ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 1 (2010). С. 97-109.

УДК 517.54

ПОЛНОТА СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

В.В. НАПАЛКОВ, А.А. РУМЯНЦЕВА, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. Доказаны необходимое и достаточное (отдельно) условия на систему комплексных показателей λ_k, при которых система экспонент $\exp(\lambda_k t)$ полна в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}; a|x|^\alpha)$, где $\alpha \in (1;2], a > 0$.

Ключевые слова: полнота систем экспонент, преобразвание Фурье-Лапласа, выпуклая функция, целая функция.

Введение

Данная статья является развернутым изложением материала работы опубликованной в [1].

Работа, посвящена исследованию следующей задачи, заинтересовавшей специалистов по математической физике: выяснить условия на возрастающую последовательность положительных вещественных чисел λ_k, $k = 1, 2, ...$, при выполнении которых из того, что для непрерывной ограниченной функции f на $\mathbb{R}$ верно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_k t - t^2} f(t)\, dt = 0, \quad k = 1, 2, ...,$$

следует, что $f(t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Для того чтобы свести задачу к стандартным задачам функционального анализа и теории функций, от функции f вместо напрерывности потребуем интегрируемость с квадратом на $\mathbb{R}$ и будем рассматривать произвольные последовательности комплексных чисел λ_k, $k = 1, 2, ...$ Переформулируем задачу для функции $g(t) = \overline{f}(t)e^{t^2}$: *выяснить условия на последовательность $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, ...$, при которых из того, что некоторая функция g удовлетворят условиям*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 e^{-2t^2} dt < \infty \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_k t - 2t^2} \overline{g}(t)\, dt = 0, \quad k = 1, 2, ...,$$

следует, что $g(t) \equiv 0$.

В такой формулировке видно, что в силу теоремы Банаха речь идет об условиях полноты системы экспонент $\exp(\lambda_k x)$ в весовом пространстве функций со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\overline{v}(t) e^{-2t^2} dt$$

или о множествах единственности в пространстве целых функций F, представимых в виде

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda t - 2t^2} \overline{g}(t)\, dt = 0, \quad k = 1, 2, ...,$$

V.V. Napalkov, A.A. Rumyantseva, R.S. Yulmukhametov, Completeness of exponential systems in weighted spaces on real axe.

Поступила 15 января 2010 г.

с функцией g, удовлетворяющей условию (1). Задача о полноте систем экспонент и задача о множествах единственности — это двойственные задачи, которые привлекали внимание многих математиков. С историей и современным положением дел в исследованиях по этим задачам можно ознакомиться в [6], [7].

Предварительные результаты наших исследований по сформулированной задаче опубликованы в работе [5].

В данной работе рассматривается задача в более общей постановке, а именно, мы будем изучать вопрос о полноте системы экспонент $\exp(\lambda_k x)$ в весовом гильбертовом пространстве функций со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\overline{v}(t)e^{-2a|t|^{\alpha}}dt,$$

где $a > 0$ — произвольное положительное число, а $\alpha \in (1; 2]$.

Пусть I — интервал вещественной оси и $\varphi(t)$ — выпуклая функция на этом интервале. Через $L_2(I, \varphi)$ обозначим пространство локально интегрируемых функций g на интервале I, для которых конечен интеграл

$$\int_I |g(t)|^2 e^{-2\varphi(t)}dt.$$

Это пространство гильбертово со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_I u(t)\overline{v(t)}e^{-2\varphi(t)}dt.$$

С помощью преобразования Фурье-Лапласа задачу о полноте систем экспонент в пространстве $L_2(I, \varphi)$ можно свести к задаче о множествах единственности в классе целых функций F, представимых в виде

$$F(\lambda) = \int_I e^{\lambda t - 2\varphi(t)} f(t)\, dt, \tag{2}$$

где $f \in L_2(\mathbb{I}, \varphi)$. При этом мы воспользуемся следующей теоремой из работы [2].

Теорема A. *Пусть W — ограниченная снизу положительной постоянной и ограниченная сверху на компактах функция на ограниченном интервале I. Предполагая, что функция $\frac{1}{W}$ измерима, определим пространство*

$$L^2(I, W) = \{g \in L_{loc}(I) : ||g||^2 := \int_I \frac{|g(t)|^2}{W(t)}\, dt < \infty\}.$$

Положим

$$\widetilde{h}(x) = \sup_{t\in I}(xt - \ln\sqrt{W(t)})$$

(сопряженная по Юнгу к функции $\ln\sqrt{W(t)}$) и для каждого $x \in \mathbb{R}$ определим число $\rho_{\widetilde{h}}(x)$ из условия

$$\int_{x-\rho_{\widetilde{h}}(x)}^{x+\rho_{\widetilde{h}}(x)} |\widetilde{h}'_+(x) - \widetilde{h}'_+(t)|\, dt = 1.$$

Тогда

1. Если целая функция F представима в виде

$$F(\lambda) = \int_I e^{\lambda t} \frac{\overline{g}(t)}{W(t)}\, dt \tag{3}$$

с функцией $g \in L^2(I, W)$, то

$$\begin{array}{rcl} |F(\lambda)| & \le & C_F e^{\widetilde{h}(x)}, \quad \lambda = x + iy \in \mathbb{C}, \\ ||F||^2 & := & \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \rho_{\widetilde{h}}(x)\, d\widetilde{h}'(x)dy \le (\pi e)||g||^2. \end{array}$$

2. Если $\ln W(t)$ *— выпуклая функция и целая функция* F *удовлетворяет условиям*

$$|F(\lambda)| \le C_F e^{\widetilde{h}(x)}, \quad \lambda = x + iy \in \mathbb{C},$$
$$\textstyle\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \rho_{\widetilde{h}}(x)\, d\widetilde{h}'(x) dy < \infty,$$

то имеет место представление (3), причем выполняются и верхняя, и нижняя оценки

$$(\pi e)^{-1} ||g||^2 \le ||F||^2 \le (\pi e) ||g||^2.$$

Значение функции $\rho_{\widetilde{h}}(x)$ понимается как супремум множества положительных чисел p, для которых

$$\int_{x-p}^{x+p} |\widetilde{h}'_+(x) - \widetilde{h}'_+(t)|\, dt \le 1.$$

Если, например, в этой теореме положить $I = (-1; 1)$, $W(t) \equiv 1$ на интервале I, то непосредственным вычислением получаем

$$\widetilde{h}(x) = |x|, \quad \rho_{\widetilde{h}}(x) = |x| + \frac{1}{2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

и утверждение теоремы А в этом случае — это классическая теорема Пэли-Винера.

В работе [3] получена асимптотика интегралов Лапласа

$$\int_I e^{xt - h(t)}\, dt.$$

Из этих результатов в частности вытекает следующая теорема.

Теорема B. *Если* h *— выпуклая функция,* $\widetilde{h}$ *— сопряженная по Юнгу к функции* h *и* $\rho_{\widetilde{h}}$ *определена как в теореме А, то верны соотношения*

$$\frac{1}{4} \frac{e^{2\widetilde{h}(x)}}{\rho_{\widetilde{h}}(x)} \le \int_I e^{2xt - 2h(t)}\, dt \le 4 \frac{e^{2\widetilde{h}(x)}}{\rho_{\widetilde{h}}(x)}.$$

Для каждой выпуклой на интервале I функции h определим функцию

$$K(x) = \int_I e^{2xt - 2h(t)}\, dt.$$

Возьмем выпуклую на вещественной оси функцию h, удовлетворяющую условию

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{h(t)}{|t|} = +\infty.$$

Сопряженная по Юнгу функция $\widetilde{h}$ тоже будет выпуклой функцией на всей числовой оси. Применяя теоремы А и В для сужений функции $W(t) = e^{2h(t)}$ на интервалы $(-N; N)$ и переходя затем к пределу при $N \to \infty$, получаем следующее утверждение.

Теорема C. *Целые функции* F*, удовлетворяющие условиям*

$$|F(x+iy)| \le C_F \sqrt{K(x)}, \quad x + iy \in \mathbb{C},$$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|F(x+iy)|^2}{K(x)}\, d\widetilde{h}'(x) dy < \infty,$$

и только такие функции допускают представление вида

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda t - 2h(t)} \overline{g}(t)\, dt$$

с функцией g*, удовлетворяющей условию*

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 e^{-2h(t)}\, dt < \infty.$$

В работе [4] задача о полноте системы экспонент в пространстве $L_2(\mathbb{R}, \frac{1}{2}t^2)$ с помощью теоремы C сначала была сведена к вопросу о множествах (не-) единственности в пространствах целых функций F, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dxdy < \infty,$$

затем — к вопросу о множествах (не-) единственности в пространствах целых функций F с равномерной радиальной оценкой

$$|F(x+iy)| \le \mathrm{Const.}e^{\frac{x^2}{4}}, \quad x+iy \in \mathbb{C}, \tag{4}$$

и, наконец, был осуществлен переход к характеристикам множества нулей целых функций с равномерной оценкой

$$|F(\lambda)| \le \mathrm{Const.}e^{\frac{|\lambda|^2}{8}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Последняя формулировка удобна тем, что позволяет непосредственно использовать классические теоремы о распределении нулей целых функций.

В данной работе мы исследуем по описанной схеме полноту системы экспонент в пространствах $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$ при $a > 0$, $\alpha \in (1; 2]$. Новым по сравнению с изложенным в [5] является способ перехода к радиальным весам. Если переход от ограничения (4) к радиальному ограничению (5) обеспечивался умножением на целую функцию без нулей $e^{\frac{1}{8}\lambda^2}$, то в более общем случае приходится домножать на целую функцию с нетривиальным множеством нулей.

1. Полнота систем экспонент и множества нулей целых функций

Пусть $a > 0$, $\alpha \in (1; 2]$ и $L_2(\mathbb{R}, a|t|^\alpha)$ — гильбертово пространство локально-интегрируемых функций f на вещественной оси с нормой

$$||f||^2 = \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 e^{-2a|t|^\alpha}dt.$$

В этом параграфе мы будем сводить задачу о полноте системы экспонент $(e^{\lambda_k x})$, $k = 1, 2, ...$, в пространстве $L_2(\mathbb{R}, a|t|^\alpha)$ к вопросу о существовании ненулевых целых функций, обращающихся в нуль в точках λ_k, $k = 1, 2, ...$, с некоторыми ограничениями на рост.

Сформулируем теорему C применительно к весу $h(t) = a|t|^\alpha$, $t \in \mathbb{R}$. Непосредственно вычислим сопряженные функции

$$\widetilde{h}(x) = b|x|^\beta, \quad x \in \mathbb{R},$$

где

$$b = \frac{\alpha-1}{\alpha}(a\alpha)^{-\frac{1}{\alpha-1}},$$
$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}. \tag{6}$$

Несложно показать, что при некоторых положительных постоянных C_1, C_2 имеют место неравенства

$$C_1(1+|x|)^{1-\frac{\beta}{2}} \le \rho_{\widetilde{h}}(x) \le C_2(1+|x|)^{1-\frac{\beta}{2}}.$$

Тогда, используя теорему B, в этом конкретном случае теорему C можно сформулировать более определенно:

Теорема C′. *Целые функции F, удовлетворяющие условиям*

$$|F(x+iy)| \le C_F e^{b|x|^\beta}|x|^{\frac{\beta-2}{4}}, \quad x+iy \in \mathbb{C},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^2 e^{-2b|x|^\beta}|x|^{\frac{\beta}{2}-1}dxdy < \infty, \tag{7}$$

и только такие функции допускают представление

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t - 2a|t|^\alpha} \overline{g}(t)\ dt \tag{8}$$

с функцией g, удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 e^{-2a|t|^\alpha} dt < \infty. \tag{9}$$

Теорема Банаха о полноте применительно к гильбертовому пространству $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$ запишется в следующем виде.

Теорема 1. *Система экспонент $e^{\lambda_k x}$, $k = 1, 2, ...$, полна в пространстве $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$ тогда и только тогда, когда не существует ненулевой целой функции $F(\lambda)$, которая обращается в нуль в точках λ_k, $k = 1, 2, ...$, и удовлетворяет условиям (7).*

Простыми выкладками получим отдельно необходимое и достаточное условия для полноты системы экспонент в терминах равномерных оценок на целые функции.

Теорема 2. *1. Если система экспонент $e^{\lambda_k x}$, $k = 1, 2, ...$, не полна в пространстве $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$, где $\alpha \in (1; 2]$, то существует ненулевая целая функция $F(\lambda)$, которая обращается в нуль в точках λ_k, $k = 1, 2, ...$, и удовлетворяет условию*

$$|F(x + iy)| \le C_F e^{b|x|^\beta} |x|^{\frac{\beta - 2}{4}}, \quad x + iy \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

Параметры b, β определяются по формулам (6).

2. Если существует ненулевая целая функция $F(\lambda)$, которая обращается в нуль в точках λ_k, $k = 1, 2, ...$, и еще в $n = [\beta]$ точках $z_1, ..., z_n$ (здесь $[\beta]$ — целая часть β), и удовлетворяет оценке (10), то система экспонент $e^{\lambda_k x}$, $k = 1, 2, ...$, не полна в пространстве $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$.

Доказательство. Первое утверждение — непосредственное следствие теоремы C$'$.

Докажем второе утверждение. Если F — целая функция, о существовании которой говорится во втором утверждении,

$$P(\lambda) = (\lambda - z_1) ... (\lambda - z_n),$$

то

$$F_1(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{P(\lambda)}$$

— также целая функция. Оценим модуль этой функции для больших по модулю значений λ. Если $M = \max_{k=1,...,n} |z_k|$ и $|\lambda| \ge 2M + 1$, то $|\lambda| - |z_k| \ge \frac{1}{2}(|\lambda| + 1)$, поэтому

$$|P(\lambda)| \ge \frac{1}{2^n}(|\lambda| + 1)^n. \tag{11}$$

Поскольку $n = [\beta] > \frac{\beta - 2}{4}$, то функция F_1 удовлетворяет первой оценке в соотношении (7). Пользуясь неравенствами ($\lambda = x + iy$)

$$|\lambda| + 1 \ge \frac{(|x| + 1) + (|y| + 1)}{2} \ge \sqrt{(|x| + 1)(|y| + 1)},$$

и из (10), (11) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(x + iy)|^2 e^{-2b|x|^\beta} |x|^{\frac{\beta}{2} - 1} dx dy \le C_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^{\beta - 2}}{(|x| + 1)^n (|y| + 1)^n} dx dy.$$

Мы считаем, что $\alpha \le 2$, значит, $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1} \ge 2$, поэтому $n = [\beta] \ge 2$, $n - \beta + 2 = 2 - \{\beta\} > 1$ (здесь $\{\beta\} = \beta - [\beta]$ — дробная часть β). Следовательно, интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(|y|+1)^n} dy, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^{\beta-2}}{(|x|+1)^n} dx$$

сходятся и

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |F_1(x+iy)|^2 e^{-2b|x|^\beta} |x|^{\frac{\beta}{2}-1} dxdy < \infty.$$

Тем самым, целая функция F_1 обращается в нуль в точках λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет условиям (7). По теореме C′ система экспонент $e^{\lambda_k x}$, $k = 1, 2, \ldots$, не полна в пространстве $L_2(\mathbb{R}, a|t|^\alpha)$.

Теорема 2 доказана.

Условия на целую функцию, требуемые в теореме 2, не радиальные, что уменьшает эффективность применения классических теорем теории целых функций о связи роста целых функций с распределением нулей. В этих теоремах в качестве функций сравнения используются радиальные веса и, в частности, понятия порядка и типа. Переход к радиальным условиям мы обеспечим с помощью результатов работы [6], а именно, следующей теоремы.

Теорема D. *Пусть u субгармонична на всей плоскости и имеет конечный порядок роста ρ. Тогда существует целая функция f такая, что для любого $\gamma \ge \rho$*

$$|u(z) - \ln|f(z)|| \le C_\gamma \ln|z|, \quad |z| \longrightarrow \infty, \ z \notin E_\gamma,$$

причем исключительное множество E_γ может быть покрыто кругами $\{z : |z - z_j| < r_j\}$ так, что

$$\sum_{|z_j|>R} r_j = o(R^{\rho-\gamma}), \quad R \longrightarrow \infty.$$

Предварительно докажем одну лемму.

Лемма 1. *Если $\alpha \in (1; 2]$, $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$, $\lambda = x + iy$, то функция*

$$u(\lambda) = \frac{b}{\alpha}|\lambda|^\beta - b|x|^\beta$$

субгармонична на всей плоскости.

Доказательство леммы 1. Поскольку $\beta \ge 2$, то u дважды непрерывно дифференцируема и субгармоничность можно проверить по дифференциальному признаку: вычислим оператор Лапласа

$$\Delta u = b\left(\frac{\beta^2}{\alpha}|\lambda|^{\beta-2} - \beta(\beta-1)|x|^{\beta-2}\right) \ge b\beta\left(\frac{\beta}{\alpha} - (\beta-1)\right)|x|^{\beta-2} = 0.$$

Функция u имеет тип $\frac{b}{\alpha}$ при порядке β. Очевидно, для некоторой константы $A = A(\beta, b)$ выполняется неравенство

$$\sup_{|\lambda - z| \le |\lambda|^{1-\beta}} u(z) \le u(\lambda) + A, \quad |\lambda| \ge 1. \tag{12}$$

Применим теорему D к функции u: существует функция f, которая вне некоторого множества $E = E_{2\beta}$ удовлетворяет оценке

$$|u(z) - \ln|f(z)|| \le C_{2\beta} \ln|z|, \quad |z| \longrightarrow \infty, \tag{13}$$

а множество E покрывается кругами $\{z : |z - z_j| < r_j\}$ так, что

$$\sum_{|z_j|>R} r_j = o(R^{-\beta}), \quad R \longrightarrow \infty. \tag{14}$$

Возьмем точку λ с достаточно большим модулем и рассмотрим окружности $C_t = \{z : |\lambda - z| = t\}$, $\frac{1}{2}|\lambda|^{1-\beta} \leq t \leq |\lambda|^{1-\beta}$. Проецируя круги из покрытия множества E на прямую $\{z = \lambda + \tau,\ \tau > 0\}$ и учитывая свойство (14), приходим к выводу, что найдется некоторая окружность C_t, свободная от точек исключительного множества E. Следовательно, на этой окружности выполняются оценки (13). Тогда по принципу максимума для голоморфных функций и из (12) имеем

$$\ln|f(\lambda)| \leq max_{z \in C_t}(u(z) + C_{2\beta} \ln|z|) \leq u(\lambda) + C \ln|\lambda|.$$

Таким образом, можно считать, что оценка

$$u(\lambda) - C \ln|\lambda| \leq \ln|f(\lambda)|$$

в соотношении (13) выполняется вне множества E, а оценка

$$\ln|f(\lambda)| \leq u(\lambda) + C \ln|\lambda|$$

— для всех λ, $|\lambda| \geq 2$.

Из оценки (13) видно, что функция f имеет бесконечно много нулей. Пусть $n = [C] + 1$, $z_1, ..., z_n$ — нули функции f и

$$P(\lambda) = (\lambda - z_1)...(\lambda - z_n).$$

Если $M = \max_{k=1,...,n} |z_k|$, то при $|\lambda| \geq 2M + 1$ имеем

$$2^{-n}(|\lambda| + 1)^n \leq |P(\lambda)| \leq M^n(|\lambda| + 1)^n. \tag{15}$$

Для целой функции

$$L(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{P(\lambda)},$$

тем самым выполняются оценки

$$\ln|L(\lambda)| \geq u(\lambda) - C \ln(|\lambda| + 1), \quad \lambda \notin E,$$
$$\ln|L(\lambda)| \leq u(\lambda) + \text{const}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{16}$$

Выберем и зафиксируем одну из целых функций, удовлетворяющую оценкам (16). Множество нулей этой функции обозначим через Λ_0.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k,\ k = 1, 2, ...\}$ — некоторое множество точек плоскости. Систему экспонент $e^{\lambda_k \lambda}$, $k = 1, 2, ...$, будем обозначать через $\exp \Lambda$.

Теорема 3. *1. Если система экспонент* $\exp \Lambda$ *не полна в пространстве* $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$, *где* $\alpha \in (1; 2]$, *то существует ненулевая целая функция* $G(\lambda)$, *которая обращается в нуль в точках* $\lambda \in \Lambda \bigcup \Lambda_0$ *и удовлетворяет условию*

$$|G(z)| \leq C e^{\frac{b}{\alpha}|z|^\beta} |z|^{\frac{\beta - 2}{4}}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{17}$$

Параметры b, β *определяются по формулам (6).*

2. Если существует ненулевая целая функция $G(\lambda)$, *которая обращается в нуль в точках* $\lambda \in \Lambda_0 \bigcup \Lambda$, *и еще в двух "дополнительных" наборах точек* $z_1, ..., z_n$, $n = [\beta]$, $\zeta_1, ..., \zeta_N$, $N = [\beta] + [C]$ *(здесь* $[\beta]$ *— целая часть* β *и* C *— константа в оценке (16)), а также удовлетворяет оценке (17), то система экспонент* $\exp \Lambda$ *не полна в пространстве* $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$.

Доказательство теоремы 3.

1. Если система $\exp \Lambda$ не полна, то по теореме 2 существует целая функция F, удовлетворяющая оценке (10) и обращающаяся в нуль на множестве Λ. Из второго неравенства в соотношении (16) следует, что функция $G(z) = F(z)L(z)$ удовлетворяет оценке (17) и обращается в нуль на множестве $\Lambda \bigcup \Lambda_0$.

2. По "дополнительным" нулям ζ_i построим многочлен
$$P(z) = (z - \zeta_1)...(z - \zeta_N)$$
и рассмотрим отношение
$$F(z) = \frac{G(z)}{L(z)P(z)}.$$
По условиям на функцию G это целая функция, обращающаяся в нуль в точках Λ, а также в точках $z_1, ..., z_n$. В силу оценок типа (15) на многочлены и по первой оценке в соотношении (16) имеем
$$|F(z)| \leq \mathrm{Const}.e^{b|\mathrm{Re}\ z|^\beta} \frac{|z|^{\frac{\beta-2}{4}}(1+|z|)^C}{(1+|z|)^N}, \quad z \notin E.$$
По выбору числа N получаем оценку
$$|F(z)| \leq \mathrm{Const}.e^{b|\mathrm{Re}\ z|^\beta}, \quad z \notin E.$$
Опираясь на принцип максимума и на "малость"исключительного множества E, эту оценку сверху можно продолжить на всю плоскость. Тогда целая функция F удовлетворяет условиям, оговоренным во втором пункте теоремы 2, и, тем самым, система $\exp \Lambda$ не полна в пространстве $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$.

Теорема 3 доказана.

2. Применение классических теорем теории целых функций к вопросу о полноте

В названии параграфа имеются в виду теоремы типа теоремы Линделефа о связи типа и порядка целой функции с числовыми характеристиками распределения ее нулей. Через Λ будем обозначать заданную последовательность комплексных чисел, пронумерованную в порядке возрастания модулей, через Λ_0 — множество нулей фиксированной целой функции, удовлетворяющей условиям (16). Через $\widetilde{\Lambda}$ обозначим объединение последовательностей Λ и Λ_0, которая заново перенумерована по возрастанию модулей. Пусть
$$n_\Lambda(t) = \sum_{|\lambda_k| \leq t} 1$$
— считающая функция последовательности Λ и
$$\Delta_\Lambda = \overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\beta}$$
— верхняя плотность последовательности Λ при порядке β. Несколько утверждений, необходимых для дальнейшей работы со считающей функцией и верхней плотностью, сведем в одну лемму.

Лемма 2. *1. Если Λ — некоторая последовательность комплексных чисел, $n_\Lambda(t)$ — считающая функция этой последовательности и Δ_Λ — ее верхняя плотность при порядке $\beta > 1$, то*
$$\Delta_\Lambda = \overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^\beta}.$$
2. Если целая функция L удовлетворяет условиям (16) с некоторой субгармонической функцией u, множество E покрывается системой кругов с суммируемой последовательностью радиусов, μ — ассоциированная мера субгармонической функции u и $n(t)$ — считающая функция множества нулей функции L, то
$$\overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} \frac{n(t)}{t^\beta} = \overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} \frac{\mu(t)}{t^\beta},$$

где $\beta > 1$ *и* $\mu(t)$ — μ — *мера круга* $\{z: \ |z| \leq t\}$.

3. Если

$$u(\lambda) = \frac{b}{\alpha}|\lambda|^\beta - b|x|^\beta,$$

то

$$\frac{\mu(t)}{t^\beta} = \frac{b}{2\pi(\alpha-1)} \int_0^{2\pi} \left(1 - |\cos\varphi|^{\beta-2}\right) d\varphi$$

и

$$\frac{n(t)}{t^\beta} = \frac{b}{2\pi(\alpha-1)} \int_0^{2\pi} \left(1 - |\cos\varphi|^{\beta-2}\right) d\varphi + O\left(\frac{1}{t} + \frac{\ln t}{t^{\beta-1}}\right).$$

Доказательство леммы 2.

1. Очевидно, что

$$n(t) = k, \quad \text{когда } |\lambda_k| \leq t < |\lambda_{k+1}|.$$

Следовательно, при $|\lambda_k| \leq t < |\lambda_{k+1}|$ имеем

$$\frac{k}{|\lambda_{k+1}|^\beta} \leq \frac{n(t)}{t^\beta} \leq \frac{k}{|\lambda_k|^\beta},$$

значит,

$$\overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} \frac{n(t)}{t^\beta} \leq \overline{\lim}_{k\longrightarrow\infty} \frac{k}{|\lambda_k|^\beta} = \Delta_\Lambda.$$

С другой стороны,

$$\overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} \frac{n(t)}{t^\beta} \geq \overline{\lim}_{k\longrightarrow\infty} \frac{n(|\lambda_k|)}{|\lambda_k|^\beta} = \overline{\lim}_{k\longrightarrow\infty} \frac{k}{|\lambda_k|^\beta} = \Delta_\Lambda.$$

2. Пусть сумма радиусов кругов, покрывающих исключительное множество E, меньше некоторого числа M. Проецируя круги покрытия на положительную вещественную полуось, убеждаемся, что в каждом интервале длины M найдется число t так, что окружность $\{z: \ |z| = t\}$ свободна от точек множества E. Возьмем произвольное $r > 0$ и в интервалах $(r; r+M)$, $(r+2M; r+3M)$ найдем числа r_1, r_2 с указанным свойством. Считая, что $L(0) \neq 0, u(0) \neq -\infty$, применим формулу Иенсена по окружностям с центром в нуле и радиусов r_1, r_2 к функции $\ln|L(z)| - u(z)$, затем вычтем одну формулу из другой:

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{n(t)-\mu(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\ln|L(r_2e^{i\varphi})| - u(r_2e^{i\varphi}))d\varphi -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\ln|L(r_1e^{i\varphi})| - u(r_1e^{i\varphi}))d\varphi.$$

Поскольку окружности не пересекаются с исключительным множеством E, то

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{|n(t)-\mu(t)|}{t} dt = O(\ln r), \ r \longrightarrow \infty.$$

Отсюда получим соотношение

$$\frac{n(r)(r_2-r_1)}{r+3M} \leq \int_{r_1}^{r_2} \frac{n(t)}{t} dt \leq \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu(t)}{t} dt + O(\ln r) \leq$$

$$\leq \frac{\mu(r+3M)(r_2-r_1)}{r} + O(\ln r).$$

Поделим неравенство на $\frac{r^\beta(r_2-r_1)}{r+3M}$:

$$\frac{n(r)}{r^\beta} \leq \frac{\mu(r+3M)}{(r+3M)^\beta} \cdot \frac{(r+3M)^{\beta+1}}{r^{\beta+1}} + O\left(\frac{\ln r}{r^{\beta-1}(r_2-r_1)}\right). \tag{18}$$

Аналогично получим неравенство

$$\frac{\mu(r)}{r^\beta} \le \frac{n(r+3M)}{(r+3M)^\beta} \cdot \frac{(r+3M)^{\beta+1}}{r^{\beta+1}} + O\left(\frac{\ln r}{r^{\beta-1}(r_2-r_1)}\right). \qquad (18')$$

Заметим, что по условию $\beta > 1$ и $M < r_2 - r_1 < 3M$, перейдя к верхним пределам, получим

$$\overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty}\frac{n(t)}{t^\beta} = \overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty}\frac{\mu(t)}{t^\beta}.$$

3. Как известно, ассоциированная мера μ определяется через оператор Лапласа

$$d\mu(z) = \frac{1}{2\pi}\Delta u(z)dxdy.$$

Значение оператора Лапласа для функции u мы вычислили при доказательстве леммы 1. Таким образом,

$$\mu(t) = \frac{b\beta}{2\pi}\int_{|\lambda|\le t}\left(\frac{\beta}{\alpha}|\lambda|^{\beta-2} - (\beta-1)|x|^{\beta-2}\right)dxdy =$$

$$= \frac{b\beta}{2\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi} r^{\beta-1}\left(\frac{\beta}{\alpha} - (\beta-1)|\cos\varphi|^{\beta-2}\right)d\varphi dr =$$

$$= \frac{b}{2\pi(\alpha-1)}t^\beta\int_0^{2\pi}\left(1-|\cos\varphi|^{\beta-2}\right)d\varphi.$$

Отсюда и из (18), (18′) вытекает

$$\frac{n(t)}{t^\beta} = \frac{b}{2\pi(\alpha-1)}\int_0^{2\pi}\left(1-|\cos\varphi|^{\beta-2}\right)d\varphi + O\left(\frac{1}{r}+\frac{\ln r}{r^{\beta-1}}\right).$$

Лемма 2 доказана.

Теорема 4. *Если верхняя плотность последовательности* Λ *удовлетворяет условию*

$$\Delta_\Lambda > \frac{b}{\alpha-1}\left(e - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-|\cos\varphi|^{\beta-2})d\varphi\right),$$

то система экспонент $\exp\Lambda$ *полна в пространстве* $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$, *где* $\alpha \in (1;2]$.

Доказательство теоремы 4. Проведем доказательство от противного: предположим, что система $\exp\Lambda$ не полна в пространстве $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$. По п. 1 теоремы 3 в этом случае найдется целая функция G, удовлетворяющая оценке (17) и обращающаяся в нуль в точках множества $\Lambda\bigcup\Lambda_0$. Оценка (17) означает, в частности, что функция G имеет тип не выше $\frac{b}{\alpha}$ при порядке β. По известной теореме о связи роста целой функции с распределением ее корней ([4], теорема 2.3) имеет место соотношение

$$\Delta_{\Lambda\bigcup\Lambda_0} \le \frac{be\beta}{\alpha}.$$

По п. 1 леммы 2 из этого неравенства следует, что

$$\overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty}\frac{n_\Lambda(t)+n_{\Lambda_0}(t)}{t^\beta} \le \frac{be\beta}{\alpha}.$$

По п. 3 той же леммы имеем

$$\Delta_\Lambda = \overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty}\frac{n_\Lambda(t)}{t^\beta} \le \frac{be\beta}{\alpha} - \frac{b}{2\pi(\alpha-1)}\int_0^{2\pi}\left(1-|\cos\varphi|^{\beta-2}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{b}{\alpha-1}\left(e - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-|\cos\varphi|^{\beta-2}\right)d\varphi\right).$$

Теорема 4 доказана.

Замечание. Достаточное условие полноты можно получить на основе той же теоремы о целых функциях и п. 1 теоремы 2. Получилось бы более сильное условие

$$\Delta_\Lambda > be\beta = \frac{be\alpha}{\alpha - 1}.$$

Более точное достаточное условие полноты можно получить, если пользоваться интегральной считающей функцией нулей

$$N_\Lambda(r) = \int_0^r \frac{n_\Lambda(t)}{t} dt.$$

Теорема 5. *Если*

$$\overline{\lim}_{r \longrightarrow \infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\beta} > \frac{b}{2\pi\alpha} \int_0^{2\pi} |\cos\varphi|^{\beta-2} d\varphi,$$

то система экспонент $\exp\Lambda$ *полна в пространстве* $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$, *где* $\alpha \in (1; 2]$.

Доказательство теоремы 5. Проведем доказательство снова от противного: предположим, что система $\exp\Lambda$ не полна в пространстве $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$. По п. 1 теоремы 3 в этом случае найдется целая функция G, обращающаяся в нуль в точках множества $\Lambda \bigcup \Lambda_0$ и удовлетворяющая оценке (17), то есть

$$\ln|G(re^{i\varphi}| \le \frac{b}{\alpha} r^\beta + \frac{\beta - 2}{4} \ln r + c, \quad re^{i\varphi} \in \mathbb{C}.$$

Будем считать, что $G(0) \ne 0$. Интегрируя последнее соотношение по φ и применяя формулу Иенсена, получим

$$\int_0^r \frac{n_\Lambda(t) + n_{\Lambda_0}(t)}{t} dt \le \frac{b}{\alpha} r^\beta + \frac{\beta - 2}{4} \ln r + c, \quad r > 0. \tag{19}$$

По п. 3 леммы 2 можем вычислить интеграл

$$\int_0^r \frac{n_{\Lambda_0}(t)}{t} dt = \frac{b}{2\pi(\alpha - 1)\beta} r^\beta \int_0^{2\pi} (1 - |\cos\varphi|^{\beta-2}) d\varphi + O(r^{\beta-1} + r\ln r).$$

Поделив это выражение на r^β и перейдя к пределу при $r \longrightarrow \infty$, получим

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} \frac{1}{r^\beta} \int_0^r \frac{n_{\Lambda_0}(t)}{t} dt = \frac{b}{2\pi\alpha} \int_0^{2\pi} (1 - |\cos\varphi|^{\beta-2}) d\varphi.$$

Отсюда и из (19) имеем

$$\overline{\lim}_{r \longrightarrow \infty} \frac{1}{r^\beta} \int_0^r \frac{n_\Lambda(t)}{t} dt \le \frac{b}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - |\cos\varphi|^{\beta-2}) d\varphi\right) = \frac{b}{2\pi\alpha} \int_0^{2\pi} |\cos\varphi|^{\beta-2} d\varphi.$$

Это неравенство противоречит предположению теоремы.

Теорема 5 доказана.

Замечание. Оценка, приведенная в теореме 5, неулучшаемая в том смысле, что существует система точек Λ, для которой

$$\overline{\lim}_{r \longrightarrow \infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\beta} = \frac{b}{2\pi\alpha} \int_0^{2\pi} |\cos\varphi|^{\beta-2} d\varphi,$$

и при этом система $\exp\Lambda$ уже не полна в пространстве $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$.

Достаточные условия полноты, доказанные в теоремах 4 и 5, не являются необходимыми. Некоторые необходимые условия полноты или, что то же самое, достаточные условия неполноты можно доказать на основе теоремы Линделефа. Приведем еще две характеристики последовательности нулей ([4], стр. 35). Для последовательности комплексных чисел λ_k, $|\lambda_k| \leq |\lambda_{k+1}|$, $k = 1, 2, ...$, положим

$$\delta(r) = \frac{1}{2} \sum_{|\lambda_k| \leq r} \frac{1}{\lambda_k^2}, \quad \delta = \overline{\lim}_{r \longrightarrow \infty} |\delta(r)|, \quad \gamma = \max(\Delta, \delta).$$

Теорема 6. *Пусть λ_k, $k = 1, 2, ...$, — возрастающая по модулю последовательность комплексных чисел чисел. Тогда*

1. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^2} < \infty, \tag{20}$$

то система экспонент $\exp \Lambda$ *не полна в пространствах* $L_2(\mathbb{R}, b|x|^2)$ *для любого* b.

2. Если ряд в (20) расходится и при этом верхняя плотность последовательности при порядке 2 равна нулю, то система экспонент $\exp \Lambda$ *не полна в пространствах* $L_2(\mathbb{R}, b|x|^2)$ *для любого* b.

Доказательство теоремы 6.

1. По теореме Линделефа ([4], стр. 35, теорема 3.9) в этом случае каноническое произведение

$$F(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_k}}$$

имеет минимальный тип при порядке 2, поэтому для произвольного многочлена $P(\lambda)$ функция $G(\lambda) = F(\lambda)P(\lambda)$ тоже будет минимального типа и, тем самым, будет удовлетворять условиям п. 2 теоремы 3.

2. В условиях п. 2 теоремы 6 следует рассмотреть каноническое произведение

$$F(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{i\lambda_k}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_k} + \frac{\lambda}{i\lambda_k}}.$$

Множество нулей $\widetilde{\Lambda}$ функции F состоит из Λ и $i\Lambda = (i\lambda_k)$, поэтому

$$\delta_{\widetilde{\Lambda}}(r) = 0, \quad r > 0.$$

Следовательно, для функции F величина δ равна 0. По п. 1 леммы 2 $\Delta_{\widetilde{\Lambda}} = 2\Delta_{\Lambda} = 0$ и, тем самым, равна нулю и γ. Снова по теореме Линделефа функция F будет минимального типа. Остается снова воспользоваться п. 2 теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Напалков В.В., Румянцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Полнота систем экспонент в пространстве с весом* // ДАН. Т. 429. № 2. 2009. С. 155–158.
2. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Пэли-Винера на весовые пространства* // Математ. заметки. Т. 48, вып 5. 1990. С. 80–85.
3. Юлмухаметов Р.С. *Асимптотика многомерного интеграла Лапласа* // Сб. "Исследования по теории приближений". Институт математики с ВЦ БНЦ УрО АН СССР. Уфа. 1989. 151 с.
4. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука. 1983. 175 с.
5. Юлмухаметов Р.С., Напалков В.В. *Полнота систем экспонент в пространстве с весом* // ДАН. Т. 415. № 4. 2007. С. 1–3.
6. Седлецкий А.М. *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации.* М.: Физматлит. 2005. 504 с.
7. Хабибуллин Б.Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности.* Уфа. РИЦ БашГУ. 2006. 171 с.

Валентин Васильевич Напалков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: napalkov@matem.anrb.ru

Алла Александровна Румянцева,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: allarum@mail.ru

Ринад Салаватович Юлмухаметов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: yulmukhametov@mail.ru