ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 1 (2010). С. 87-96.

УДК 517.5

ПОЧТИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ БАЗИС

А.С. КРИВОШЕЕВ

Аннотация. В работе изучаются почти экспоненциальные последовательности функций, аналитических в выпуклой области. Рассматриваются ряды по системам таких функций. Получено описание пространства последовательностей коэффициентов подобных рядов. Показывается также, что почти экспоненциальный базис всегда является и базисом Кете.

Ключевые слова: аналитическая функция, выпуклая область, экспонента, базис.

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $\{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ — последовательность выпуклых компактов, исчерпывающая область D, т.е. выполнено следующее: 1) $K_p \subset int K_{p+1}$ для всех $p \geq 1$ (int обозначает внутренность множества), 2) $D = \bigcup_{p=1}^{\infty} K_p$. Пусть $H_M(z)$ обозначает опорную функцию множества M (точнее говоря, комплексно сопряженного с M множества):

$$H_M(z) = \sup_{w \in M} \mathsf{Re}(zw), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда из условия 1) следует, что для каждого $p \geq 1$ существует число $\alpha_p > 0$ такое, что

$$H_{K_p}(z) + \alpha_p |z| \leqslant H_{K_{p+1}}(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Последовательность функций $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$, аналитических в области D, будем называть почти экспоненциальной, если найдутся числа $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$, $|\lambda_m| \to \infty$ при $m \to \infty$, для которых выполнены два условия: 1) для каждого $p \geq 1$ существуют постоянная $a > 0$ и номер s такие, что

$$\sup_{w \in K_p} |e_m(w)| \leqslant a \exp(H_{K_s}(\lambda_m)), \quad m = 1, 2, \ldots;$$

2) для каждого $p \geq 1$ существуют постоянная $b > 0$ и номер s такие, что

$$b \exp(H_{K_p}(\lambda_m)) \leqslant \sup_{w \in K_s} |e_m(w)|, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Числа $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$ будем называть показателями функций $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$. Условия 1 и 2 означают, что последовательность $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ в некотором смысле схожа с последовательностью экспонент $\{\exp(\lambda_m z)\}_{m=1}^{\infty}$. Действительно, из условия 1 с учетом определения опорной функции получаем соотношения:

$$\sup_{w \in K_p} |e_m(w)| \leqslant a \exp(H_{K_s}(\lambda_m)) = a \sup_{w \in K_s} \exp(\mathsf{Re}(\lambda_m w)) = a \sup_{w \in K_s} |\exp(\lambda_m w)|, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Условие 2 дает аналогичную оценку снизу на модуль функции $e_m(w)$. Очевидно, что указанная последовательность экспонент является почти экспоненциальной последовательностью. В качестве примера последней рассмотрим еще семейство функций

A.S. Krivosheyev, An almost exponential basis.

Поступила 10 января 2010 г.

$\{z^n \exp(\lambda_m z)\}_{m=1,n=1}^{\infty,k_m}$. В работе [1] в предложении 2.3 по сути показано, что в случае ограниченной области D при условии $k_m/|\lambda_m| \to 0$ это семейство является почти экспоненциальной последовательностью. Более того, можно показать, что в случае ограниченной выпуклой области D условие $k_m/|\lambda_m| \to 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы семейство функций $\{z^n \exp(\lambda_m z)\}_{m=1,n=1}^{\infty,k_m}$ было почти экспоненциальной последовательностью.

Перейдем теперь к исследованию вопросов сходимости рядов вида

$$\sum_{m=1}^{\infty} d_m e_m(z), \tag{2}$$

где $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность функций в выпуклой области D.

Прежде всего опишем пространство коэффициентов $d = \{d_m\}$ рядов (2), сходящихся равномерно на компактах в области D. Пусть $\Lambda = \{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$, $|\lambda_m| \to \infty$ при $m \to \infty$. Для каждого $p \geq 1$ введем банахово пространство числовых последовательностей

$$Q_p(\Lambda) = \{d = \{d_m\} : ||d||_p = \sup_m (|d_m| \exp(H_{K_p}(\lambda_m))) < \infty\}.$$

Положим $Q(\Lambda, D) = \bigcap_{p=1}^{\infty} Q_p(\Lambda)$. На пространстве $Q(\Lambda, D)$ определим метрику по формуле

$$\rho(d, d') = \sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p} \frac{||d - d'||_p}{1 + ||d - d'||_p}.$$

С этой метрикой $Q(\Lambda, D)$ становится пространством Фреше. Сходимость по метрике равносильна сходимости в каждом $Q_p(\Lambda)$, $p \geq 1$. Таким образом, $Q(\Lambda, D)$ является проективным пределом пространств $Q_p(\Lambda)$.

Лемма 1. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$. Предположим, что для системы $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ выполнен пункт 2 из определения почти экспоненциальной последовательности в D с показателями $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$. Предположим, что ряд (2) сходится равномерно на каждом компакте области D. Тогда верно включение $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$.*

Доказательство. Фиксируем номер $p \geq 1$. По условию существуют постоянная $b > 0$ и номер s такие, что

$$b \exp(H_{K_p}(\lambda_m)) \leqslant \sup_{w \in K_s} |e_m(w)|, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

В силу равномерной сходимости ряда (2) на компакте K_s найдется номер N такой, что для всех $m > N$ и всех $w \in K_s$ выполнено неравенство $|d_m||e_m(w)| \leqslant 1$. Следовательно, имеет место также оценка $|d_m| \sup_{w \in K_s} |e_m(w)| \leqslant 1$, $m > N$. Отсюда с учетом (3) получаем:

$$b|d_m| \exp(H_{K_p}(\lambda_m)) \leqslant 1, \quad m > N.$$

Таким образом, $d = \{d_m\} \in Q_p(\Lambda)$. В силу произвольности p это означает, что верно включение $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$. Лемма доказана.

Далее мы покажем, что при некотором условии на рост показателей λ_m верно утверждение, обратное к лемме 1. Введем следующую характеристику роста последовательности Λ:

$$\Im(\Lambda) = \overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{\ln m}{|\lambda_m|}.$$

В книге [2] величина $\Im(\Lambda)$ использовалась для оценки расстояния между абсциссами простой и абсолютной сходимости ряда Дирихле. В частности, там показано, что при $\Im(\Lambda) = 0$

эти абсциссы совпадают. Такое становится возможным благодаря тесной связи между величиной $\Im(\Lambda)$ и сходимостью ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \exp(-\varepsilon|\lambda_m|). \tag{4}$$

Эта связь отражена в следующей лемме.

Лемма 2. *Ряд (4) сходится для любого $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда $\Im(\Lambda) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\Im(\Lambda) = 0$. Тогда для каждого $\delta > 0$ существует номер $N(\delta)$ такой, что $\ln m < \delta|\lambda_m|$ для всех $m \geq N(\delta)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta < \varepsilon$. Имеем:

$$\sum_{m=N(\delta)}^{\infty} \exp(-\varepsilon|\lambda_m|) < \sum_{m=N(\delta)}^{\infty} \exp(-\frac{\varepsilon \ln m}{\delta}) = \sum_{m=N(\delta)}^{\infty} \frac{1}{m^{\frac{\varepsilon}{\delta}}} < \infty.$$

Следовательно, ряд (4) сходится для любого $\varepsilon > 0$. Покажем обратное. Пусть верно последнее утверждение. Поскольку члены ряда (4) положительны, то их перестановка не влияет на сходимость ряда. Поэтому можно считать, что λ_m пронумерованы по возрастанию модулей, т.е. $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots$. Кроме того, если последовательность $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена, то ряд (4) расходится. Следовательно, $|\lambda_m| \to \infty$, когда $m \to \infty$. Дальнейшее доказательство проведем от противного. Предположим, что $\Im(\Lambda) = 4c > 0$. Тогда существует подпоследовательность натуральных чисел $\{m(j)\}_{j=1}^{\infty}$ такая, что $\ln m(j) \geq 2c|\lambda_{m(j)}|$, $j = 1, 2, \ldots$ Переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что $2|\lambda_{m(j)}| \leqslant |\lambda_{m(j+1)}|$, $j = 1, 2, \ldots$ Составим теперь новую подпоследовательность $m(j,l)$, $j = 1, 2, \ldots$, $l = 1, 2, \ldots, j'$, где j' — целая часть числа $m(j)/2$. Положим $m(j,l) = m(j) - j' + l$. В силу возрастания модулей λ_m имеем:

$$\frac{\ln m(j,l)}{|\lambda_{m(j,l)}|} \geq \frac{\ln m(j,l)}{|\lambda_{m(j)}|} \geq \frac{\ln m(j,1)}{|\lambda_{m(j)}|} \geq \frac{\ln m(j) - \ln 2}{|\lambda_{m(j)}|} \geq 2c - \frac{\ln 2}{|\lambda_{m(j)}|}.$$

Так как $|\lambda_m| \to \infty$, то найдется номер j_0 такой, что

$$\frac{\ln m(j,l)}{|\lambda_{m(j,l)}|} \geq c, \quad j \geq j_0, \quad l = 1, 2, \ldots, j'.$$

Отсюда для всех $j \geq j_0$ и $\varepsilon = c$ получаем:

$$\sum_{m=m(j)-j'+1}^{m(j)} \exp(-\varepsilon|\lambda_m|) = \sum_{l=1}^{j'} \exp(-\varepsilon|\lambda_{m(j,l)}|) \geq \sum_{l=1}^{j'} \exp(\frac{-\varepsilon}{c} \ln m(j,l)) =$$

$$= \sum_{l=1}^{j'} \frac{1}{m(j,l)^{\frac{\varepsilon}{c}}} = \sum_{l=1}^{j'} \frac{1}{m(j,l)} \geq \frac{j'}{m(j)} \geq \frac{2^{-1}m(j) - 1}{m(j)}.$$

Поскольку $m(j) \to \infty$, когда $j \to \infty$, то это противоречит сходимости ряда (4) при $\varepsilon = c$. Таким образом, $\Im(\Lambda) = 0$ и лемма доказана.

Покажем теперь, что при условии $\Im(\Lambda) = 0$ имеет место утверждение, обратное к лемме 1 и даже более сильное.

Лемма 3. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$. Предположим, что для системы $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ выполнен пункт 1 из определения почти экспоненциальной последовательности в D с показателями $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$ такими, что $\Im(\Lambda) = 0$. Пусть далее $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$. Тогда для каждого номера $p \geq 1$ существует номер s и постоянная $A > 0$, не зависящие от $d = \{d_m\}$, для которых выполнено неравенство*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z\in K_p} |e_m(z)| \leqslant A||d||_s.$$

В частности, ряд (2) сходится абсолютно и равномерно на каждом компакте области D.

Доказательство. Пусть $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$. Фиксируем номер $p \geq 1$. По условию найдется номер s и постоянная $a > 0$ такие, что

$$\sup_{w\in K_p} |e_m(w)| \leqslant a \exp(H_{K_{s-1}}(\lambda_m)), \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Следовательно, мы имеем:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z\in K_p} |e_m(z)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \exp(H_{K_{s-1}}(\lambda_m)) =$$
$$= a\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \exp(H_{K_s}(\lambda_m)) \exp(H_{K_{s-1}}(\lambda_m) - H_{K_s}(\lambda_m)) \leqslant$$
$$\leqslant a||d||_s \sum_{m=1}^{\infty} \exp(H_{K_{s-1}}(\lambda_m) - H_{K_s}(\lambda_m)) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-\alpha_{s-1}|\lambda_m|).$$

При получении последней оценки мы воспользовались неравенством (1). Учитывая лемму 2, окончательно получаем:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z\in K_p} |e_m(z)| \leqslant A||d||_s < \infty,$$

где номер s и постоянная A зависят лишь от функций e_m, чисел λ_m, $m \geq 1$ и номера p. Лемма доказана.

Сравнивая лемму 1 и лемму 3, легко заметить, что при условии $\Im(\Lambda) = 0$ равномерная сходимость ряда (2) влечет за собой его абсолютную сходимость. Более точно, имеет место следующее утверждение.

Следствие. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$; $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность в D с показателями $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$, такими, что $\Im(\Lambda) = 0$. Предположим, что ряд (2) сходится равномерно на каждом компакте области D. Тогда для каждого номера $p \geq 1$ существует номер s и постоянная $A > 0$, не зависящая от $d = \{d_m\}$, для которых выполнено неравенство*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z\in K_p} |e_m(z)| \leqslant A||d||_s.$$

В частности, ряд (2) сходится абсолютно в области D.

Отметим, что условие $\Im(\Lambda) = 0$ в лемме 3 в случае ограниченной выпуклой области D является необходимым на всем классе последовательностей $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$, что и подтверждает следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$; $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность в D с показателями $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$. Предположим, что для всех $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$ и каждого номера $s = 1, 2, \ldots$ сходится ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z\in K_s} |e_m(z)|.$$

Тогда верно равенство $\Im(\Lambda) = 0$.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку последовательность компактов $\{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ исчерпывает область D, а последняя ограничена, то найдется номер $p = 1, 2, \ldots$ такой, что выполняется неравенство

$$H_D(z) \leqslant H_{K_p}(z) + \varepsilon|z|, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Согласно определению почти экспоненциальной последовательности существуют постоянная $b > 0$ и номер s, удовлетворяющие условию

$$b \exp(H_{K_p}(\lambda_m)) \leqslant \sup_{w \in K_s} |e_m(w)|, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Положим $d_m = \exp(-H_{K_m}(\lambda_m))$, $m = 1, 2, \ldots$ Используя неравенство (1) для каждого $l = 1, 2, \ldots$, имеем:

$$\sup_{m \geq l}(|d_m| \exp(H_{K_l}(\lambda_m))) = \sup_{m \geq l}(\exp(H_{K_l}(\lambda_m) - H_{K_m}(\lambda_m))) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{m \geq l}(\exp(H_{K_m}(\lambda_m) - H_{K_m}(\lambda_m))) = 1.$$

Это означает, что $d = (d_m) \in Q_l(\Lambda)$. В силу произвольности номера l верно также включение $d \in Q(\Lambda, D)$. Тогда по условию леммы сходится ряд $\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z \in K_s} |e_m(z)|$. Учитывая это, неравенства (5),(6) и то, что $H_{K_m}(z) \leqslant H_D(z)$, $z \in \mathbb{C}$, (в силу вложения $K_m \subset D$), $m = 1, 2, \ldots$, получаем:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \exp(-\varepsilon|\lambda_m|) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \exp(H_{K_p}(\lambda_m) - H_D(\lambda_m)) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \exp(H_{K_p}(\lambda_m) - H_{K_m}(\lambda_m)) =$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} d_m \exp(H_{K_p}(\lambda_m)) \leqslant b^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} d_m \sup_{z \in K_s} |e_m(z)| = b^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z \in K_s} |e_m(z)| < \infty.$$

Таким образом, ряд (4) сходится для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, по лемме 2 мы получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Из доказанных утверждений следует, что для почти экспоненциальной последовательности $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ в выпуклой области D с показателями $\Lambda = \{\lambda_m\}$ такими, что $\Im(\Lambda) = 0$, множество последовательностей коэффициентов $d = \{d_m\}$, при которых ряд (2) сходится равномерно на компактах из D, совпадает с множеством $Q(\Lambda, D)$. Оказывается верно и обратное. Более точно, имеет место

Теорема 1. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda_m\}$ — последовательность комплексных чисел такая, что $\Im(\Lambda) = 0$. Тогда равносильны следующие утверждения.*

1) $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность в D с показателями λ_m.

2) Множество последовательностей коэффициентов $d = \{d_m\}$, при которых ряд (2) сходится равномерно на компактах из D, совпадает с множеством $Q(\Lambda, D)$, и функции $e_m(w)$ отличны от тождественного нуля, $m \geq 1$.

Доказательство. 1)⇒2). Эта импликация уже установлена в леммах 1 и 3.

2)⇒1). Предположим, что ряд (2) сходится равномерно на компактах из области D для каждой последовательности коэффициентов $d \in Q(\Lambda, D)$. Покажем, что в этом случае выполнен пункт 1 из определения почти экспоненциальной последовательности. Проведем доказательство от противного. Допустим, что пункт 1 не выполняется. Тогда найдется номер $p \geq 1$ такой, что для каждого $s \geq 1$ и некоторого номера m_s верно неравенство

$$\sup_{w \in K_p} |e_{m_s}(w)| \geq \exp(H_{K_s}(\lambda_{m_s})). \tag{7}$$

При этом очевидно можно считать, что $m_s \to \infty$, когда $s \to \infty$. Рассмотрим последовательность $d = \{d_m\}$, где $d_{m_s} = \exp(-H_{K_s}(\lambda_{m_s}))$, $s \geq 1$, и $d_m = 0$ для всех номеров m, отличных от m_s, $s \geq 1$. С учетом (1) и определения d_m для каждого номера $l \geq 1$ имеем:

$$|d_m| \exp(H_{K_l}(\lambda_m)) \leqslant 1, \quad m \geq l.$$

Следовательно, $d = \{d_m\}$ является элементом пространства $Q(\Lambda, D)$. Тогда по условию ряд (2) с этими коэффициентами d_m сходится равномерно на компактах из D. В частности, это означает, что $|d_m| \sup_{w \in K_p} |e_m(w)| \to 0$ при $m \to \infty$. С другой стороны, в силу (7) и определения чисел d_{m_s} верно неравенство

$$d_{m_s} \sup_{w \in K_p} |e_{m_s}(w)| = \exp(-H_{K_s}(\lambda_{m_s})) \sup_{w \in K_p} |e_{m_s}(w)| \geq 1, \quad s \geq 1.$$

Это противоречит предыдущему, поскольку $m_s \to \infty$, когда $s \to \infty$. Таким образом, наше допущение неверно, т.е. для $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ выполнен пункт 1 из определения почти экспоненциальной последовательности. Покажем, что для $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ выполнен также и пункт 2 из этого определения. Предположим, что это не так. Тогда, учитывая, что $e_m(w)$ отлична от тождественного нуля, $m \geq 1$, найдем номер $p \geq 1$ такой, что для каждого $s \geq 1$ и некоторого m_s имеет место неравенство

$$\exp(H_{K_p}(\lambda_{m_s})) \geq \sup_{w \in K_s} |e_{m_s}(w)|. \tag{8}$$

При этом можно считать, что $|\lambda_{m_s}| \geq s$ для всех $s \geq 1$. Рассмотрим последовательность $d = \{d_m\}$ где $d_{m_s} = \exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m_s}))$, $s \geq 1$, и $d_m = 0$ для всех остальных номеров m. В силу определения чисел d_m для всех $l \geq 1$ имеем:

$$m\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z \in K_l} |e_(z)| = \sum_{s=1}^{\infty} |d_{m_s}| \sup_{z \in K_l} |e_{m_s}(z)| = \sum_{s=1}^{\infty} \exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m_s})) \sup_{z \in K_l} |e_{m_s}(z)| =$$

$$= \sum_{s=1}^{l} \exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m_s})) \sup_{z \in K_l} |e_{m_s}(z)| + \sum_{s=l+1}^{\infty} \exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m_s})) \sup_{z \in K_l} |e_{m_s}(z)|.$$

Так как K_j — возрастающая последовательность компактов, то с учетом неравенств (8) и (1) получаем отсюда

$$m\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z \in K_l} |e_(z)| \leqslant \sum_{s=1}^{l} \exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m_s})) \sup_{z \in K_l} |e_{m_s}(z)| +$$

$$+ \sum_{s=l+1}^{\infty} \exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m_s})) \sup_{z \in K_l} |e_{m_s}(z)| \leqslant \sum_{s=1}^{l} \exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m_s})) \sup_{z \in K_l} |e_{m_s}(z)| +$$

$$+ \sum_{s=l+1}^{\infty} \exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m_s})) \exp(H_{K_p}(\lambda_{m_s})) \leqslant \sum_{s=1}^{l} \exp(-H_{K_{p+1}}(\lambda_{m_s})) \sup_{z \in K_l} |e_{m_s}(z)| +$$

$$+ \sum_{s=l+1}^{\infty} \exp(-\alpha_p |\lambda_{m_s}|).$$

Поскольку $|\lambda_{m_s}| \geq s$ для всех $s \geq 1$, то $\ln s / |\lambda_{m_s}| \to 0$, когда $s \to \infty$. Тогда по лемме 2 последний ряд сходится. Это означает, что ряд (2) с выбранной нами последовательностью коэффициентов $d = \{d_m\}$ сходится равномерно на каждом компакте K_l, $l \geq 1$, а так как последовательность $\{K_l\}$ исчерпывает область D, то и на любом компакте из D.

Следовательно, по условию $d = \{d_m\}$ должна принадлежать множеству $Q(\Lambda, D)$. С другой стороны, в силу определения последовательности $d = \{d_m\}$ с учетом неравенства (1) имеем:

$$||d||_{p+1} = \sup_m (|d|_m \exp(H_{K_{p+2}}(\lambda_m))) = \sup_s (|d_{m_s}| \exp(H_{K_{p+2}}(\lambda_{m_s}))) =$$

$$= \sup_s (\exp(H_{Kp+1}(\lambda_{m_s})) \exp(H_{K_{p+2}}(\lambda_{m_s}))) \geq \sup_s (\exp(\alpha_{p+1}|\lambda_{m_s}|) = \infty,$$

т.е. $d = \{d_m\}$ не принадлежит $Q(\Lambda, D)$. Полученное противоречие означает, что для $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ выполнен пункт 2 из определения почти экспоненциальной последовательности.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Приведем еще некоторую модификацию теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1) $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность в D с показателями $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$ и $\Im(\Lambda) = 0$.

2) Множество последовательностей коэффициентов $d = \{d_m\}$, при которых ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z \in K_s} |e_m(z)| \tag{9}$$

сходится для каждого $s \geq 1$, совпадает с множеством $Q(\Lambda, D)$, и функция $e_m(w)$ отлична от тождественного нуля, $m \geq 1$.

Доказательство. 1)⇒2). Эта импликация уже установлена в леммах 1 и 3, поскольку сходимость ряда (9) для всех $s \geq 1$ влечет за собой равномерную сходимость ряда (2) на каждом компакте из области D.

2)⇒1). Пусть ряд (9) сходится для каждой последовательности коэффициентов $d \in Q(\Lambda, D)$ и всех $s \geq 1$. Тогда ряд (2) сходится равномерно на компактах из области D для всех $d \in Q(\Lambda, D)$. Повторяя далее дословно рассуждения из теоремы 1, убеждаемся, что для $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ выполнен пункт 1 из определения почти экспоненциальной последовательности. Пункт 2 из этого определения также выполнен для $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$. Действительно, в противном случае в теореме 1 построена последовательность коэффициентов $d = \{d_m\}$, не принадлежащая множеству $Q(\Lambda, D)$, такая, что ряд (9) сходится для всех $s \geq 1$. Таким образом, $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность. Тогда с учетом утверждения 2 настоящей теоремы по лемме 4 получаем равенство $\Im(\Lambda) = 0$. Теорема доказана.

Обратимся теперь к основной задаче данной работы. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область, $H(D)$ — пространство функций, аналитических в D с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах D, $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность функций из $H(D)$. Через W обозначим замыкание в $H(D)$ линейной оболочки системы $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$. Проблему, стоящую перед нами, можно сформулировать следующим образом: при каких условиях на $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ каждая функция из W разлагается в ряд вида (2)? При этом наиболее интересна ситуация, когда такое разложение является единственным, поскольку в этом случае подпространство $W \subset H(D)$ получает наиболее простое описание. В связи с этим приведем соответствующий результат. Но прежде введем еще некоторые определения и обозначения. Будем говорить, что $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ является почти экспоненциальным базисом с показателями $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$ в подпространстве W, если $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность в D с показателями λ_m, и каждая функция из W единственным образом разлагается в ряд вида (2), который сходится равномерно на каждом компакте из области D.

Определим оператор $\aleph$, действующий на пространстве $Q(\Lambda, D)$, со значениями в подпространстве $W \subset H(D)$ по правилу: последовательности $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$ поставим в соответствие сумму ряда (2), сходящегося в топологии пространства $H(D)$.

Пусть $H^*(D)$ обозначает пространство линейных непрерывных функционалов на $H(D)$, называемое еще пространством аналитических функционалов в области D. Последовательность $\{\mu\}_{m=1}^{\infty} \subset H^*(D)$ называется биортогональной к $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$, если $\mu_m(e_m) = 1$ и $\mu_k(e_m) = 0$ при $k \neq m$.

Теорема 3. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda_m\}$ — последовательность комплексных чисел такая, что $\Im(\Lambda) = 0$. Предположим, что $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальный базис с показателями λ_m в W. Тогда оператор $\aleph$ является изоморфизмом линейных топологических пространств $Q(\Lambda, D)$ и W, и существует биортогональная к $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ последовательность функционалов $\{\mu\}_{m=1}^{\infty} \subset H^*(D)$.*

Доказательство. Пусть $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность в D с показателями λ_m такими, что $\Im(\Lambda) = 0$. Тогда по лемме 3 для любой последовательности $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$ ряд (2) сходится равномерно на каждом компакте области D. Поэтому оператор $\aleph$ определен на всем пространстве $Q(\Lambda, D)$. Поскольку $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — базис в W, то любая функция из W раскладывается в ряд (2), сходящийся в топологии $H(D)$. При этом по лемме 1 последовательность его коэффициентов является элементом множества $Q(\Lambda, D)$. Следовательно, оператор $\aleph$ сюръективен. Заметим еще, что по определению почти экспоненциального базиса указанное разложение единственное. Это влечет за собой инъективность $\aleph$. Таким образом, $\aleph$ — биективный линейный оператор. Далее по лемме 3 для любого $p \geq 1$ существует номер s и постоянная $A > 0$, не зависящие от $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$, такие, что

$$\sup_{z \in K_p} |\aleph(d)(z)| = \sup_{z \in K_p} |\sum_{m=1}^{\infty} d_m e_m(z)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z \in K_p} |e_m(z)| \leqslant A||d||_s. \tag{10}$$

Отсюда следует непрерывность оператора $\aleph$. Как уже отмечалось ранее, $Q(\Lambda, D)$ является пространством Фреше. W как замкнутое подпространство пространства Фреше $H(D)$ также является пространством Фреше. Тогда по теореме Банаха об обратном операторе для пространств Фреше $\aleph$ есть изоморфизм линейных топологических пространств $Q(\Lambda, D)$ и W.

Остается доказать существование последовательности $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H^*(D)$ биортогональной к $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$. Пусть g — произвольная функция из W, и $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$ — последовательность коэффициентов разложения g по системе $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ (т.е. $\aleph(d) = g$). Для каждого $m \geq 1$ положим $\mu_m(g) = d_m$. В результате мы получили линейный функционал μ_m на пространстве W. В силу (10) имеем

$$|d_m| \sup_{z \in K_1} |e_m(z)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \sup_{z \in K_1} |e_m(z)| \leqslant A||d||_s, \tag{11}$$

где постоянная A и номер s не зависят от $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, Q)$, а значит и от $g \in W$. По доказанному обратный оператор $\aleph^{-1}$ непрерывен. Поэтому найдется номер l и постоянная $C > 0$ такие, что $||d||_s = ||\aleph^{-1}(g)||_s \leqslant C \sup_{z \in K_l} |g(z)|$ для всех $g \in W$. Отсюда с учетом (11) и определения μ_m получаем

$$|\mu_m(g)| = |d_m| \leqslant A(\sup_{z \in K_1} |e_m(z)|)^{-1} ||d||_s \leqslant A(\sup_{z \in K_1} |e_m(z)|)^{-1} C \sup_{z \in K_l} |g(z)|, \quad g \in W.$$

По теореме Хана-Банаха μ_m продолжается на все пространство $H(D)$ как линейный функционал с сохранением последней оценки, которая влечет за собой непрерывность μ_m на

$H(D)$. По определению μ_m имеем: $\mu_m(e_m) = 1$ и $\mu_m(e_k) = 0$ при $k \neq m$. Таким образом, последовательность $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ лежит в $H^*(D)$ и является биортогональной к $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$. Теорема полностью доказана.

Из теоремы 3 вытекает, что почти экспоненциальный базис $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ в W является базисом Шаудера, т.е. координатные функционалы $\mu_m(g) = d_m$ (которые образуют биортогональную к $\{e_m\}$ систему) непрерывны. Почти экспоненциальный базис обладает и более сильным свойством. Напомним, что базисом Кете в линейном топологическом пространстве L называется система его элементов $\{e_m\}$ такая, что для любого $g \in L$ верно представление

$$g = \sum_{m=1}^{\infty} d_m e_m,$$

где ряд сходится в топологии пространства L, и, кроме того, выполнено следующее: для каждой полунормы $|| \, ||$ существует полунорма $|| \, ||'$ и $\beta > 0$, не зависящие от $g \in L$, такие, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| ||e_m|| \leqslant \beta ||g||'.$$

Следствие. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda\}$ — последовательность комплексных чисел такая, что $\Im(\Lambda) = 0$. Предположим, что $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальный базис с показателями λ_m в W. Тогда $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — базис Кете в W.*

Доказательство. По условию каждая функция $g \in W$ раскладывается в ряд (2), сходящийся равномерно на компактах из области D. При этом, как и в доказательстве теоремы 3, из непрерывности оператора $\aleph^{-1}$ и неравенства в лемме 3 следует, что для любого $p \geq 1$ существуют номер l и постоянная $\beta > 0$, не зависящие от $g \in W$, такие, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \sup_{z \in K_p} |e_m(z)| \leqslant \beta \sup_{z \in K_l} |g(z)|.$$

Это означает, что $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — базис Кете в W. Следствие доказано.

В заключении параграфа докажем теорему, обратную к теореме 3, и даже формально несколько более общий результат.

Теорема 4. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda\}$ — последовательность комплексных чисел такая, что $\Im(\Lambda) = 0$. Предположим, что оператор $\aleph$ определен на всем пространстве $Q(\Lambda, D)$, сюръективен, и существует биортогональная к $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ последовательность функционалов $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H^*(D)$. Тогда $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальный базис с показателями λ_m в W.*

Доказательство. По условию оператор $\aleph : Q(\Lambda, D) \to W$ сюръективен. Следовательно, любая функция $g \in W$ раскладывается в ряд (2), сходящийся равномерно на компактах из области D. Это разложение единственно, так как его коэффициенты d_m однозначно определяются при помощи биортогональной системы функционалов. Таким образом, $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — базис в W. Остается показать, что $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность с показателями λ_m в W. Согласно теореме 1, для этого достаточно проверить истинность утверждения 2 из этой теоремы.

Отличие от тождественного нуля функций e_m следует из существования биортогональной системы $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$, поскольку $\mu_m(e_m) = 1$, $m \geq 1$. По условию оператор $\aleph$ определен на всем пространстве $Q(\Lambda, D)$. Поэтому для каждого $d = \{d_m\} \in Q(\Lambda, D)$ ряд (2) сходится равномерно на компактах из области D. Обратно. Пусть ряд (2.2) сходится равномерно на компактах из D к функции g. Нужно показать, что последовательность его коэффициентов $d = \{d_m\}$ принадлежит $Q(\Lambda, D)$. По определению подпространства W оно должно содержать g. По условию оператор $\aleph$ сюръективен. Следовательно, функция g раскладывается в ряд вида (2) с коэффициентами $d' = \{d'_m\} \in Q(\Lambda, D)$, равномерно сходящийся на компактах из D. В результате мы имеем два разложения для g. Однако, как и выше, из существования биортогональной к $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ системы функционалов $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H^*(D)$ вытекает, что коэффициенты ряда (2), сходящегося в топологии пространства $H(D)$, однозначно вычисляются как значения функционалов μ_m на функции g. Поэтому $d = d' \in Q(\Lambda, D)$. Таким образом, утверждение 2 из теоремы 1 выполнено. Это завершает доказательство данной теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кривошеев А.С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях* // Известия РАН. Серия математическая. Т. 68. № 2. 2004. С. 71–136.
2. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука. 1976.

Александр Сергеевич Кривошеев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `kriolesya2006@yandex.ru`