_{z \in K_p} |\aleph(d)(z)| = \sup_{z \in K_p} |\sum_{m=1}^{\infty} d_m e_m(z)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z \in K_p} |e_m(z)| \leqslant A||d||_s. \tag{10}$$

Отсюда следует непрерывность оператора $\aleph$. Как уже отмечалось ранее, $Q(\Lambda, D)$ является пространством Фреше. W как замкнутое подпространство пространства Фреше $H(D)$ также является пространством Фреше. Тогда по теореме Банаха об обратном операторе для пространств Фреше $\aleph$ есть изоморфизм линейных топологических пространств $Q(\Lambda, D)$ и W.

Остается доказать существование последовательности $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H^*(D)$ биортогональной к $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$. Пусть g — произвольная функция из W, и $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$ — последовательность коэффициентов разложения g по системе $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ (т.е. $\aleph(d) = g$). Для каждого $m \geq 1$ положим $\mu_m(g) = d_m$. В результате мы получили линейный функционал μ_m на пространстве W. В силу (10) имеем

$$|d_m| \sup_{z \in K_1} |e_m(z)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \sup_{z \in K_1} |e_m(z)| \leqslant A||d||_s, \tag{11}$$

где постоянная A и номер s не зависят от $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, Q)$, а значит и от $g \in W$. По доказанному обратный оператор $\aleph^{-1}$ непрерывен. Поэтому найдется номер l и постоянная $C > 0$ такие, что $||d||_s = ||\aleph^{-1}(g)||_s \leqslant C \sup_{z \in K_l} |g(z)|$ для всех $g \in W$. Отсюда с учетом (11) и определения μ_m получаем

$$|\mu_m(g)| = |d_m| \leqslant A(\sup_{z \in K_1} |e_m(z)|)^{-1} ||d||_s \leqslant A(\sup_{z \in K_1} |e_m(z)|)^{-1} C \sup_{z \in K_l} |g(z)|, \quad g \in W.$$

По теореме Хана-Банаха μ_m продолжается на все пространство $H(D)$ как линейный функционал с сохранением последней оценки, которая влечет за собой непрерывность μ_m на

$H(D)$. По определению μ_m имеем: $\mu_m(e_m) = 1$ и $\mu_m(e_k) = 0$ при $k \neq m$. Таким образом, последовательность $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ лежит в $H^*(D)$ и является биортогональной к $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$. Теорема полностью доказана.

Из теоремы 3 вытекает, что почти экспоненциальный базис $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ в W является базисом Шаудера, т.е. координатные функционалы $\mu_m(g) = d_m$ (которые образуют биортогональную к $\{e_m\}$ систему) непрерывны. Почти экспоненциальный базис обладает и более сильным свойством. Напомним, что базисом Кете в линейном топологическом пространстве L называется система его элементов $\{e_m\}$ такая, что для любого $g \in L$ верно представление

$$g = \sum_{m=1}^{\infty} d_m e_m,$$

где ряд сходится в топологии пространства L, и, кроме того, выполнено следующее: для каждой полунормы $|| \; ||$ существует полунорма $|| \; ||'$ и $\beta > 0$, не зависящие от $g \in L$, такие, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| ||e_m|| \leqslant \beta ||g||'.$$

Следствие. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda\}$ — последовательность комплексных чисел такая, что $\Im(\Lambda) = 0$. Предположим, что $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальный базис с показателями λ_m в W. Тогда $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — базис Кете в W.*

Доказательство. По условию каждая функция $g \in W$ раскладывается в ряд (2), сходящийся равномерно на компактах из области D. При этом, как и в доказательстве теоремы 3, из непрерывности оператора $\aleph^{-1}$ и неравенства в лемме 3 следует, что для любого $p \geq 1$ существуют номер l и постоянная $\beta > 0$, не зависящие от $g \in W$, такие, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z \in K_p} |e_m(z)| \leqslant \beta \sup_{z \in K_l} |g(z)|.$$

Это означает, что $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — базис Кете в W. Следствие доказано.

В заключении параграфа докажем теорему, обратную к теореме 3, и даже формально несколько более общий результат.

Теорема 4. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda\}$ — последовательность комплексных чисел такая, что $\Im(\Lambda) = 0$. Предположим, что оператор $\aleph$ определен на всем пространстве $Q(\Lambda, D)$, сюръективен, и существует биортогональная к $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ последовательность функционалов $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H^*(D)$. Тогда $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальный базис с показателями λ_m в W.*

Доказательство. По условию оператор $\aleph : Q(\Lambda, D) \to W$ сюръективен. Следовательно, любая функция $g \in W$ раскладывается в ряд (2), сходящийся равномерно на компактах из области D. Это разложение единственно, так как его коэффициенты d_m однозначно определяются при помощи биортогональной системы функционалов. Таким образом, $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — базис в W. Остается показать, что $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность с показателями λ_m в W. Согласно теореме 1, для этого достаточно проверить истинность утверждения 2 из этой теоремы.

Отличие от тождественного нуля функций e_m следует из существования биортогональной системы $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$, поскольку $\mu_m(e_m) = 1$, $m \geq 1$. По условию оператор $\aleph$ определен на всем пространстве $Q(\Lambda, D)$. Поэтому для каждого $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$ ряд (2) сходится равномерно на компактах из области D. Обратно. Пусть ряд (2.2) сходится равномерно на компактах из D к функции g. Нужно показать, что последовательность его коэффициентов $d = \{d_m\}$ принадлежит $Q(\Lambda, D)$. По определению подпространства W оно должно содержать g. По условию оператор $\aleph$ сюръективен. Следовательно, функция g раскладывается в ряд вида (2) с коэффициентами $d' = \{d'_m\} \in Q(\Lambda, D)$, равномерно сходящийся на компактах из D. В результате мы имеем два разложения для g. Однако, как и выше, из существования биортогональной к $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ системы функционалов $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H^*(D)$ вытекает, что коэффициенты ряда (2), сходящегося в топологии пространства $H(D)$, однозначно вычисляются как значения функционалов μ_m на функции g. Поэтому $d = d' \in Q(\Lambda, D)$. Таким образом, утверждение 2 из теоремы 1 выполнено. Это завершает доказательство данной теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кривошеев А.С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях* // Известия РАН. Серия математическая. Т. 68. № 2. 2004. С. 71–136.
2. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука. 1976.

Александр Сергеевич Кривошеев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `kriolesya2006@yandex.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 1 (2010). С. 97-109.

УДК 517.54

ПОЛНОТА СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

В.В. НАПАЛКОВ, А.А. РУМЯНЦЕВА, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. Доказаны необходимое и достаточное (отдельно) условия на систему комплексных показателей λ_k, при которых система экспонент $\exp(\lambda_k t)$ полна в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}; a|x|^\alpha)$, где $\alpha \in (1; 2], a > 0$.

Ключевые слова: полнота систем экспонент, преобразвание Фурье-Лапласа, выпуклая функция, целая функция.

Введение

Данная статья является развернутым изложением материала работы опубликованной в [1].

Работа, посвящена исследованию следующей задачи, заинтересовавшей специалистов по математической физике: выяснить условия на возрастающую последовательность положительных вещественных чисел λ_k, $k = 1, 2, ...$, при выполнении которых из того, что для непрерывной ограниченной функции f на $\mathbb{R}$ верно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_k t - t^2} f(t)\, dt = 0, \quad k = 1, 2, ...,$$

следует, что $f(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Для того чтобы свести задачу к стандартным задачам функционального анализа и теории функций, от функции f вместо напрерывности потребуем интегрируемость с квадратом на $\mathbb{R}$ и будем рассматривать произвольные последовательности комплексных чисел λ_k, $k = 1, 2, ...$ Переформулируем задачу для функции $g(t) = \overline{f}(t)e^{t^2}$: *выяснить условия на последовательность $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, ...$, при которых из того, что некоторая функция g удовлетворят условиям*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 e^{-2t^2} dt < \infty \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_k t - 2t^2} \overline{g}(t)\, dt = 0, \quad k = 1, 2, ...,$$

следует, что $g(t) \equiv 0$.

В такой формулировке видно, что в силу теоремы Банаха речь идет об условиях полноты системы экспонент $\exp(\lambda_k x)$ в весовом пространстве функций со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\overline{v}(t) e^{-2t^2} dt$$

или о множествах единственности в пространстве целых функций F, представимых в виде

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda t - 2t^2} \overline{g}(t)\, dt = 0, \quad k = 1, 2, ...,$$

V.V. Napalkov, A.A. Rumyantseva, R.S. Yulmukhametov, Completeness of exponential systems in weighted spaces on real axe.

Поступила 15 января 2010 г.

с функцией g, удовлетворяющей условию (1). Задача о полноте систем экспонент и задача о множествах единственности — это двойственные задачи, которые привлекали внимание многих математиков. С историей и современным положением дел в исследованиях по этим задачам можно ознакомиться в [6], [7].

Предварительные результаты наших исследований по сформулированной задаче опубликованы в работе [5].

В данной работе рассматривается задача в более общей постановке, а именно, мы будем изучать вопрос о полноте системы экспонент $\exp(\lambda_k x)$ в весовом гильбертовом пространстве функций со скалярным произведением

$$(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\overline{v}(t)e^{-2a|t|^\alpha}dt,$$

где $a > 0$ — произвольное положительное число, а $\alpha \in (1;2]$.

Пусть I — интервал вещественной оси и $\varphi(t)$ — выпуклая функция на этом интервале. Через $L_2(I,\varphi)$ обозначим пространство локально интегрируемых функций g на интервале I, для которых конечен интеграл

$$\int_I |g(t)|^2 e^{-2\varphi(t)}dt.$$

Это пространство гильбертово со скалярным произведением

$$(u,v) = \int_I u(t)\overline{v(t)}e^{-2\varphi(t)}dt.$$

С помощью преобразования Фурье-Лапласа задачу о полноте систем экспонент в пространстве $L_2(I,\varphi)$ можно свести к задаче о множествах единственности в классе целых функций F, представимых в виде

$$F(\lambda) = \int_I e^{\lambda t - 2\varphi(t)} f(t)\, dt, \tag{2}$$

где $f \in L_2(\mathbb{I},\varphi)$. При этом мы воспользуемся следующей теоремой из работы [2].

Теорема А. *Пусть W — ограниченная снизу положительной постоянной и ограниченная сверху на компактах функция на ограниченном интервале I. Предполагая, что функция $\frac{1}{W}$ измерима, определим пространство*

$$L^2(I,W) = \{g \in L_{loc}(I) : ||g||^2 := \int_I \frac{|g(t)|^2}{W(t)}\, dt < \infty\}.$$

Положим

$$\widetilde{h}(x) = \sup_{t\in I}(xt - \ln\sqrt{W(t)})$$

(сопряженная по Юнгу к функции $\ln\sqrt{W(t)}$) и для каждого $x \in \mathbb{R}$ определим число $\rho_{\widetilde{h}}(x)$ из условия

$$\int_{x-\rho_{\widetilde{h}}(x)}^{x+\rho_{\widetilde{h}}(x)} |\widetilde{h}'_+(x) - \widetilde{h}'_+(t)|\, dt = 1.$$

Тогда

1. Если целая функция F представима в виде

$$F(\lambda) = \int_I e^{\lambda t}\frac{\overline{g}(t)}{W(t)}\, dt \tag{3}$$

с функцией $g \in L^2(I,W)$, то

$$\begin{array}{rcl} |F(\lambda)| & \leq & C_F e^{\widetilde{h}(x)}, \quad \lambda = x+iy \in \mathbb{C}, \\ ||F||^2 & := & \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)}\rho_{\widetilde{h}}(x)\, d\widetilde{h}'(x)dy \leq (\pi e)||g||^2. \end{array}$$

2. Если $\ln W(t)$ — выпуклая функция и целая функция F удовлетворяет условиям

$$|F(\lambda)| \le C_F e^{\widetilde{h}(x)}, \quad \lambda = x + iy \in \mathbb{C},$$
$$\textstyle\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \rho_{\widetilde{h}}(x)\, d\widetilde{h}'(x) dy < \infty,$$

то имеет место представление (3), причем выполняются и верхняя, и нижняя оценки

$$(\pi e)^{-1} ||g||^2 \le ||F||^2 \le (\pi e) ||g||^2.$$

Значение функции $\rho_{\widetilde{h}}(x)$ понимается как супремум множества положительных чисел p, для которых

$$\int_{x-p}^{x+p} |\widetilde{h}'_+(x) - \widetilde{h}'_+(t)|\, dt \le 1.$$

Если, например, в этой теореме положить $I = (-1; 1)$, $W(t) \equiv 1$ на интервале I, то непосредственным вычислением получаем

$$\widetilde{h}(x) = |x|, \quad \rho_{\widetilde{h}}(x) = |x| + \frac{1}{2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

и утверждение теоремы A в этом случае — это классическая теорема Пэли-Винера.

В работе [3] получена асимптотика интегралов Лапласа

$$\int_I e^{xt - h(t)}\, dt.$$

Из этих результатов в частности вытекает следующая теорема.

Теорема B. *Если h — выпуклая функция, $\widetilde{h}$ — сопряженная по Юнгу к функции h и $\rho_{\widetilde{h}}$ определена как в теореме A, то верны соотношения*

$$\frac{1}{4} \frac{e^{2\widetilde{h}(x)}}{\rho_{\widetilde{h}}(x)} \le \int_I e^{2xt - 2h(t)}\, dt \le 4 \frac{e^{2\widetilde{h}(x)}}{\rho_{\widetilde{h}}(x)}.$$

Для каждой выпуклой на интервале I функции h определим функцию

$$K(x) = \int_I e^{2xt - 2h(t)}\, dt.$$

Возьмем выпуклую на вещественной оси функцию h, удовлетворяющую условию

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{h(t)}{|t|} = +\infty.$$

Сопряженная по Юнгу функция $\widetilde{h}$ тоже будет выпуклой функцией на всей числовой оси. Применяя теоремы A и B для сужений функции $W(t) = e^{2h(t)}$ на интервалы $(-N; N)$ и переходя затем к пределу при $N \to \infty$, получаем следующее утверждение.

Теорема C. *Целые функции F, удовлетворяющие условиям*

$$|F(x+iy)| \le C_F \sqrt{K(x)}, \quad x + iy \in \mathbb{C},$$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|F(x+iy)|^2}{K(x)}\, d\widetilde{h}'(x) dy < \infty,$$

и только такие функции допускают представление вида

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda t - 2h(t)} \overline{g}(t)\, dt$$

с функцией g, удовлетворяющей условию

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 e^{-2h(t)}\, dt < \infty.$$

В работе [4] задача о полноте системы экспонент в пространстве $L_2(\mathbb{R}, \frac{1}{2}t^2)$ с помощью теоремы C сначала была сведена к вопросу о множествах (не-) единственности в пространствах целых функций F, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dxdy<\infty,$$

затем — к вопросу о множествах (не-) единственности в пространствах целых функций F с равномерной радиальной оценкой

$$|F(x+iy)|\le \mathrm{Const.}e^{\frac{x^2}{4}},\quad x+iy\in\mathbb{C}, \tag{4}$$

и, наконец, был осуществлен переход к характеристикам множества нулей целых функций с равномерной оценкой

$$|F(\lambda)|\le \mathrm{Const.}e^{\frac{|\lambda|^2}{8}},\quad \lambda\in\mathbb{C}. \tag{5}$$

Последняя формулировка удобна тем, что позволяет непосредственно использовать классические теоремы о распределении нулей целых функций.

В данной работе мы исследуем по описанной схеме полноту системы экспонент в пространствах $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$ при $a>0$, $\alpha\in(1;2]$. Новым по сравнению с изложенным в [5] является способ перехода к радиальным весам. Если переход от ограничения (4) к радиальному ограничению (5) обеспечивался умножением на целую функцию без нулей $e^{\frac{1}{8}\lambda^2}$, то в более общем случае приходится домножать на целую функцию с нетривиальным множеством нулей.

1. Полнота систем экспонент и множества нулей целых функций

Пусть $a>0$, $\alpha\in(1;2]$ и $L_2(\mathbb{R}, a|t|^\alpha)$ — гильбертово пространство локально-интегрируемых функций f на вещественной оси с нормой

$$||f||^2=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2e^{-2a|t|^\alpha}dt.$$

В этом параграфе мы будем сводить задачу о полноте системы экспонент $(e^{\lambda_k x})$, $k=1,2,...$, в пространстве $L_2(\mathbb{R}, a|t|^\alpha)$ к вопросу о существовании ненулевых целых функций, обращающихся в нуль в точках λ_k, $k=1,2,...$, с некоторыми ограничениями на рост.

Сформулируем теорему C применительно к весу $h(t)=a|t|^\alpha$, $t\in\mathbb{R}$. Непосредственно вычислим сопряженные функции

$$\widetilde{h}(x)=b|x|^\beta,\quad x\in\mathbb{R},$$

где

$$b=\frac{\alpha-1}{\alpha}(a\alpha)^{-\frac{1}{\alpha-1}},$$
$$\beta=\frac{\alpha}{\alpha-1}. \tag{6}$$

Несложно показать, что при некоторых положительных постоянных C_1, C_2 имеют место неравенства

$$C_1(1+|x|)^{1-\frac{\beta}{2}}\le\rho_{\widetilde{h}}(x)\le C_2(1+|x|)^{1-\frac{\beta}{2}}.$$

Тогда, используя теорему B, в этом конкретном случае теорему C можно сформулировать более определенно:

Теорема C′. *Целые функции F, удовлетворяющие условиям*

$$|F(x+iy)|\le C_F e^{b|x|^\beta}|x|^{\frac{\beta-2}{4}},\quad x+iy\in\mathbb{C},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^2e^{-2b|x|^\beta}|x|^{\frac{\beta}{2}-1}dxdy<\infty, \tag{7}$$

и только такие функции допускают представление

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t - 2a|t|^{\alpha}} \overline{g}(t)\ dt \tag{8}$$

с функцией g, удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 e^{-2a|t|^{\alpha}} dt < \infty. \tag{9}$$

Теорема Банаха о полноте применительно к гильбертовому пространству $L_2(\mathbb{R}, a|x|^{\alpha})$ запишется в следующем виде.

Теорема 1. *Система экспонент $e^{\lambda_k x}$, $k = 1, 2, ...$, полна в пространстве $L_2(\mathbb{R}, a|x|^{\alpha})$ тогда и только тогда, когда не существует ненулевой целой функции $F(\lambda)$, которая обращается в нуль в точках λ_k, $k = 1, 2, ...$, и удовлетворяет условиям (7).*

Простыми выкладками получим отдельно необходимое и достаточное условия для полноты системы экспонент в терминах равномерных оценок на целые функции.

Теорема 2. *1. Если система экспонент $e^{\lambda_k x}$, $k = 1, 2, ...$, не полна в пространстве $L_2(\mathbb{R}, a|x|^{\alpha})$, где $\alpha \in (1; 2]$, то существует ненулевая целая функция $F(\lambda)$, которая обращается в нуль в точках λ_k, $k = 1, 2, ...$, и удовлетворяет условию*

$$|F(x+iy)| \le C_F e^{b|x|^{\beta}} |x|^{\frac{\beta-2}{4}}, \quad x+iy \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

Параметры b, β определяются по формулам (6).

2. Если существует ненулевая целая функция $F(\lambda)$, которая обращается в нуль в точках λ_k, $k = 1, 2, ...$, и еще в $n = [\beta]$ точках $z_1, ..., z_n$ (здесь $[\beta]$ — целая часть β), и удовлетворяет оценке (10), то система экспонент $e^{\lambda_k x}$, $k = 1, 2, ...$, не полна в пространстве $L_2(\mathbb{R}, a|x|^{\alpha})$.

Доказательство. Первое утверждение — непосредственное следствие теоремы C$'$.

Докажем второе утверждение. Если F — целая функция, о существовании которой говорится во втором утверждении,

$$P(\lambda) = (\lambda - z_1)...(\lambda - z_n),$$

то

$$F_1(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{P(\lambda)}$$

— также целая функция. Оценим модуль этой функции для больших по модулю значений λ. Если $M = \max_{k=1,...,n} |z_k|$ и $|\lambda| \ge 2M + 1$, то $|\lambda| - |z_k| \ge \frac{1}{2}(|\lambda| + 1)$, поэтому

$$|P(\lambda)| \ge \frac{1}{2^n}(|\lambda| + 1)^n. \tag{11}$$

Поскольку $n = [\beta] > \frac{\beta-2}{4}$, то функция F_1 удовлетворяет первой оценке в соотношении (7). Пользуясь неравенствами ($\lambda = x + iy$)

$$|\lambda| + 1 \ge \frac{(|x|+1) + (|y|+1)}{2} \ge \sqrt{(|x|+1)(|y|+1)},$$

и из (10), (11) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |F_1(x+iy)|^2 e^{-2b|x|^{\beta}} |x|^{\frac{\beta}{2}-1} dxdy \le C_1 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^{\beta-2}}{(|x|+1)^n(|y|+1)^n} dxdy.$$

Мы считаем, что $\alpha \le 2$, значит, $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1} \ge 2$, поэтому $n = [\beta] \ge 2$, $n - \beta + 2 = 2 - \{\beta\} > 1$ (здесь $\{\beta\} = \beta - [\beta]$ — дробная часть β). Следовательно, интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(|y|+1)^n} dy, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^{\beta-2}}{(|x|+1)^n} dx$$

сходятся и

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |F_1(x+iy)|^2 e^{-2b|x|^\beta} |x|^{\frac{\beta}{2}-1} dxdy < \infty.$$

Тем самым, целая функция F_1 обращается в нуль в точках λ_k, $k = 1, 2, ...$, удовлетворяет условиям (7). По теореме С$'$ система экспонент $e^{\lambda_k x}$, $k = 1, 2, ...$, не полна в пространстве $L_2(\mathbb{R}, a|t|^\alpha)$.

Теорема 2 доказана.

Условия на целую функцию, требуемые в теореме 2, не радиальные, что уменьшает эффективность применения классических теорем теории целых функций о связи роста целых функций с распределением нулей. В этих теоремах в качестве функций сравнения используются радиальные веса и, в частности, понятия порядка и типа. Переход к радиальным условиям мы обеспечим с помощью результатов работы [6], а именно, следующей теоремы.

Теорема D. *Пусть u субгармонична на всей плоскости и имеет конечный порядок роста ρ. Тогда существует целая функция f такая, что для любого $\gamma \ge \rho$*

$$|u(z) - \ln|f(z)|| \le C_\gamma \ln|z|, \quad |z| \longrightarrow \infty, \ z \notin E_\gamma,$$

причем исключительное множество E_γ может быть покрыто кругами $\{z : |z - z_j| < r_j\}$ так, что

$$\sum_{|z_j|>R} r_j = o(R^{\rho-\gamma}), \quad R \longrightarrow \infty.$$

Предварительно докажем одну лемму.

Лемма 1. *Если $\alpha \in (1; 2]$, $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$, $\lambda = x + iy$, то функция*

$$u(\lambda) = \frac{b}{\alpha}|\lambda|^\beta - b|x|^\beta$$

субгармонична на всей плоскости.

Доказательство леммы 1. Поскольку $\beta \ge 2$, то u дважды непрерывно дифференцируема и субгармоничность можно проверить по дифференциальному признаку: вычислим оператор Лапласа

$$\Delta u = b\left(\frac{\beta^2}{\alpha}|\lambda|^{\beta-2} - \beta(\beta-1)|x|^{\beta-2}\right) \ge b\beta\left(\frac{\beta}{\alpha} - (\beta-1)\right)|x|^{\beta-2} = 0.$$

Функция u имеет тип $\frac{b}{\alpha}$ при порядке β. Очевидно, для некоторой константы $A = A(\beta, b)$ выполняется неравенство

$$\sup_{|\lambda - z| \le |\lambda|^{1-\beta}} u(z) \le u(\lambda) + A, \quad |\lambda| \ge 1. \tag{12}$$

Применим теорему D к функции u: существует функция f, которая вне некоторого множества $E = E_{2\beta}$ удовлетворяет оценке

$$|u(z) - \ln|f(z)|| \le C_{2\beta} \ln|z|, \quad |z| \longrightarrow \infty, \tag{13}$$

а множество E покрывается кругами $\{z : |z - z_j| < r_j\}$ так, что

$$\sum_{|z_j|>R} r_j = o(R^{-\beta}), \quad R \longrightarrow \infty. \tag{14}$$

Возьмем точку λ с достаточно большим модулем и рассмотрим окружности $C_t = \{z : |\lambda - z| = t\}$, $\frac{1}{2}|\lambda|^{1-\beta} \le t \le |\lambda|^{1-\beta}$. Проецируя круги из покрытия множества E на прямую $\{z = \lambda + \tau,\ \tau > 0\}$ и учитывая свойство (14), приходим к выводу, что найдется некоторая окружность C_t, свободная от точек исключительного множества E. Следовательно, на этой окружности выполняются оценки (13). Тогда по принципу максимума для голоморфных функций и из (12) имеем

$$\ln|f(\lambda)| \le max_{z\in C_t}(u(z) + C_{2\beta}\ln|z|) \le u(\lambda) + C\ln|\lambda|.$$

Таким образом, можно считать, что оценка

$$u(\lambda) - C\ln|\lambda| \le \ln|f(\lambda)|$$

в соотношении (13) выполняется вне множества E, а оценка

$$\ln|f(\lambda)| \le u(\lambda) + C\ln|\lambda|$$

— для всех λ, $|\lambda| \ge 2$.

Из оценки (13) видно, что функция f имеет бесконечно много нулей. Пусть $n = [C] + 1$, $z_1, ..., z_n$ — нули функции f и

$$P(\lambda) = (\lambda - z_1)...(\lambda - z_n).$$

Если $M = \max_{k=1,...,n}|z_k|$, то при $|\lambda| \ge 2M + 1$ имеем

$$2^{-n}(|\lambda| + 1)^n \le |P(\lambda)| \le M^n(|\lambda| + 1)^n. \tag{15}$$

Для целой функции

$$L(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{P(\lambda)},$$

тем самым выполняются оценки

$$\ln|L(\lambda)| \ge u(\lambda) - C\ln(|\lambda| + 1), \quad \lambda \notin E,$$
$$\ln|L(\lambda)| \le u(\lambda) + \mathrm{const}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{16}$$

Выберем и зафиксируем одну из целых функций, удовлетворяющую оценкам (16). Множество нулей этой функции обозначим через Λ_0.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k,\ k = 1, 2, ...\}$ — некоторое множество точек плоскости. Систему экспонент $e^{\lambda_k\lambda}$, $k = 1, 2, ...$, будем обозначать через $\exp\Lambda$.

Теорема 3. *1. Если система экспонент* $\exp\Lambda$ *не полна в пространстве* $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$, *где* $\alpha \in (1; 2]$, *то существует ненулевая целая функция* $G(\lambda)$, *которая обращается в нуль в точках* $\lambda \in \Lambda\bigcup\Lambda_0$ *и удовлетворяет условию*

$$|G(z)| \le Ce^{\frac{b}{\alpha}|z|^\beta}|z|^{\frac{\beta-2}{4}}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{17}$$

Параметры b, β *определяются по формулам (6).*

2. Если существует ненулевая целая функция $G(\lambda)$, *которая обращается в нуль в точках* $\lambda \in \Lambda_0\bigcup\Lambda$, *и еще в двух "дополнительных" наборах точек* $z_1, ..., z_n$, $n = [\beta]$, $\zeta_1, ..., \zeta_N$, $N = [\beta] + [C]$ *(здесь* $[\beta]$ *— целая часть* β *и* C *— константа в оценке (16)), а также удовлетворяет оценке (17), то система экспонент* $\exp\Lambda$ *не полна в пространстве* $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$.

Доказательство теоремы 3.

1. Если система $\exp\Lambda$ не полна, то по теореме 2 существует целая функция F, удовлетворяющая оценке (10) и обращающаяся в нуль на множестве Λ. Из второго неравенства в соотношении (16) следует, что функция $G(z) = F(z)L(z)$ удовлетворяет оценке (17) и обращается в нуль на множестве $\Lambda\bigcup\Lambda_0$.

2. По "дополнительным" нулям ζ_i построим многочлен

$$P(z) = (z-\zeta_1)...(z-\zeta_N)$$

и рассмотрим отношение

$$F(z) = \frac{G(z)}{L(z)P(z)}.$$

По условиям на функцию G это целая функция, обращающаяся в нуль в точках Λ, а также в точках $z_1, ..., z_n$. В силу оценок типа (15) на многочлены и по первой оценке в соотношении (16) имеем

$$|F(z)| \leq \text{Const}.e^{b|\text{Re } z|^\beta} \frac{|z|^{\frac{\beta-2}{4}}(1+|z|)^C}{(1+|z|)^N}, \quad z \notin E.$$

По выбору числа N получаем оценку

$$|F(z)| \leq \text{Const}.e^{b|\text{Re } z|^\beta}, \quad z \notin E.$$

Опираясь на принцип максимума и на "малость"исключительного множества E, эту оценку сверху можно продолжить на всю плоскость. Тогда целая функция F удовлетворяет условиям, оговоренным во втором пункте теоремы 2, и, тем самым, система $\exp \Lambda$ не полна в пространстве $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$.

Теорема 3 доказана.

2. Применение классических теорем теории целых функций к вопросу о полноте

В названии параграфа имеются в виду теоремы типа теоремы Линделефа о связи типа и порядка целой функции с числовыми характеристиками распределения ее нулей. Через Λ будем обозначать заданную последовательность комплексных чисел, пронумерованную в порядке возрастания модулей, через Λ_0 — множество нулей фиксированной целой функции, удовлетворяющей условиям (16). Через $\widetilde{\Lambda}$ обозначим объединение последовательностей Λ и Λ_0, которая заново перенумерована по возрастанию модулей. Пусть

$$n_\Lambda(t) = \sum_{|\lambda_k| \leq t} 1$$

— считающая функция последовательности Λ и

$$\Delta_\Lambda = \overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\beta}$$

— верхняя плотность последовательности Λ при порядке β. Несколько утверждений, необходимых для дальнейшей работы со считающей функцией и верхней плотностью, сведем в одну лемму.

Лемма 2. *1. Если Λ — некоторая последовательность комплексных чисел, $n_\Lambda(t)$ — считающая функция этой последовательности и Δ_Λ — ее верхняя плотность при порядке $\beta > 1$, то*

$$\Delta_\Lambda = \overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^\beta}.$$

2. Если целая функция L удовлетворяет условиям (16) с некоторой субгармонической функцией u, множество E покрывается системой кругов с суммируемой последовательностью радиусов, μ — ассоциированная мера субгармонической функции u и $n(t)$ — считающая функция множества нулей функции L, то

$$\overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} \frac{n(t)}{t^\beta} = \overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} \frac{\mu(t)}{t^\beta},$$

где $\beta > 1$ *и* $\mu(t)$ — μ — *мера круга* $\{z: \ |z| \le t\}$.

3. Если

$$u(\lambda) = \frac{b}{\alpha}|\lambda|^\beta - b|x|^\beta,$$

то

$$\frac{\mu(t)}{t^\beta} = \frac{b}{2\pi(\alpha-1)}\int_0^{2\pi}\left(1 - |\cos\varphi|^{\beta-2}\right)d\varphi$$

и

$$\frac{n(t)}{t^\beta} = \frac{b}{2\pi(\alpha-1)}\int_0^{2\pi}\left(1 - |\cos\varphi|^{\beta-2}\right)d\varphi + O\left(\frac{1}{t} + \frac{\ln t}{t^{\beta-1}}\right).$$

Доказательство леммы 2.

1. Очевидно, что

$$n(t) = k, \quad \text{когда } |\lambda_k| \le t < |\lambda_{k+1}|.$$

Следовательно, при $|\lambda_k| \le t < |\lambda_{k+1}|$ имеем

$$\frac{k}{|\lambda_{k+1}|^\beta} \le \frac{n(t)}{t^\beta} \le \frac{k}{|\lambda_k|^\beta},$$

значит,

$$\overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty}\frac{n(t)}{t^\beta} \le \overline{\lim}_{k\longrightarrow\infty}\frac{k}{|\lambda_k|^\beta} = \Delta_\Lambda.$$

С другой стороны,

$$\overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty}\frac{n(t)}{t^\beta} \ge \overline{\lim}_{k\longrightarrow\infty}\frac{n(|\lambda_k|)}{|\lambda_k|^\beta} = \overline{\lim}_{k\longrightarrow\infty}\frac{k}{|\lambda_k|^\beta} = \Delta_\Lambda.$$

2. Пусть сумма радиусов кругов, покрывающих исключительное множество E, меньше некоторого числа M. Проецируя круги покрытия на положительную вещественную полуось, убеждаемся, что в каждом интервале длины M найдется число t так, что окружность $\{z: \ |z| = t\}$ свободна от точек множества E. Возьмем произвольное $r > 0$ и в интервалах $(r; r+M)$, $(r+2M; r+3M)$ найдем числа r_1, r_2 с указанным свойством. Считая, что $L(0) \ne 0, u(0) \ne -\infty$, применим формулу Иенсена по окружностям с центром в нуле и радиусов r_1, r_2 к функции $\ln|L(z)| - u(z)$, затем вычтем одну формулу из другой:

$$\int_{r_1}^{r_2}\frac{n(t)-\mu(t)}{t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\ln|L(r_2e^{i\varphi})| - u(r_2e^{i\varphi}))d\varphi -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\ln|L(r_1e^{i\varphi})| - u(r_1e^{i\varphi}))d\varphi.$$

Поскольку окружности не пересекаются с исключительным множеством E, то

$$\int_{r_1}^{r_2}\frac{|n(t)-\mu(t)|}{t}dt = O(\ln r), \ r \longrightarrow \infty.$$

Отсюда получим соотношение

$$\frac{n(r)(r_2-r_1)}{r+3M} \le \int_{r_1}^{r_2}\frac{n(t)}{t}dt \le \int_{r_1}^{r_2}\frac{\mu(t)}{t}dt + O(\ln r) \le$$

$$\le \frac{\mu(r+3M)(r_2-r_1)}{r} + O(\ln r).$$

Поделим неравенство на $\frac{r^\beta(r_2-r_1)}{r+3M}$:

$$\frac{n(r)}{r^\beta} \le \frac{\mu(r+3M)}{(r+3M)^\beta}\cdot\frac{(r+3M)^{\beta+1}}{r^{\beta+1}} + O\left(\frac{\ln r}{r^{\beta-1}(r_2-r_1)}\right). \tag{18}$$

Аналогично получим неравенство

$$\frac{\mu(r)}{r^\beta} \le \frac{n(r+3M)}{(r+3M)^\beta} \cdot \frac{(r+3M)^{\beta+1}}{r^{\beta+1}} + O\left(\frac{\ln r}{r^{\beta-1}(r_2-r_1)}\right). \tag{18'}$$

Заметим, что по условию $\beta > 1$ и $M < r_2 - r_1 < 3M$, перейдя к верхним пределам, получим

$$\overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} \frac{n(t)}{t^\beta} = \overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} \frac{\mu(t)}{t^\beta}.$$

3. Как известно, ассоциированная мера μ определяется через оператор Лапласа

$$d\mu(z) = \frac{1}{2\pi}\Delta u(z) dxdy.$$

Значение оператора Лапласа для функции u мы вычислили при доказательстве леммы 1. Таким образом,

$$\mu(t) = \frac{b\beta}{2\pi}\int_{|\lambda|\le t}\left(\frac{\beta}{\alpha}|\lambda|^{\beta-2} - (\beta-1)|x|^{\beta-2}\right) dxdy =$$

$$= \frac{b\beta}{2\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi} r^{\beta-1}\left(\frac{\beta}{\alpha} - (\beta-1)|\cos\varphi|^{\beta-2}\right) d\varphi dr =$$

$$= \frac{b}{2\pi(\alpha-1)} t^\beta \int_0^{2\pi}\left(1 - |\cos\varphi|^{\beta-2}\right) d\varphi.$$

Отсюда и из (18), (18′) вытекает

$$\frac{n(t)}{t^\beta} = \frac{b}{2\pi(\alpha-1)}\int_0^{2\pi}\left(1 - |\cos\varphi|^{\beta-2}\right) d\varphi + O\left(\frac{1}{r} + \frac{\ln r}{r^{\beta-1}}\right).$$

Лемма 2 доказана.

Теорема 4. *Если верхняя плотность последовательности* Λ *удовлетворяет условию*

$$\Delta_\Lambda > \frac{b}{\alpha-1}\left(e - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1 - |\cos\varphi|^{\beta-2}) d\varphi\right),$$

то система экспонент $\exp\Lambda$ *полна в пространстве* $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$*, где* $\alpha \in (1;2]$.

Доказательство теоремы 4. Проведем доказательство от противного: предположим, что система $\exp\Lambda$ не полна в пространстве $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$. По п. 1 теоремы 3 в этом случае найдется целая функция G, удовлетворяющая оценке (17) и обращающаяся в нуль в точках множества $\Lambda\bigcup\Lambda_0$. Оценка (17) означает, в частности, что функция G имеет тип не выше $\frac{b}{\alpha}$ при порядке β. По известной теореме о связи роста целой функции с распределением ее корней ([4], теорема 2.3) имеет место соотношение

$$\Delta_{\Lambda\bigcup\Lambda_0} \le \frac{be\beta}{\alpha}.$$

По п. 1 леммы 2 из этого неравенства следует, что

$$\overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} \frac{n_\Lambda(t) + n_{\Lambda_0}(t)}{t^\beta} \le \frac{be\beta}{\alpha}.$$

По п. 3 той же леммы имеем

$$\Delta_\Lambda = \overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^\beta} \le \frac{be\beta}{\alpha} - \frac{b}{2\pi(\alpha-1)}\int_0^{2\pi}\left(1 - |\cos\varphi|^{\beta-2}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{b}{\alpha-1}\left(e - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1 - |\cos\varphi|^{\beta-2}\right) d\varphi\right).$$

Теорема 4 доказана.

Замечание. Достаточное условие полноты можно получить на основе той же теоремы о целых функциях и п. 1 теоремы 2. Получилось бы более сильное условие

$$\Delta_\Lambda > be\beta = \frac{be\alpha}{\alpha - 1}.$$

Более точное достаточное условие полноты можно получить, если пользоваться интегральной считающей функцией нулей

$$N_\Lambda(r) = \int_0^r \frac{n_\Lambda(t)}{t} dt.$$

Теорема 5. *Если*

$$\overline{\lim}_{r \longrightarrow \infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\beta} > \frac{b}{2\pi\alpha} \int_0^{2\pi} |\cos\varphi|^{\beta-2} d\varphi,$$

то система экспонент $\exp\Lambda$ *полна в пространстве* $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$, *где* $\alpha \in (1; 2]$.

Доказательство теоремы 5. Проведем доказательство снова от противного: предположим, что система $\exp\Lambda$ не полна в пространстве $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$. По п. 1 теоремы 3 в этом случае найдется целая функция G, обращающаяся в нуль в точках множества $\Lambda \bigcup \Lambda_0$ и удовлетворяющая оценке (17), то есть

$$\ln|G(re^{i\varphi}| \le \frac{b}{\alpha} r^\beta + \frac{\beta - 2}{4} \ln r + c, \quad re^{i\varphi} \in \mathbb{C}.$$

Будем считать, что $G(0) \ne 0$. Интегрируя последнее соотношение по φ и применяя формулу Иенсена, получим

$$\int_0^r \frac{n_\Lambda(t) + n_{\Lambda_0}(t)}{t} dt \le \frac{b}{\alpha} r^\beta + \frac{\beta - 2}{4} \ln r + c, \quad r > 0. \tag{19}$$

По п. 3 леммы 2 можем вычислить интеграл

$$\int_0^r \frac{n_{\Lambda_0}(t)}{t} dt = \frac{b}{2\pi(\alpha - 1)\beta} r^\beta \int_0^{2\pi} (1 - |\cos\varphi|^{\beta-2}) d\varphi + O(r^{\beta-1} + r\ln r).$$

Поделив это выражение на r^β и перейдя к пределу при $r \longrightarrow \infty$, получим

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} \frac{1}{r^\beta} \int_0^r \frac{n_{\Lambda_0}(t)}{t} dt = \frac{b}{2\pi\alpha} \int_0^{2\pi} (1 - |\cos\varphi|^{\beta-2}) d\varphi.$$

Отсюда и из (19) имеем

$$\overline{\lim}_{r \longrightarrow \infty} \frac{1}{r^\beta} \int_0^r \frac{n_\Lambda(t)}{t} dt \le \frac{b}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - |\cos\varphi|^{\beta-2}) d\varphi\right) = \frac{b}{2\pi\alpha} \int_0^{2\pi} |\cos\varphi|^{\beta-2} d\varphi.$$

Это неравенство противоречит предположению теоремы.

Теорема 5 доказана.

Замечание. Оценка, приведенная в теореме 5, неулучшаемая в том смысле, что существует система точек Λ, для которой

$$\overline{\lim}_{r \longrightarrow \infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\beta} = \frac{b}{2\pi\alpha} \int_0^{2\pi} |\cos\varphi|^{\beta-2} d\varphi,$$

и при этом система $\exp\Lambda$ уже не полна в пространстве $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$.

Достаточные условия полноты, доказанные в теоремах 4 и 5, не являются необходимыми. Некоторые необходимые условия полноты или, что то же самое, достаточные условия неполноты можно доказать на основе теоремы Линделефа. Приведем еще две характеристики последовательности нулей ([4], стр. 35). Для последовательности комплексных чисел λ_k, $|\lambda_k| \le |\lambda_{k+1}|$, $k = 1, 2, ...$, положим

$$\delta(r) = \frac{1}{2}\sum_{|\lambda_k|\le r}\frac{1}{\lambda_k^2}, \quad \delta = \overline{\lim}_{r\longrightarrow\infty}|\delta(r)|, \quad \gamma = \max(\Delta, \delta).$$

Теорема 6. *Пусть* λ_k, $k = 1, 2, ...$, *— возрастающая по модулю последовательность комплексных чисел чисел. Тогда*

1. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_k|^2} < \infty, \tag{20}$$

то система экспонент $\exp\Lambda$ *не полна в пространствах* $L_2(\mathbb{R}, b|x|^2)$ *для любого* b.

2. Если ряд в (20) расходится и при этом верхняя плотность последовательности при порядке 2 равна нулю, то система экспонент $\exp\Lambda$ *не полна в пространствах* $L_2(\mathbb{R}, b|x|^2)$ *для любого* b.

Доказательство теоремы 6.

1. По теореме Линделефа ([4], стр. 35, теорема 3.9) в этом случае каноническое произведение

$$F(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)e^{\frac{\lambda}{\lambda_k}}$$

имеет минимальный тип при порядке 2, поэтому для произвольного многочлена $P(\lambda)$ функция $G(\lambda) = F(\lambda)P(\lambda)$ тоже будет минимального типа и, тем самым, будет удовлетворять условиям п. 2 теоремы 3.

2. В условиях п. 2 теоремы 6 следует рассмотреть каноническое произведение

$$F(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{i\lambda_k}\right)e^{\frac{\lambda}{\lambda_k}+\frac{\lambda}{i\lambda_k}}.$$

Множество нулей $\widetilde{\Lambda}$ функции F состоит из Λ и $i\Lambda = (i\lambda_k)$, поэтому

$$\delta_{\widetilde{\Lambda}}(r) = 0, \quad r > 0.$$

Следовательно, для функции F величина δ равна 0. По п. 1 леммы 2 $\Delta_{\widetilde{\Lambda}} = 2\Delta_\Lambda = 0$ и, тем самым, равна нулю и γ. Снова по теореме Линделефа функция F будет минимального типа. Остается снова воспользоваться п. 2 теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Напалков В.В., Румянцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Полнота систем экспонент в пространстве с весом* // ДАН. Т. 429. № 2. 2009. С. 155–158.
2. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Пэли-Винера на весовые пространства* // Математ. заметки. Т. 48, вып 5. 1990. С. 80–85.
3. Юлмухаметов Р.С. *Асимптотика многомерного интеграла Лапласа* // Сб. "Исследования по теории приближений". Институт математики с ВЦ БНЦ УрО АН СССР. Уфа. 1989. 151 с.
4. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука. 1983. 175 с.
5. Юлмухаметов Р.С., Напалков В.В. *Полнота систем экспонент в пространстве с весом* // ДАН. Т. 415. № 4. 2007. С. 1–3.
6. Седлецкий А.М. *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации.* М.: Физматлит. 2005. 504 с.
7. Хабибуллин Б.Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности.* Уфа. РИЦ БашГУ. 2006. 171 с.

Валентин Васильевич Напалков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: napalkov@matem.anrb.ru

Алла Александровна Румянцева,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: allarum@mail.ru

Ринад Салаватович Юлмухаметов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: yulmukhametov@mail.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 1 (2010). С. 110-118.

УДК 517.5

ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ КОШИ-РИМАНА

А.Ю. ТИМОФЕЕВ

Аннотация. Изучаются весовые пространства функций, возникающие при исследовании обобщенных уравнений Коши-Римана с сингулярными коэффициентами. Установлена связь с другими пространствами функций, описано сопряженное пространство.

Ключевые слова: обобщенные уравнения Коши-Римана, весовые пространства функций, квазивогнутые функции, сопряженное пространство.

1. Введение

Изучению краевых задач для обобщенного уравнения Коши-Римана посвящено много работ. Основополагающей работой в этом направлении является монография И.Н. Векуа (см. [1]), в которой построена теория уравнений вида

$$\partial_{\bar{z}} w(z) + A(z) \cdot w(z) + B(z) \cdot \overline{w}(z) = 0, \quad z \in G, \tag{1}$$

где $A(z)$, $B(z)$ — заданные в ограниченной области G функции, $w(z)$ — неизвестная функция.

Теория Векуа построена в предположении, что $A(z)$, $B(z)$ принадлежат пространству $L_p(G)$, где $p > 2$. В этом случае (1) называется регулярной обобщенной системой Коши-Римана, а его решение — обобщенными аналитическими функциями. Коэффициенты таких систем могут допускать «слабые» особенности, лимитируемые требованием p-интегрируемости. В частности, если $A(z)$, $B(z)$ обращаются в бесконечность в некоторой изолированной особой точке, то порядок этой особенности должен быть строго меньше единицы. Поэтому даже уравнение (1) с такими коэффициентами, как $A(z) = \frac{1}{z}$, не вписывается в теорию Векуа. Исследованию задач для обобщенных уравнений с коэффициентами, имеющими особенности в изолированной точке, посвящены работы Л.Г. Михайлова, З.Д. Усманова, А. Тунгатарова, М. Райссига и А.Ю. Тимофеева, Р. Сакса, Г.Т. Макацария и др. (см., напр., [2], [3], [7]).

В работе [7] исследуется задача Дирихле для обобщённого уравнения Коши-Римана (1), где $G = \{z \in C : |z| < 1\}$, $A(z) \equiv 0$.

При этом новизна исследований состоит в том, что допускающие особенности в точке $z = 0$ коэффициенты $B(z)$ принадлежат весовому пространству функций $S_p(G)$, которое является объединением пространств:

$$s_p(G) = \left\{ B(z) : \sup_{\bar{G}} (|B(z)| \cdot p(|z|)) < +\infty \right\}.$$

A.Yu. Timofeev, Weighted space of functions in the theory of generalized Cauchy-Riemann equation.

Поступила 15 февраля 2010 г.

Множество функций $p(t)$, обладающих достаточно общими свойствами, обозначается через P. Пространство $S_p(G)$ состоит из тех и только тех заданных в G функций $f(z)$, для каждой из которых существует такая функция $p(t) \in P$, что $f(z) \in s_p(G)$.

Предполагается, что функции $p(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

1. Заданы и положительны на некотором промежутке $(0, t_p]$, где $t_p < 1$.
2. Не убывают на $(0, t_p]$.
3. $\lim\limits_{t \to +0} p(t) = 0$.
4. $\int\limits_0^{t_p} \frac{dt}{p(t)} < +\infty$.

Научный интерес представляет задача описания функций $p(t)$ класса P. В данной работе продолжено исследование функций этого класса.

В § 2 приведены основные свойства функций множества P, а также различные примеры, поясняющие эти свойства. Из этих свойств следует непосредственно, что поведение функции $p(t)$ в точке $t = 0$ может быть сравнимо с $p_1(t) = t$: $p(t) > c \cdot t$. Функциями, сравнимыми с $p_1(t)$, являются и квазивогнутые функции. Установлена связь весовых функций из P с квазивогнутыми функциями, введёнными в работе [4]. В работе построены примеры, показывающие, что функции из P вообще говоря не являются квазивогнутыми и наоборот. Во множестве P вводится структура частичноупорядоченного множества.

В разделе 3 изучается поведение весовой функции в нуле. При этом за основу берется шкала роста монотонно возрастающих функций на бесконечности: порядок и тип функции (см., напр., [5], с. 21–23). В разделе 3.2 показывается, что функция $\varphi(t) := \frac{1}{p(\frac{1}{t})} (p \in P)$ имеет при порядке $\rho = 1$ минимальный тип. Как следствие получается, что $p(t) > \gamma(t) \cdot t$, где $\gamma(t) \to +\infty$ при $t \to +0$.

В разделе 4 устанавливается связь пространства $S_p(G)$ с другими пространствами функций (пространством Лоренца и др.). Кроме того, в связи с вопросом, поставленным на конференции по комплексному анализу и дифференциальным уравнениям в Якты-Куле (декабрь 2004 г.), описано сопряженное пространство к $s_p(G)$.

2. Свойства и примеры весовых функций $p(t) \in P$

2.1. Основные свойства весовых функций. Весовые функции $p(t)$, введенные в [7], удовлетворяют следующим достаточно общим условиям:

1. Заданы и положительны на некотором промежутке $(0, t_p]$, где число t_p зависит от функции $p(t)$, $t_p < 1$.
2. Не убывают на $(0, t_p]$.
3. $\lim\limits_{t \to +0} p(t) = 0$.
4. $\int\limits_0^{t_p} \frac{dt}{p(t)} < +\infty$.

В дальнейшем будем считать функции $p(t)$ заданными на всём промежутке $(0, 1]$, продолжая в случае необходимости $p(t)$ на промежутке $[t_p, 1]$ постоянной, равной $p(t_p)$. В этом случае условия 1–2 и 4 будут выполнены уже на всём промежутке $(0, 1]$.

Нетрудно показать, что для функции $p(t) \in P$ существует число $c_p > 0$ такое, что

$$\frac{t}{p(t)} \leqslant c_p, t \in (0, 1]\,. \tag{1.1}$$

Для этого рассмотрим произвольное $t_0 \in (0; 1]$:

$$\frac{t_0}{p(t_0)} = \frac{1}{p(t_0)} \int\limits_0^{t_0} dt = \int\limits_0^{t_0} \frac{dt}{p(t_0)}.$$

В силу неубывания $p(t)$ для любого $t \leqslant t_0$ последний интеграл будет не превосходить $\int\limits_0^{t_0} \frac{dt}{p(t)}$. В силу произвольности $t_0 \in (0;1]$ получаем то, что (1.1) доказано. В связи с (1.1) возникает гипотеза о том, что функции $p(t)$ в окрестности $t=0$ ведут себя как $p_1(t)=t$. В разделе 3 мы докажем, что весовые функции $p(t)$ удовлетворяют более сильному, чем (1.1) условию.

Рассмотрим некоторые примеры весовых функций.

1. $p(t)=t^\alpha$, $0<\alpha<1$.

Очевидно, выполняются условия 1–4, и $p(t)=t^\alpha \in P$ для $0<\alpha<1$.

2. $p(t)=t\cdot\ln^\beta \frac{1}{t}$, $\beta>1$.

Так как для $t\in(0,1]$ выполняется $\frac{1}{t}\geqslant 1$, то $\ln\frac{1}{t}\geqslant 0$ и $t\cdot\ln^\beta\frac{1}{t}\geqslant 0$.

$$p'(t)=\ln^\beta\frac{1}{t}+t\cdot(\beta\ln^{\beta-1}\frac{1}{t})\cdot t\cdot(-\frac{1}{t^2})=\ln^{\beta-1}\frac{1}{t}\cdot(\ln\frac{1}{t}-\beta).$$

Значит, $p(t)$ не убывает на $\left(0,\frac{1}{e^\beta}\right]$.

$$\lim_{t\to+0} t\cdot\ln^\beta\frac{1}{t}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\beta x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta\cdot\ln^{\beta-1}x}{x}.$$

Если $\beta-1>0$, то применяем правило Лопиталя еще раз и таким образом окончательно получим, что последний предел равен нулю.

$\int\limits_0^1 \frac{dt}{t\cdot\ln^\beta\frac{1}{t}}=-\int\limits_0^1\frac{d(-\ln t)}{(-\ln t)^\beta}=\frac{(-\ln t)^{1-\beta}}{\beta-1}\Big|_0^1<\infty$ при $1-\beta<0$, т.е. $\beta>1$.

Таким образом, если $\beta>1$, то функция принадлежит P.

3. Аналогично можно показать, что функция

$$p(t)=t\cdot\ln\frac{1}{t}\cdot\ln\ln\frac{1}{t}\cdot\ldots\cdot(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{(k-1)}\frac{1}{t})\cdot(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{(k)}\frac{1}{t})^\beta\in P \text{ при } \beta>1.$$

Во множестве весовых функций P можно ввести частичный порядок. Пусть $p_1(t),\ p_2(t)\in P$. Будем писать $p_1\prec p_2$, если $p_1(t)\leqslant p_2(t),\ t\in(0,1]$, причем $p_1(t)/p_2(t)\to 0$ при $t\to+0$.

Можно показать (см. [7]), что для каждой функции $p\in P$ существует $p_1\in P$ со свойством, что $p_1\prec p$.

С другой стороны, отношение $\prec$ во множестве весовых функций P не является порядком: не для любых $p_1(t),p_2(t)\in P$ можно сказать, что $p_1\prec p_2$ или $p_2\prec p_1$. В качестве функции $p_1(t)$ можно взять функцию примера 1: $p_1(t)=t^\alpha$, $0<\alpha<1$, $0<t\leqslant 1$. Построим теперь функцию $p_2(t)$: $p_2(1)=1$, $p_2(t)=\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha$, $\frac{1}{n+1}\leqslant t<\frac{1}{n}$. Очевидно, что $p_1(t),p_2(t)\in P$, но нельзя утверждать, что $p_1\prec p_2$ или $p_2\prec p_1$.

Известно, что теория И.Н. Векуа (см. [1]) для уравнения (1) построена для случая, когда $B(z)\in L_q(G)$, $q>2$. Функция $p_1(t)=t^\alpha(0<\alpha<1)$ удовлетворяет условиям 1–4, причём если $f\in s_{p_1}(G)$, то $f\in L_q(G)$ $(2<q<\frac{2}{\alpha})$. С другой стороны, $f(z)=\frac{1}{|z|\cdot\ln^2\frac{1}{|z|}}\in s_{p_2}(G)$, $p_2(t)=t\cdot\ln^2\frac{1}{t}$, но $f(z)\notin L_q(G)(q>2)$, поэтому исследования в [7] можно рассматривать как продолжение и расширение теории Векуа.

2.2. Связь между весовыми и квазивогнутыми функциями. Из неравенства (1.1) предыдущего параграфа следует, что для функции $p(t)\in P$ существует число $c_p>0$ со свойством:

$$p(t)\geqslant c_p\cdot t.$$

Возникает гипотеза о сравнении функций $p(t)$ класса P с функциями вида $p_1(t)=t$ и с другими функциями такого вида.

В соответствии с определением, данным в [4], функция $p(t)$, удовлетворяющая условиям 1–3 и дополнительному условию:

$$\frac{p(t)}{t} \text{ убывает на некотором промежутке } (0, t_p], \tag{2.1}$$

называется *квазивогнутой*. Приведённые выше функции (см. примеры 1–3 раздела 1) являются квазивогнутыми.

Как следует из леммы 1.1 (см. [4]), квазивогнутые функции являются непрерывными и даже абсолютно непрерывными функциями.

В связи с этим возникает вопрос: не следует ли из условий 1–4 квазивогнутость функций $p(t)$? Отрицательный ответ на этот вопрос даёт следующий пример.

Положим $p(1) = 1$. Для $k \in N$ считаем, что

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{k}}, \text{ если } t \in \left[\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}\right).$$

Тогда условия 1–4 выполнены для этой функции:

1. $p(t) > 0$ для любых $t \in (0, 1]$.

2. Докажем монотонность этой функции. Возьмём произвольные $t_1 \leqslant t_2$. Возможны две ситуации:

а) $t_1, t_2 \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$.

В этом случае $p(t_1) = p(t_2) = \frac{1}{\sqrt{k}}$, т.е. $p(t_1) \leqslant p(t_2)$.

б) $t_1 \in \left[\frac{1}{k+n+1}, \frac{1}{k+n}\right)$, $t_2 \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$, $n \in N$.

Тогда $p(t_1) = \frac{1}{\sqrt{k+n}} < \frac{1}{\sqrt{k}} = p(t_2)$.

3. $\lim\limits_{t\to+0} p(t) = \lim\limits_{k\to\infty} p(t) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$.

4. $\int\limits_0^1 \frac{dt}{p(t)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{p(t)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \cdot (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\cdot(k+1)}$.

Последний ряд сходится.

Покажем, тем не менее, что функция $\frac{p(t)}{t}$ не является убывающей.

Для этого рассмотрим $t_1 = \frac{1}{k+1}, t_2 = \frac{1}{k+1} - \varepsilon$, ε — положительное маленькое число; очевидно, $t_1 > t_2$.

$$p(t_1) = \frac{1}{\sqrt{k}}, p(t_2) = \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Поэтому

$$\frac{p(t_1)}{t_1} - \frac{p(t_2)}{t_2} = \frac{\sqrt{k+1}\cdot t_2 - \sqrt{k}\cdot t_1}{\sqrt{k\cdot(k+1)}\cdot t_1\cdot t_2} = \frac{\sqrt{k+1}\cdot(\frac{1}{k+1} - \varepsilon) - \sqrt{k}\cdot\frac{1}{k+1}}{\sqrt{k\cdot(k+1)}\cdot\frac{1}{k+1}\cdot(\frac{1}{k+1} - \varepsilon)} =$$

$$= \frac{k+1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\cdot\frac{k+1}{1-(k+1)\cdot\varepsilon} = \frac{k+1}{\sqrt{k}} - \frac{\sqrt{k+1}}{1-(k+1)\cdot\varepsilon}. \tag{2.2}$$

Подберём ε столь малым, чтобы выражение (2.2) было положительным, т.е:

$$\frac{k+1}{\sqrt{k}} - \frac{\sqrt{k+1}}{1-(k+1)\cdot\varepsilon} > 0.$$

В итоге получаем следующее неравенство:

$$\varepsilon < \frac{1}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})\cdot(k+1)^{3/2}}. \tag{2.3}$$

Так как

$$\frac{1}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})\cdot(k+1)^{3/2}} > \frac{1}{2(k+1)^2},$$

то достаточно взять следующее значение ε:

$$\varepsilon = \frac{1}{2(k+1)^2}.$$

В этом случае (2.3) будет выполнено, а значит, будет положительным и выражение (2.2).

Таким образом, функции класса P, вообще говоря, не удовлетворяют условию квазивогнутости.

Возникает обратный вопрос: не следует ли из квазивогнутости $p(t)$ то, что $p(t) \in P$?

Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующий пример: $p_1(t) = t \cdot \ln \frac{1}{t}$. Эта функция является квазивогнутой, хотя и не принадлежит классу P.

3. Поведение весовой функции в нуле

3.1. Шкала роста монотонных функций. Приведем некоторые факты, связанные со шкалой роста монотонно возрастающих функций (см., напр., [5], с. 21–23; [6], с. 1–2).

Пусть $f(t)$ — неотрицательная функция на полуоси $(0, +\infty)$. Чтобы охарактеризовать скорость ее роста, будем сравнивать ее с функциями $\mu \cdot t^{\lambda}$.

Точную нижнюю грань тех чисел $\lambda \geqslant 0$, для которых при $t \to +\infty$ выполняется неравенство

$$f(t) < t^{\lambda}, \tag{3.1.1}$$

назовем *порядком* ρ функции $f(t)$.

Если чисел λ со свойством (3.1.1) не существует, то говорят, что $f(t)$ имеет бесконечный порядок, и полагают $\rho = +\infty$.

Лемма 1. *(см. [5], с. 21–23; [6], с. 1–2). Порядок функции вычисляется по формуле*

$$\rho(f) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln f(t)}{\ln t}. \tag{3.1.2}$$

Типом функции $f(t)$ при порядке ρ $(0 < \rho < +\infty)$ называют точную нижнюю грань $\sigma(f, \rho)$ тех чисел $\mu \leqslant \infty$, для которых при $t \to +\infty$ выполняется неравенство $f(t) < \mu \cdot t^{\rho}$. Легко видеть, что $\sigma(f, \rho) = \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{f(t)}{t^{\rho}}$.

Функции $f(t)$, для которых $\sigma(f) = 0$, $0 < \sigma(f) < \infty$, $\sigma(f) = \infty$, называются соответственно функциями *минимального*, *нормального* и *максимального* типа при порядке ρ.

Примеры.

1. $f_1(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Тогда

$\rho(f_1) = \alpha, 0 < \alpha < 1$.

$\sigma(f_1) = 1$.

2. $f_2(t) = \frac{t}{\ln t}, t \in [e, +\infty)$.

$\rho(f_2) = 1$

$\sigma(f_2) = 0$.

Наряду с указанием порядка и типа функции $f(t)$ ее рост может быть охарактеризован поведением (сходимостью или расходимостью) интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^{\rho+1}} dt. \tag{3.1.3}$$

Заметим, что при замене в этом интеграле порядка ρ произвольным числом $\alpha > \rho(f)$ получится, очевидно, сходящийся интеграл. В то же время интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}dt \tag{3.1.4}$$

в случае монотонно неубывающей функции $f(t)$ расходится, если $\alpha < \rho(f)$ или $\alpha = \rho(f)$, $\sigma(f) > 0$. Действительно, в этом случае существует такая последовательность чисел t_j, что при любом j выполняется $t_{j+1} > 2t_j$ и при некотором $a > 0$

$$f(t_j) \geqslant a t_j^\rho, \quad j = 1, 2, ...$$

Ввиду монотонности функции $f(t)$ имеем

$$\int_{t_1}^{\infty} \frac{f(t)}{t^{\rho+1}}dt = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{f(t)}{t^{\rho+1}}dt \geqslant \frac{a}{\rho}\sum_{j=1}^{\infty} t_j^\rho \left(\frac{1}{t_j^\rho} - \frac{1}{t_{j+1}^\rho}\right) \geqslant \frac{a}{\rho}\sum_{j=1}^{\infty}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\rho\right) = \infty.$$

Эти результаты можно сформулировать следующим утверждением:

Лемма 2. *Если монотонно неубывающая неотрицательная функция $f(t)$ удовлетворяет условию*

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}dt < \infty,$$

то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} = 0.$$

Обратное утверждение неверно. В качестве примера можно привести функцию $f_2(t) = \frac{t}{\ln t}$, $t \in [e, +\infty)$. Тогда $\sigma(f_2) = 0$, но $\int_1^{+\infty} \frac{t}{\ln t \cdot t^{\rho+1}}dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln t \cdot t}dt = \int_1^{+\infty} \frac{d(\ln t)}{\ln t} = \ln\ln t \Big|_1^{+\infty} = +\infty$.

Таким образом, характеристика роста функций посредством интеграла (3.1.4) представляет интерес лишь для функций минимального типа.

Условимся неотрицательные функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ называть принадлежащими к одному *классу сходимости*, если интегралы

$$\int_1^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^{\alpha+1}}dt, \quad \int_1^{\infty} \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}dt$$

сходятся (а значит, и расходятся) при одних и тех же значениях α.

3.2. Асимптотика весовой функции в нуле. Пусть $p(t) \in P$ — весовая функция. Рассмотрим следующую функцию: $\varphi(t) = \frac{1}{p(\frac{1}{t})}$. Эта функция является монотонно возрастающей на промежутке $[1; +\infty)$; причем при $t \to +\infty$ $\varphi(t) \to +\infty$.

В силу условия 4 (см. раздел 2)

$$J := \int_0^d \frac{dt}{p(t)} < +\infty. \tag{3.2.1}$$

Сделаем замену $t = \frac{1}{x}$ под знаком интеграла в (3.2.1).

Тогда
$$J = -\int\limits_{+\infty}^{1/d} \frac{dx}{x^2 p(\frac{1}{x})} = \int\limits_{1/d}^{+\infty} \frac{1}{p(\frac{1}{x})} \cdot \frac{1}{x^2} dx = \int\limits_{1/d}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx.$$

Этот интеграл в силу (3.2.1) сходится, т.е. функция $\varphi(x)$ принадлежит классу сходимости (см. раздел 3.1) с порядком $\rho = 1$. Согласно лемме 2 из раздела 3.1 функция $\varphi(x)$ имеет минимальный тип при порядке $\rho = 1$, т.е.
$$\varphi(x) < \varepsilon \cdot x, x > x_0(\varepsilon). \tag{3.2.2}$$
Рассмотрим $\varepsilon_1 = 1$. Тогда существует такое x_1, что для любого $x > x_1$ выполняется $\varphi(x) < \varepsilon_1 x$. Аналогично для $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ существует x_2 такое, что для любого $x > x_2 \geqslant x_1$ выполняется $\varphi(x) < \varepsilon_2 x$ и т.д. Таким образом, получена функция $\varepsilon(x)$:
$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, x_1 < x \leqslant x_2 \\ \frac{1}{2}, x_2 < x \leqslant x_3 \\ \ldots \\ \frac{1}{n}, x_n < x \leqslant x_{n+1} \\ \ldots \end{cases}$$
Ясно, что $\varepsilon(x) \downarrow 0$ при $x \to \infty$.

Значит,
$$\varphi(x) < \varepsilon(x) \cdot x,\ x > x_0.$$
Возвращаясь к весовой функции $p(t)$, получаем неравенство
$$p(\frac{1}{x}) > \frac{1}{\varepsilon(x) \cdot x}.$$
Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Для любой функции* $p(t) \in P$ *существует функция* $\gamma(t) \to +\infty$ *при* $t \to +0$ *такая, что*
$$\frac{p(t)}{t} > \gamma(t).$$

4. Пространства Лоренца. Связь с другими пространствами. Сопряженное пространство

Пространством Лоренца $LlnL(G)$ называется множество измеримых в G функций следующего вида:

$L\ln L(G) = \left\{ f(z) : \iint\limits_G |f(z)| \ln^+ |f(z)|\, d\xi d\zeta < +\infty \right\}$,
где $G = \{z \in C : |z| < 1\}$, $z = \xi + i\zeta$, $z \in C$,
$\ln^+ |f(z)| = \max \{\ln |f(z)|, 0\}$.

Лемма 3. *Справедливо следующее включение:*
$$S_p(G) \subset L_2(G) \subset L\ln L(G).$$

Доказательство.
Включение $S_p(G) \subset L_2(G)$ доказано в [7].
Покажем, что $L_2(G) \subset L\ln L(G)$. Для этого рассмотрим $f(z) \in L_2(G)$. Тогда
$$\iint\limits_G |f(z)| \ln^+ |f(z)|\, d\xi d\zeta \leqslant \iint\limits_G |f(z)| \cdot |f(z)|\, d\xi d\zeta = \iint\limits_G |f(z)|^2\, d\xi d\zeta < +\infty.$$
Значит, $f(z) \in L\ln L(G)$.

Покажем, что обратные включения не выполняются.

$L_2(G) \not\subset S_p(G)$, $L\ln L(G) \not\subset S_p(G)$ в силу примера 2 (см. ниже).

Чтобы показать, что $L\ln L(G) \not\subset L_2(G)$, достаточно в примере 1 (см. ниже) взять $\alpha = 1$.

Рассмотрим некоторые примеры, поясняющие связь пространства Лоренца с другими пространствами.

1. Рассмотрим функцию $p_1(t) = t^\alpha$, где $0 < \alpha < 1$. Тогда $p_1(t) \in P$. В этом случае функция комплексной переменной $f_1(z) = \frac{1}{|z|^\alpha}$ принадлежит $s_{p_1}(G)$, т.е. $f_1(z) \in S_p(G)$.

Очевидно, что $f_1(z)$ принадлежит $L\ln L(G)$.

Проверим принадлежность функции $f_1(z)$ пространствам $L_p(G)$:

$$\iint\limits_G |f(|z|)|^p \, d\xi d\zeta = 2\pi \int\limits_0^1 \frac{1}{r^{\alpha\cdot p-1}} dr = \frac{r^{-\alpha\cdot p+2}}{2-\alpha\cdot p}.$$

Последнее выражение принимает конечное значение при $-\alpha\cdot p + 2 > 0$, т.е. $p < \frac{2}{\alpha}$.

Таким образом, $f_1(z) \in L_p(G)$ при $2 < p < \frac{2}{\alpha}$.

2. Рассмотрим функцию $f_2(z) = \frac{1}{|z|\ln\frac{1}{|z|}}$. Вычисляя интеграл, как в примере 1, покажем, что функция принадлежит пространству Лоренца: $f_2(z) = \frac{1}{|z|\ln\frac{1}{|z|}} \in L\ln L(G)$.

С другой стороны, $f_2(z)$ не принадлежит $S_p(G)$. Действительно, если предположить обратное, то существует функция $p_2(|z|) \in S_p(G)$ такая, что $p_2(|z|)\cdot f_2(z) \leqslant c$. Если обозначить левую часть неравенства через $\varphi(z)$, то можно сделать вывод о том, что $\varphi(z)$ является ограниченной функцией. Но тогда для функции $p_2(|z|)$ не выполнено условие 4.

Таким образом, мы показали, что $f_2(z)$ не принадлежит $S_p(G)$. Проверим, что $f_2(z)$ принадлежит пространству $L^2(G)$:

$\iint\limits_G \frac{d\xi d\zeta}{|z|^2\ln^2\frac{1}{|z|}} = 2\pi\int\limits_0^d r\frac{dr}{r^2\ln^2\frac{1}{r}} = 2\pi\int\limits_0^d \frac{d(\ln r)}{\ln^2 r} = -2\pi\frac{1}{\ln r}\Big|_0^d = -\frac{2\pi}{\ln d} < +\infty$, где $d < 1$.

Таким образом, $f_2(z) \in L^2(G)$.

3. Рассмотрим функцию $p(t) = t\cdot\ln^2\frac{1}{t}$. Тогда $f_3(z) = \frac{1}{|z|\cdot\ln^2\frac{1}{|z|}} \in S_p(G)$.

Легко показать, что $f_3(z)$ не принадлежит $L^p(G)$, $p > 2$.

С помощью понятия интеграла Радона и схемы описания линейных функционалов из [8] (с. 212–223) нетрудно доказывается

Теорема 2. *Любой линейный непрерывный функционал l в пространстве $s_p(G)$ задается в виде следующего интеграла Радона*

$$l(f) = \int_G f(z)\cdot p(|z|) d\Phi,$$

где Φ — аддитивная ограниченной вариации функция множества.

Заключение. Полученные результаты могут быть использованы как в теории обобщенных уравнений Коши-Римана, так и при исследовании других функциональных пространств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векуа И.Н. *Обобщённые аналитические функции.* М.: Наука. 1988.
2. Михайлов Л.Г. *Новый класс интегрируемых уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами.* Душанбе. 1963. 183 с.
3. Усманов З.Д. *Обобщенные системы Коши-Римана с сингулярной точкой.* Душанбе. 1993. 245 с.
4. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семёнов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.* М.: Наука. 1978. 400 с.

5. Ронкин Л.И. *Введение в теорию целых функций многих переменных.* М.: Наука. 1971. 432 с.
6. Маергойз Л.С. *Асимптотические характеристики целых функций и их приложения.* Новосибирск: Наука. 1991.
7. M. Reissig, A. Timofeev *Dirichlet problems for generalized Cauchy-Riemann systems with singular coefficients* // Complex variables. Vol. 50. № 7–11. 2005. P. 653–672.
8. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* М.: Наука. 1959.

Алексей Юрьевич Тимофеев,
Сыктывкарский государственный университет,
Октябрьский проспект, д. 55,
167001, г. Сыктывкар, Россия
E-mail: tim@syktsu.ru

ABSTRACTS

R.A. Bashmakov, K.P. Isaev, R.S. Yulmukhametov

On Geometric Characteristics of Convex Functions and Laplace Integrals

Abstract. In many problems of analysis the second derivatives are used to characterize the convexity of the function that imposes serious restrictions on a class of considered functions. This paper introduces the geometric characteristics of convexity, which from our point of view are more natural in the study of weighted spaces of functions. In the one-dimensional case, the problem is considered in more detail and we define the various characteristics, which are in a sense equivalent. As an application we study the asymptotic behavior of multidimensional Laplace integral.

Keywords: convex functions, Young's conjugate function, Laplace transform.

G.E. Berikhanova, B.E. Kanguzhin

Resolvent of finite-dimensional perturbed of the correct problems for the biharmonic operator

Abstract. In this work we give a complete description of the well-posed solvability of boundary problems for biharmonic operators in a circle. Then written out their finite perturbations, which also well-posed solved. Formulas are given the resolvent of the operator.

Keywords: modeling of plates, correct problem, Dirichlet problem, biharmonic equation, Green function, resolvent operator.

I.M. Bikkulov, F.Kh. Mukminov

Classes of uniqueness for solutions of the Rickyies problem to fourth and sixth order elliptic equations

Abstract. The Rickyies-1, 3 problem with the Dirichlets boundary condition and the third one for fourth and sixth orders elliptic equations in unbounded domain is considered. Wide classes of uniqueness depending on domain geometry for this problem are established. For the Rickyies-1 problem with the Dirichlets boundary condition examples of non-uniqueness are constructed. The examples confirm an exactness of the suggested classes of uniqueness.

Keywords:classes of uniqueness, Rickyies problem, elliptic equation.

A.M. Dilmukhametova, A.U. Mullabaeva, V.V. Napalkov

Generalized Fock space

Abstract. We introduce a generalized Fock space and consider main properties of this space. There is found an adjoint operation to operation of multiplication on variable z. Also there are defined eigenfunctions of adjoint operator. We study a generalized Laplace transformation and problem of construction of basis for introduced space.

Keywords: the Fock space, an adjoint operator, the Laplace transformation, basis of the space, order and type of entire functions, the generalized differential operator.

M.N. Dmitriev, E.I. Romenski

WENO/RK method for modelling elastic waves

Abstract. High accuracy WENO-Runge-Kutta numerical method is developed for solving linear elasticity equations written in the form of hyperbolic system of conservation laws. Methods up to the 5th order in space and 4th order in time have been considered. Numerical results obtained for some test problems by the developed methods are much more accurate in comparison with those obtained by the commonly used Virieux scheme of the second order in space and time. Implementation of the PML strategy into the developed methods is also considered.

Keywords: linear elasticity, elastic waves, high-accuracy methods.

K.P. Isaev

Riesz bases of exponents in Bergman spaces on convex polygons

Abstract. We study the existence of Riesz bases of exponents in Bergman spaces on convex bounded polygons. The bases were constructed.

Keywords: series of exponents, Riesz bases, Bergman space.

A.S. Krivosheyev

An almost exponential basis

Abstract. It is studied an almost exponential consequences of golomorphic functions in convex domain. We consider the series on systems of such functions. It is described a space of coefficients's consequences of these series.

Keywords: golomorphic function, convex domain, exponent, basis.

V.V. Napalkov, A.A. Rumyantseva, R.S. Yulmukhametov

Completeness of exponential systems in weighted spaces on real axe

Abstract. It is studied the completeness of exponential systems $\exp(\lambda_k t)$ in the Hilbert space $L_2(\mathbb{R}; a|x|^\alpha)$, where $\alpha \in (1; 2], a > 0$. We obtain both the necessary and sufficient conditions of completeness in terms of system λ_k.

Keywords: completeness of exponential systems, Fourier-Laplace transform, convex function, entire function.

A.Yu. Timofeev

Weighted space of functions in the theory of generalized Cauchy-Riemann equation

Abstract. In the paper is studied the weighted space of functions from the theory of generalized Cauchy-Riemann system with a singular coefficients. The link is stated whith other space of functions. The conjugate space is described.

Keywords: generalized Cauchy-Riemann equation, weighted space of functions, quasi-konvex functions, conjugate space.

CONTENTS

ДЛЯ АВТОРОВ

«Уфимский математический журнал» публикует оригинальные научные исследования преимущественно по теории функций, комплексному анализу, функциональному анализу, обыкновенным дифференциальным уравнениям, дифференциальным уравнениям в частных производных, математической физике, теории вероятностей и математической статистике. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов. Периодичность — четыре номера в год.

К публикации в периодическом издании «Уфимский математический журнал» принимаются статьи на русском и английском языках, объемом, как правило, не более сорока страниц. Работы, превышающие сорок страниц, принимаются к публикации по особому решению редколлегии журнала.

Полнотекстовые версии публикуемых в журнале статей также размещаются в свободном доступе в Интернете на сайте Института математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук (http://matem.anrb.ru).

Публикации в журнале для авторов бесплатны.

1. Все материалы предоставляются в редакцию в двух экземплярах. Рукопись должна быть тщательно выверена. Все страницы рукописи, включая страницы с рисунками, таблицами и списком литературы, следует пронумеровать. Авторам для окончательной правки высылается макет статьи в формате PDF или PS.

2. В отдельном файле, набранном в любом текстовом редакторе, указываются фамилии, имена, отчества всех авторов, название статьи, аннотации и ключевые слова на русском и английском языках. В этом же файле указываются ученое звание и ученая степень, должность, полное название научного учреждения, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с кодом города или номер мобильного телефона, адрес электронной почты, адрес прописки каждого из авторов. Необходимо указать автора, ответственного за переписку с редакцией.

3. Текст статьи должен быть подготовлен на компьютере в издательской системе LaTeX2e (стиль amsart, пакеты amsmath, amsfonts, amssymb). Машинописные рукописи и рукописи, набранные на компьютере в системах, отличных от TeX , не рассматриваются. Файлы статьи *.tex и *.ps (*.pdf) высылаются в адрес редакции по электронной почте (umj@matem.anrb.ru) или передаются в редакцию на любых электронных носителях. Официально поданным в журнал для публикации считается распечатанный и подписанный всеми авторами вариант.

В тексте статьи определяются индекс УДК, название работы, затем следуют инициалы и фамилии авторов, приводятся краткие, не более 20 строк, аннотации на русском и английском языках, даются списки ключевых слов на русском и английском языках. Далее в файле приводятся полностью фамилия, имя, отчество каждого из авторов и наименование учреждения, где была выполнена работа, с полным почтовым адресом.

В аннотации не допускается использование громоздких формул, ссылок на текст работы или список литературы.

При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами, не следует переопределять греческие буквы и другие стандартные команды. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета.

Черно-белые рисунки должны быть подготовлены в формате EPS (Encapsulated PostScript) таким образом, чтобы обеспечивать адекватное восприятие их при последующем оптическом уменьшении в два раза. При использовании рисунков необходимо подключить пакет epsfig. Подпись к рисунку должна быть центрирована под рисунком и состоять из слова Рис. с последующим номером. Номера рисунков должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к рисунку следует приводить в тексте статьи. Таблицы сопровождаются отцентрированной надписью Табл. с последующим номером. Номера таблиц должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к таблице приводятся в тексте статьи. Графики выполняются в виде рисунков.

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы, расположенные в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. В списке литературы должно быть не более 40 позиций.

В случае отклонения статьи авторы получают мотивированный отказ, экземпляры рукописи авторам не возвращаются.

Адрес редакции Уфимского математического журнала:

ИМВЦ УНЦ РАН, 450008, г. Уфа, Россия, ул. Чернышевского, 112, к. 22.
Тел. +7 347 273 33 42.
Email: umj@matem.anrb.ru, сайт журнала: http://matem.anrb.ru

Information for authors

Requirements for preparation of manuscripts

Ufimskii Matematicheskii Zhurnal publishes original research papers on the theory of functions, complex analysis, ordinary differential equations, partial differential equations, mathematical physics, probability theory and mathematical statistics. It is intended for researchers, teachers, postgraduate and undergraduate students. The journal publishes four regular issues per each year. We publish papers written in Russian or English which generally comprise up to 40 printed pages. Paper exceeding 40 printed pages can be accepted for publication by special consideration by the Editorial board.

Papers published in the journal are also freely placed in full volume on the official site of the Institute of mathematics with computer center of RAS (http://matem.anrb.ru).

The publication of papers in the journal is free of charge.

1. All documents are presented to editorial board in duplicate. The manuscript should be carefully checked. All pages should be numbered including drawings, tables and bibliographical references. The layout of the paper in PDF or PS format will be sent to authors for the final proof-reading.

2. Manuscript should be prepared on computer using LaTeX2e publishing software (style amsart, packages amsmath, amsfonts, amssymb). Typewritten manuscripts or the ones prepared by the software, different from TeX, will not be considered. Files *.tex and *.ps (*.pdf) of the paper should be sent to the editorial board by e-mail or submitted on any electronic data carriers. A variant of the manuscript is regarded as officially filed if it is in printed form and is signed by all authors.

3. In a detached file using any text editor should be represented full names of all authors, title of the paper, annotation and key words in Russian and English. The file should also contain science title and academic degrees, positions, full names of scientific institutions, addresses with the post office code, phone numbers with city code and mobile phone numbers, e-mail addresses and registration addresses of all authors. It is necessary to indicate the author responsible for

corresponding with Editorial board.

The date of submission to editorial board of two copies of manuscript, signed by all the authors is considered as the official date of submission of the paper.

Exemplary setup of the file of the paper (*.tex)

In the text index UDC and the title of the paper is defined, then it follows initials and family names of all authors, short annotation (at most 20 lines) in Russian and English, and the list of key words in Russian and English. Further it is given full names of all authors and names of institutions, where the work was implemented with full post addresses.

It is not admissible for the annotation includes intricate formulas, references on the text of the paper or on reference list. It should be in special attention that it is undesirable to use new (defined by authors) command sequences, especially with parameters, to redefine the Greece letters and other standard commands! In general it should be used standard package means.

Black-and-white drawings should be prepared in EPS format (Encapsulated PostScript) in such a way that guarantees its adequate representation under sequel optical two time decrease. If using drawings it is necessary to attach package epsfig. Inscription under the drawing must be placed on the center and include the word Fig. with sequel number. The numbers of drawings must have straight enumeration through the text of the paper. All comments to drawings should be placed in the text of the paper. The tables are accompanied by centered inscription Tab. with sequel number. The numbers of tables must have straight enumeration through the text of the paper. All comments to tables should be placed in the text of the paper. Diagrams are made as drawings.

The list of references must include only the items with references in the text with the order of citing. It is inadmissible the references on unpublished papers, the results of which are used in the proofs of the paper. In the case of rejection of the paper authors receive a notice with relevant valid reasons. Manuscripts are not returned.

Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences, 450008, Ufa, Russian Federation, 112 Chernyshevsky Street.
Tel. +7 347 273 33 42.
http://matem.anrb.ru
Email: umj@matem.anrb.ru