ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 1 (2010). С. 71-86.

УДК 517.54

БАЗИСЫ РИССА ИЗ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕРГМАНА НА ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКАХ

К.П. ИСАЕВ

Аннотация. В работе рассмотрена проблема существования базисов Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых ограниченных многоугольниках. Базисы построены.

Ключевые слова: ряды экспонент, базисы Рисса, пространство Бергмана.

1. Введение

Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости. Через $B_2(D)$ обозначим пространство Бергмана, состоящее из функций, аналитических в D и интегрируемых с квадратом по плоской мере Лебега $B_2(D) = \{f \in H(D) : \int\limits_D |f(z)|^2\, dm(z) < \infty\}$.

Оно является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_D f(z)\overline{g}(z)\, dm(z)$ (см. [1]).

Семейство $\{h_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$ называется базисом Рисса в гильбертовом пространстве H, если:

1) семейство $\{h_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$ полно в пространстве H;

2) существуют положительные постоянные m, M такие, что для любой конечной последовательности комплексных чисел $\{a_k\}$ справедлива двусторонняя оценка

$$m \sum_k |a_k|^2 \|h_k\|^2 \le \|\sum_k a_k h_k\|^2 \ \le M \sum_k |a_k|^2 \|h_k\|^2. \tag{1}$$

Мы здесь придерживаемся определения из работы [2].

В работе [6] показано, что если граница выпуклой области D в некоторой своей точке имеет отличную от нуля кривизну, то в пространстве Бергмана $B_2(D)$ не может существовать базиса Рисса из экспонент $\{e^{\lambda_k z},\ k = 1, 2, \ldots\}$. Таким образом, базисы Рисса из экспонент возможны лишь в тех пространствах $B_2(D)$, где D — область, кривизна границы которой в каждой точке равна нулю или не существует.

В данной работе построены базисы Рисса из экспонент в пространстве Бергмана $B_2(D)$, когда D — выпуклый многоугольник.

Основным инструментом исследований является преобразование Лапласа. Система экспонент $\{e^{\lambda z},\ \lambda \in \mathbb{C}\}$ полна в пространстве $B_2(D)$ (см. [1]). Это обстоятельство позволяет описать сопряженное пространство $B_2^*(D)$ в терминах преобразований Лапласа. Каждому функционалу $S \in B_2^*(D)$ поставим в соответствие функцию

$$\hat{S}(\lambda) = S_z(e^{\lambda z}),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

K.P. Isaev, Riesz bases of exponents in Bergman spaces on convex polygons.

Поступила 1 февраля 2010 г.

Работа поддержана грантом Президента РФ (МК-2532.2009.1).

которая и называется преобразованием Лапласа функционала S. В работе [6] показано, что отображение $L : S \longmapsto \hat{S}$ устанавливает изоморфизм пространства $B_2^*(D)$ с гильбертовым пространством целых функций $\hat{B}_2(D)$ с нормой

$$\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)} = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} \frac{|F(re^{i\varphi})|^2}{K(re^{i\varphi})}\, d\Delta(\varphi) dr, \tag{2}$$

где $h(\varphi) = \max_{z\in\overline{D}} Re\, ze^{i\varphi}$, $\Delta(\varphi) = h'(\varphi) + \int\limits_0^\varphi h(\theta)\, d\theta$, $K(\lambda) = \int\limits_D |e^{\lambda z}|^2\, dv(z) = \|e^{\lambda z}\|^2$.

2. Свойства целых функций класса $\hat{B}_2(D)$

Обозначим через w_j, $j = \overline{1,n}$, вершины многоугольника D. Будем считать, что вершины пронумерованы против часовой стрелки. Через l_j обозначим сторону, соединяющую w_j и w_{j+1}. Пусть $\theta_j \in [0, 2\pi)$, $j = \overline{1,n}$, — угол между нормалью к стороне l_j и положительной полуосью абсцисс, d_j — длина стороны l_j.

Для многоугольников $\Delta(\varphi)$ — неубывающая кусочно-постоянная функция со скачками в точках θ_j. Величина скачка равна длине соответствующей стороны d_j. Поэтому норма (2) принимает вид:

$$\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)} = \sum_{j=1}^n d_j \int\limits_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{K(re^{i\theta_j})}\, dr. \tag{3}$$

В следующей лемме приводится асимптотика функции Бергмана $K(\lambda)$.

Лемма 1. *Пусть D — ограниченная выпуклая область. Для $\varphi \in [0; 2\pi]$ и $t > 0$ через $S(t, \varphi)$ обозначим площадь пересечения области D с полосой*

$$\{z :\ h(\varphi) - t < Re\, ze^{i\varphi} < h(\varphi)\}.$$

Тогда

$$e^{-2} e^{2h(\varphi)r} S(\frac{1}{r}, \varphi) \le K(re^{i\varphi}) \le 4e^{2h(\varphi)r} S(\frac{1}{r}, \varphi).$$

Доказательство.

Пусть $z(\varphi)$ — одна из точек на границе области D такая, что $h(\varphi) = Re\, z(\varphi)e^{i\varphi}$. С помощью отображения $z \to w = (z - z(\varphi))e^{i\varphi}$ преобразуем область D в область D', расположенную в левой полуплоскости. Тогда $0 \in \partial D$. После замены переменных в интеграле функция $K(re^{i\varphi})$ представляется в виде

$$K(re^{i\varphi}) = e^{2h(\varphi)r} \int_{D'} e^{2r Re\, w}\, dm(w).$$

Таким образом, требуется доказать соотношение

$$e^{-2} S\left(\frac{1}{r}\right) \le \int_{D'} e^{2r Re\, w}\, dm(w) \le 4S\left(\frac{1}{r}\right), \tag{4}$$

где $S(t)$ — площадь части области D', лежащей в вертикальной полосе $-t < Re\, w < 0$. Область D' может быть описана в виде

$$D' = \{w = x + iy :\ f_1(x) < y < f_2(x),\ -T < x < 0\}.$$

Пусть $f(x) = f_2(x) - f_1(x)$. Тогда $f(x)$ — неотрицательная вогнутая функция на $(-T; 0)$ и

$$\int_{D'} e^{2r Re\, w}\, dm(w) = \int_{-T}^0 e^{2rx} f(x)\, dx.$$

Нижняя оценка в (4) получается немедленно:

$$\int_{D'} e^{2rRe\,w}\,dm(w) \geq \int_{D', Re\,w\geq -1/r} e^{2rRe\,w}\,dm(w) \geq e^{-2}S\left(\frac{1}{r}\right).$$

Для доказательства верхней оценки рассмотрим два случая.

1) Пусть $0 < r \leq \frac{1}{T}$. Для таких r, очевидно, $S(\frac{1}{r})$ есть площадь всей области D' и $2rx \leq 0$, поэтому

$$\int_{D'} e^{2rRe\,w}\,dm(w) \leq S\left(\frac{1}{r}\right).$$

2) Пусть $r > \frac{1}{T}$. Функция $f(x)$ — вогнутая неотрицательная, поэтому при $x \leq -\frac{1}{r}$ выполняется соотношение

$$f(-\frac{1}{r}) = f(-\frac{1}{xr}\cdot x + 0\cdot(1+\frac{1}{xr})) \geq -\frac{1}{xr}f(x) + (1+\frac{1}{xr})f(0) \geq -\frac{1}{xr}f(x),$$

откуда

$$f(x) \leq -f\left(-\frac{1}{r}\right)xr.$$

Следовательно,

$$\int_{D', Re\,w< -\frac{1}{r}} e^{2rRe\,w}\,dm(w) = \int_{-T}^{-\frac{1}{r}} e^{2rx}f(x)\,dx \leq -rf\left(-\frac{1}{r}\right)\int_{-\infty}^{-\frac{1}{r}} e^{2rx}x\,dx =$$

$$= \frac{3e^{-2}}{4}f\left(-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{r} \leq \frac{3e^{-2}}{2}S\left(\frac{1}{r}\right).$$

Отсюда

$$\int_{D'} e^{2rRe\,w}\,dm(w) \leq \left(\frac{3e^{-2}}{2}+1\right)S\left(\frac{1}{r}\right).$$

Сравнив результаты пунктов 1–2 получим требуемую оценку сверху в соотношении (4).

Лемма 1 доказана.

Таким образом, когда D многоугольник, норму (3) можно заменить на норму

$$\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)} = \sum_{j=1}^{n} d_j \int_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}S(\frac{1}{r},\theta_j)}\,dr. \tag{5}$$

Лемма 2. *Норма (5) эквивалентна норме:*

$$\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)} = \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2(r+1)}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr. \tag{6}$$

Доказательство.

Обозначим через $|D|$ площадь многоугольника D. Пусть L_{θ_j} — прямая, содержащая сторону l_j многоугольника, а $L_{\theta_j+\pi}$ — опорная прямая к области D, параллельная L_{θ_j}.

Обозначим через T_j расстояние между этими прямыми. Тогда для $r \geq \frac{1}{T_j}$ $S(\frac{1}{r},\theta_j) \geq \frac{1}{2}d_j\frac{1}{r}$, и для $r < \frac{1}{T_j}$ $S(\frac{1}{r},\theta_j) = |D|$. Поэтому для нормы (5) справедлива верхняя оценка

$$\sum_{j=1}^{n} d_j \int_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}S(\frac{1}{r},\theta_j)}\,dr \leq \sum_{j=1}^{n}\left(d_j\int_0^{T_j} \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}S(\frac{1}{r},\theta_j)}\,dr + 2\int_{T_j}^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2 r}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr\right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n}\left(d_j\int\limits_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}|D|}\,dr+2\int\limits_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2 r}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr\right).$$

Пусть $c=\max_{j=\overline{1,n}}\left(\frac{d_j}{|D|}\right)$, $c_1=\max\{2,c\}$, тогда

$$\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)}\leq c_1\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2(r+1)}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr. \tag{7}$$

Пусть $diam\,(D)=\max_{\lambda,\zeta\in\overline{D}}|\lambda-\zeta|$ — диаметр многоугольника D. Тогда для любого r $S(\frac{1}{r},\theta_j)\leq diam\,(D)\frac{1}{r}$. Отсюда

$$\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)}\geq \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}d_j\left(\int\limits_0^{T_j}\frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}S(\frac{1}{r},\theta_j)}\,dr+2\int\limits_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}S(\frac{1}{r},\theta_j)}\,dr\right)\geq$$

$$\geq \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}d_j\left(\frac{1}{|D|}\int\limits_0^{T_j}\frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr+\frac{2}{diam\,(D)}\int\limits_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2 r}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr\right)\geq$$

$$\geq \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}d_j\left(\frac{1}{|D|}\int\limits_0^{T_j}\frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr+\frac{1}{diam\,(D)}\int\limits_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2 r}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr+\frac{T_j}{diam\,(D)}\int\limits_{T_j}^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr\right).$$

Пусть $a_1=\min_{j=\overline{1,n}}\left(\frac{d_j}{|D|}\right)$, $a_2=\min_{j=\overline{1,n}}\left(\frac{d_j}{diam\,(D)}\right)$, $a_3=\min_{j=\overline{1,n}}\left(\frac{d_jT_j}{diam\,(D)}\right)$, $c_2=\frac{1}{3}\min\{a_1,a_2,a_3\}$. И мы окончательно получаем:

$$\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)}\geq c_2\sum_{j=1}^{n}\left(\int\limits_0^{T_j}\frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr+\int\limits_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2 r}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr+\int\limits_{T_j}^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr\right)=$$

$$=c_2\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^\infty \frac{|F(re^{i\theta_j})|^2(r+1)}{e^{2h(\theta_j)r}}\,dr. \tag{8}$$

Из (7) и (8) мы получаем требуемое утверждение.

Лемма 2 доказана.

Для дальнейшего изложения нам потребуется несколько лемм, сформулированных и доказанных в работе [3].

Лемма A. (Лемма 2.2 в [3])*Пусть $\gamma\in(0,\pi)$, функция $f(\lambda)$ — голоморфная и конечной степени в $A_\gamma=\{\lambda:0<arg\,\lambda<\gamma\}$, непрерывная в $\overline{A}_\gamma$ и*

$$\int\limits_0^\infty |f(r)|^2\,dr,\ \int\limits_0^\infty |f(re^{i\gamma})|^2\,dr\ <\infty.$$

Класс таких функций обозначим через H^2_γ. Тогда для всех $f\in H^2_\gamma$

$$\int\limits_0^\infty |f(re^{i\theta})|^2\,dr\leq c,\ \ 0<\theta<\gamma, \tag{9}$$

где c — некоторая постоянная.

Лемма B. (Лемма 2.5 в [3])*Пусть $f(\lambda) \in H^2_\gamma$ и l_θ есть пересечение угла A_γ с лучом $\arg(\lambda - \lambda_0) = \theta$, а $P_{\theta,H}$ — пересечение этого угла с полосой $\{\lambda : |Im\,\lambda e^{-i\theta}| < H\}$ $(0 \le \theta \le \gamma)$. Тогда*

$$\left(\int\limits_{l_\theta} |f(\lambda)|^2\, d|\lambda|\right)^{\frac{1}{2}} \le K\left(\left(\int\limits_0^\infty |f(r)|^2\, dr\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_0^\infty |f(re^{i\gamma})|^2\, dr\right)^{\frac{1}{2}}\right), \qquad (10)$$

$$\left(\int\limits_{P_{\theta,H}} |f(\lambda)|^2\, dm(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}} \le K(2H)^{\frac{1}{2}}\left(\left(\int\limits_0^\infty |f(r)|^2\, dr\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_0^\infty |f(re^{i\gamma})|^2\, dr\right)^{\frac{1}{2}}\right). \qquad (11)$$

Лемма C. (Лемма 2.6 в [3])*Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность точек, лежащих в $P_{\theta,H}$, такая, что*

$$\inf_{k \ne j} |\lambda_k - \lambda_j| = 2\delta > 0$$

и находящихся на расстоянии, большем 2δ от сторон $P_{\theta,H}$, и пусть $f(\lambda) \in H^2_\gamma$. Тогда при некоторой константе M_δ, не зависящей от выбора функции $f(\lambda)$, справедливо неравенство

$$\left(\sum_k |f(\lambda_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le M_\delta\left(\left(\int\limits_0^\infty |f(r)|^2\, dr\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_0^\infty |f(re^{i\gamma})|^2\, dr\right)^{\frac{1}{2}}\right). \qquad (12)$$

Лемма D. (Лемма 2.7 в [3])*Пусть функция $f(\lambda) \in H^2_\gamma$. Тогда внутри угла*

$$A_{\gamma,\delta} = \{\lambda : Im\,\lambda \ge \delta > 0, Im\,\lambda e^{-i\gamma} \le -\delta < 0\}$$

$f(\lambda)$ равномерно стремится к 0 при $|\lambda| \to \infty$.

Теперь мы готовы указать некоторые из свойств функции $f \in \hat{B}_2(D)$, получающихся непосредственным применением лемм A, B, C и D.

Нормали N_j к сторонам многоугольника D разбивают всю плоскость на углы Γ_j, $j = \overline{1,n}$ $(\Gamma_j = \{\lambda : \arg\lambda \in (\theta_j, \theta_{j+1})\})$, которые при $n > 2$ меньше, чем π. В каждом из этих углов справедливо равенство $H(\lambda) = Re\,\overline{w}_j\lambda$. Таким образом, в каждом из углов Γ_j $e^{-H(\lambda)} = |e^{-\overline{w}_j\lambda}|$ $(\lambda \in \Gamma_j)$. Через φ_j обозначим среднее арифметическое θ_j и θ_{j+1} :

$$\varphi_j = (\theta_j + \theta_{j+1})/2.$$

Тогда в угле Γ_j можно рассматривать аналитическую ветвь функции $\sqrt{\lambda + e^{i\varphi_j}}$, причем в этом угле $|\sqrt{\lambda + e^{i\varphi_j}}| \le \sqrt{|\lambda| + 1}$. Пусть $\lambda = re^{i\varphi}$, тогда для $\theta_j \le \varphi \le \theta_{j+1}$ выполняется оценка $|\lambda + e^{i\varphi_j}|^2 = r^2 + 1 + 2r\cos(\varphi - \varphi_j) \ge r^2 + 1 = |\lambda|^2 + 1 \ge \frac{1}{2}(|\lambda| + 1|)^2 = \frac{1}{2}(|\lambda| + 1)^2$. Следовательно, $e^{-H(\lambda)}\sqrt{|\lambda| + 1}$ сравнима с модулем голоморфной функции $|e^{-\overline{w}_j\lambda}\sqrt{\lambda + e^{i\varphi_j}}|$ в угле Γ_j.

Если $F \in \hat{B}_2(D)$, то функция $F(\lambda)e^{-\overline{w}_j\lambda}\sqrt{\lambda + e^{i\varphi_j}}$ голоморфна в угле Γ_j и по лемме 2 интегрируема с квадратом на границах Γ_j, следовательно, по лемме A и на каждом луче, исходящем из начала координат и содержащемся в Γ_j. Непосредственное применение лемм B, C и D к этой функции дает нам следующие свойства функций класса $\hat{B}_2(D)$.

Лемма 3. *1) Пусть функция $F(\lambda) \in \hat{B}_2(D)$ и $Q_{H,A,\theta} = \{\lambda : Re\,\lambda e^{-i\theta} > A;\ \|Im\,\lambda e^{-i\theta}| < H\}$ — произвольная полуполоса. Тогда*

$$\int\limits_{Q_{H,A,\theta}} |F(\lambda)|^2 e^{-2H(\lambda)}(|\lambda| + 1)\, dm(\lambda) \le C_{H,A,\theta}\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)}. \qquad (13)$$

2) Если последовательность точек $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ лежит в полосе $Q_{H,A,\theta}$ и $\inf_{k\neq j}|\lambda_k-\lambda_j|>0$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}|F(\lambda_k)|^2e^{-2H(\lambda_k)}(|\lambda_k|+1)\leq const\,\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)}.$$

3) Если функция $F(\lambda)\in\hat{B}_2(D)$, то $|F(\lambda)|e^{-H(\lambda)}\sqrt{|\lambda|+1}$ равномерно стремится к нулю при $|\lambda|\to\infty$.

Для доказательства основной теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4. *Если функция $F(\lambda)\in\hat{B}_2(D)$, то функция $F_\zeta(\lambda)=F(\lambda+\zeta)$ при любом комплексном ζ принадлежит классу $\hat{B}_2(D)$. При этом*

$$\|F_\zeta(\lambda)\|^2_{\hat{B}_2(D)}\leq C_{D,\zeta}\|F(\lambda)\|^2_{\hat{B}_2(D)}. \tag{14}$$

Доказательство.

В каждом из углов Γ_j, $j=\overline{1,n}$, функция $F_j(\lambda)=F(\lambda)e^{-\overline{w}_j\lambda}\sqrt{\lambda+e^{i\varphi_j}}$ удовлетворяет условиям леммы B. В силу неравенства (10) мы имеем

$$\int\limits_{l_\zeta\bigcap\Gamma_j}|F_j(\lambda)|^2\,d|\lambda|\leq K_\zeta\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)},$$

где l_ζ — луч $\lambda=\zeta+re^{i\theta_j}$, $r>0$, K_ζ — некоторая константа.

Отсюда

$$\int\limits_{l_\zeta\bigcap\Gamma_j}|F(\lambda)|^2e^{-2\overline{w}_j\lambda}(|\lambda|+1)\,d|\lambda|\leq\sqrt{2}K_\zeta\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^\infty|F(re^{i\theta_j}+\zeta)|^2e^{-2Re\,\overline{w}_j(re^{i\theta_j}+\zeta)}(|re^{i\theta_j}+\zeta|+1)\,dr\leq\sqrt{2}K_\zeta\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)}. \tag{15}$$

Для $r\leq|\zeta|$ мы имеем

$$|re^{i\theta_j}+\zeta|+1\geq|\zeta|-r+1\geq1\geq\frac{r+1}{|\zeta|+1}. \tag{16}$$

Для $r>|\zeta|$ мы имеем

$$|re^{i\theta_j}+\zeta|+1\geq r-|\zeta|+1=(|\zeta|+1)\frac{r+1}{|\zeta|+1}-|\zeta|=\frac{r+1}{|\zeta|+1}+|\zeta|\frac{r+1}{|\zeta|+1}-|\zeta|\geq\frac{r+1}{|\zeta|+1}. \tag{17}$$

Из (15), (16) и (17) получим, что

$$\int\limits_0^\infty|F(re^{i\theta_j}+\zeta)|^2e^{-2rh(\theta_j)}(r+1)\,dr\leq\sqrt{2}K_\zeta(|\zeta|+1)e^{2Re\,\overline{w}_j\zeta}\|F\|^2_{\hat{B}_2(D)}.$$

Лемма 4 доказана.

3. Теорема об интерполяции и базисы Рисса

Для любого $K>0$ через

$$P_j(K)=\{\lambda:Re\,\lambda e^{-i\theta_j}>0;\ |Im\ \lambda e^{-i\theta_j}|<K\}$$

обозначим полуполосу в направлении θ_j. $D_K = \bigcup\limits_1^n P_j(K)$ — назовем D_K-звездой. Обозначим через $\tilde{S}_D$ класс всех целых функций $S(\lambda)$ экспоненциального типа, удовлетворяющих следующим условиям:

1) все нули функции S простые, и существует $K > 0$ (зависящая от функции S) такая, что все нули $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ функции $S(\lambda)$ попадают в D_K-звезду;

2) $\inf_{j\neq k} |\lambda_j - \lambda_k| = 2\delta > 0$;

3) при некоторых положительных константах $c\,, C$ (зависящих от функции S) выполняется неравенство

$$c < |S(\lambda)|e^{-H(\lambda)}\sqrt{|\lambda|+1} < C,\ \lambda\overline{\in}\bigcup_{j=1}^{\infty} B_\sigma(\lambda_k), \tag{18}$$

где $B_\delta(\lambda_k) = \{\lambda :\ |\lambda - \lambda_k| < \delta\}$.

Существование функций, попадающих в класс $\tilde{S}_D$, мы покажем в следующем параграфе. Свойства функций класса $\tilde{S}_D$, которые потребуются нам в дальнейшем, мы соберем в одной теореме.

Теорема 1. *Пусть $S(\lambda)$ — функция класса $\tilde{S}_D$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность ее нулей. Тогда:*

1) при любом комплексном ζ функция $S_\zeta(\lambda) = S(\lambda+\zeta)$ принадлежит классу $\tilde{S}_D$,

2) число нулей функции $S(\lambda)$, в круговом кольце $\{\lambda\,:\ r \le |\lambda| \le r+1\}$ ограничено некоторой постоянной, не зависящей от r,

3) справедливо неравенство $\inf_k(|S'(\lambda_k)|e^{-H(\lambda_k)}\sqrt{|\lambda_k|+1}) > 0$.

Доказательство.

1) Последовательность нулей функции $S_\zeta(\lambda)$ попадает в $D_{K+|\zeta|}$-звезду.

Из определения функции $H(\lambda)$ следует, что для любых точек $\lambda,\ \zeta\ \in\ \mathbb{C}$ справедливо неравенство

$$H(\lambda+\zeta) \le H(\lambda) + H(\zeta). \tag{19}$$

Поэтому из (18) и (19) получим оценку

$$|S(\lambda+\zeta)|e^{-H(\lambda)}\sqrt{|\lambda|+1} < C\,\frac{e^{H(\lambda+\zeta)-H(\lambda)}\sqrt{|\lambda|+1}}{\sqrt{|\lambda+\zeta|+1}} \le C\,e^{H(\zeta)}\frac{\sqrt{|\lambda|+1}}{\sqrt{|\lambda+\zeta|+1}} =$$

$$= C\,e^{H(\zeta)}\sqrt{1+\frac{|\lambda|-|\lambda+\zeta|}{|\lambda+\zeta|+1}} \le C\,e^{H(\zeta)}\sqrt{1+\frac{|\zeta|}{|\lambda+\zeta|+1}} \le C\,e^{H(\zeta)}\sqrt{1+|\zeta|} < \infty,$$

здесь C — константа из (18).

Воспользовавшись далее неравенством $-H(-\zeta) \le H(\lambda+\zeta) - H(\lambda) \le H(\zeta)$, следующим непосредственно из (19), мы получим из (18)

$$|S(\lambda+\zeta)|e^{-H(\lambda)}\sqrt{|\lambda|+1} > c\,\frac{e^{H(\lambda+\zeta)}e^{-H(\lambda)}\sqrt{|\lambda|+1}}{\sqrt{|\lambda+\zeta|+1}} \ge c\,e^{-H(-\zeta)}\sqrt{\frac{|\lambda|+1}{|\lambda|+|\zeta|+1}} \ge$$

$$\ge c\,e^{-H(-\zeta)}\sqrt{1-\frac{|\zeta|}{|\lambda|+|\zeta|+1}} \ge c\,e^{-H(-\zeta)}\sqrt{1-\frac{|\zeta|}{|\zeta|+1}} = c\,e^{-H(-\zeta)}(1+|\zeta|)^{\frac{1}{2}} > 0,$$

здесь c — константа из (18). Первый пункт теоремы доказан.

2) Для доказательства второго пункта достаточно проверить, что при $j = \overline{1,n}$, $r > 0$ в прямоугольнике $F_{r,j} = \{\lambda\,:\ |Re\,\lambda e^{-i\theta_j} - r| \le 1,\ |Im\,\lambda e^{-i\theta_j}| \le K+\delta\}$ содержится не более чем N нулей (N не зависит от r). Круги $B(\lambda_k,\delta)$ попарно не пересекаются. Если в

прямоугольнике $F_{r,j}$ N нулей, то суммарная площадь кругов, попадающих в этот прямоугольник, $\pi N\frac{\sigma^2}{4}$. Эта площадь меньше площади прямоугольника $4(K+\delta)$. Таким образом, $N \leq \frac{16(K+\delta)}{\pi\sigma^2}$, и пункт (2) доказан.

3) По формуле Коши

$$\frac{1}{S'(\lambda_k)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_k|=\delta} \frac{\lambda-\lambda_k}{S(\lambda)(\lambda-\lambda_k)}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_k|=\delta} \frac{1}{S(\lambda)}\,d\lambda.$$

Из (18) следует, что

$$\left|\frac{1}{S'(\lambda_k)}\right| \leq \frac{\delta\sqrt{\delta+1}}{c}e^{\delta\max_{\zeta\in\overline{D}}|\zeta|}e^{-H(\lambda_k)}\sqrt{|\lambda_k|+1}.$$

Теорема доказана.

Сформулируем теперь основную теорему этого параграфа.

Теорема 2. *Пусть функция $S(\lambda)\in\tilde{S}_D$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность ее нулей, пронумерованных в порядке возрастания их модулей. Определим оператор T, действующий из пространства $\hat{B}_2(D)$ в пространство последовательностей равенством*

$$T(F) = \{F(\lambda_k)e^{-H(\lambda_k)}\sqrt{|\lambda_k|+1}\}_{k=1}^{\infty}. \tag{20}$$

Утверждается, что этот оператор является изоморфизмом между пространствами $\hat{B}_2(D)$ и l^2. Обратный оператор определяется формулой

$$T^{-1}(\{c_k\})(\lambda) = S(\lambda)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k e^{H(\lambda_k)}}{S'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)\sqrt{|\lambda_k|+1}}. \tag{21}$$

Причем ряд, стоящий в правой части равенства (21), сходится по норме пространства $\hat{B}_2(D)$.

Доказательство.

Непрерывность оператора T следует из пункта 2 леммы 3.

Докажем, что оператор T инъективен, то есть ядро отображения T состоит лишь из нуля. Пусть $F(\lambda)\in Ker\,T$, то есть $F(\lambda_k)=0$, $k=\overline{1,\infty}$. Тогда функция $g(\lambda)=\frac{F(\lambda)}{S(\lambda)}$ есть целая функция экспоненциального типа, которая, как следует из пункта 3 леммы 3, равномерно стремится к 0 при $|\lambda|\to\infty$ вне множества $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{\lambda:\ |\lambda-\lambda_k|<\delta\}$. Следовательно, $g(\lambda)\equiv 0\equiv F(\lambda)$.

Поэтому достаточно проверить, что ряд, стоящий в правой части (21), определяет на всем l^2 ограниченный оператор $T^{-1}: l^2\longmapsto\hat{B}_2(D)$, обратный к T.

Разобьем последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ на n последовательностей $\Lambda_j = \{\lambda_{k,j}\}_{k=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,n}$, состоящих соответственно из нулей функции $S(\lambda)$, расположенных в полуполосах $P_j(K)=\{\lambda : Re\,\lambda e^{-i\theta_j}>0;\ |Im\,\lambda e^{-i\theta_j}|<K\}$ (если корень λ_k принадлежит одновременно нескольким полуполосам $P_j(K)$, то отнесем его к полуполосе с меньшим номером). Элементы каждой из последовательностей Λ_j пронумерованы в порядке возрастания их модулей. Перенумеруем соответственно последовательность $\{c_k\}$ и перепишем (21) в виде

$$T^{-1}(\{c_k\})(\lambda) = S(\lambda)\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k,j}e^{H(\lambda_{k,j})}}{S'(\lambda_{k,j})(\lambda-\lambda_{k,j})\sqrt{|\lambda_{k,j}|+1}}.$$

Очевидно, достаточно доказать, что каждый из n внутренних рядов сходится по норме пространства $\hat{B}_2(D)$ и определяет непрерывный оператор

$$T_j^{-1}(\{c_{k,j}\})(\lambda) = S(\lambda)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k,j}e^{H(\lambda_{k,j})}}{S'(\lambda_{k,j})(\lambda-\lambda_{k,j})\sqrt{|\lambda_{k,j}|+1}}.$$

Из утверждения 2 теоремы 1 следует, что при некоторой положительной константе c справедливо неравенство

$$|\lambda_{k,j}| > ck \tag{22}$$

при достаточно больших k. Из утверждения 3 теоремы 1 следует, что

$$m = \inf_k\{|S'(\lambda_k)|e^{-H(\lambda_k)}\sqrt{|\lambda_k|+1}\} > 0.$$

Воспользуемся неравенством Гельдера:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k,j}e^{H(\lambda_{k,j})}}{S'(\lambda_{k,j})(\lambda-\lambda_{k,j})\sqrt{|\lambda_{k,j}|+1}}\right| \le sqrt\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda-\lambda_{k,j}|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|c_{k,j}|^2}{m^2}} = const\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda-\lambda_{k,j}|^2}}. \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует, что ряд, стоящий в правой части (21), сходится равномерно на каждом компакте в $\mathbb{C}$ к некоторой целой функции $F_j(\lambda)$ такой, что

$$F_j(\lambda_{k,i}) = 0, \text{ если } i \ne j. \quad F_j(\lambda_{k,i}) = c_{k,j}, \text{ если } i = j. \tag{24}$$

Надо показать, что функция $F_j(\lambda) \in \hat{B}^2(D)$ и $\|F_j(\lambda)\|_{\hat{B}^2(D)} \le const\,\|\{c_{k,j}\}\|_{l^2}$. В силу леммы 4 достаточно проверить, что при некотором $\zeta \in \mathbb{C}$ функция $F_j(\lambda-\zeta) \in \hat{B}^2(D)$ и

$$\|F_j(\lambda-\zeta)\|_{\hat{B}^2(D)} \le const\|\{c_{k,j}\}\|_{l^2}. \tag{25}$$

Доказательство проведем для $j = 1$, считая, что $\theta_1 = 0$ и $h_D(0) = 0$.

Выберем ζ так, чтобы полуполоса $\zeta + P_1(K)$ целиком лежала в области $\{\lambda : \arg\lambda \in (0,\theta_2);\ Im\ \lambda > \eta > 0\}$. Принимая во внимание пункт 1 теоремы 1 и (18), мы можем утверждать, что каждое слагаемое и, следовательно, частичные суммы ряда

$$F_1(\lambda-\zeta) = S(\lambda-\zeta)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k,1}e^{H(\lambda_{k,1})}}{S'(\lambda_{k,1})(\lambda-\zeta-\lambda_{k,1})\sqrt{|\lambda_{k,1}|+1}}, \tag{26}$$

представляющего функцию $F_1(\lambda-\zeta)$, принадлежат пространству $\hat{B}^2(D)$. Для того, чтобы доказать сходимость ряда в этом пространстве и оценить его сумму, докажем справедливость оценки

$$\sup_{j=\overline{1,n}}\int_0^{\infty}|S(re^{i\theta_j})-\zeta|^2e^{-2H(re^{i\theta_j})}(r+1)\left|\sum_{k=l}^{m}\frac{c_{k,1}e^{H(\lambda_{k,1})}}{S'(\lambda_{k,1})(re^{i\theta_j}-\zeta-\lambda_{k,1})\sqrt{|\lambda_{k,1}|+1}}\right|^2 dr \le$$

$$\le const\sum_{l}^{m}|c_{k,1}|^2 \tag{27}$$

для любых натуральных чисел $l < m$. Произведение $|S(re^{i\theta_j})-\zeta|e^{-H(re^{i\theta_j})}\sqrt{r+1}$ ограничено сверху некоторой константой. Поэтому достаточно доказать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{k=l}^{m}\frac{c_{k,1}e^{H(\lambda_{k,1})}}{S'(\lambda_{k,1})(re^{i\theta_j}-\zeta-\lambda_{k,1})\sqrt{|\lambda_{k,1}|+1}}\right|^2 dr \le const\sum_{l}^{m}|c_{k,1}|^2. \tag{28}$$

Докажем это неравенство, полагая для определенности, что $j = 1$. Поскольку из-за выбора ζ все полюсы функции

$$G_{l,m}(\lambda) = \sum_{k=l}^{m} \frac{c_{k,1}e^{H(\lambda_{k,1})}}{S'(\lambda_{k,1})(\lambda-\zeta-\lambda_{k,1})\sqrt{|\lambda_{k,1}|+1}}$$

расположены в верхней полуплоскости, то $G_{l,m}(\lambda) \in H^2_-$, где H^2_- — пространство Харди в нижней полуплоскости, а величина, стоящая в левой части неравенства (28), является квадратом H^2_--нормы функции $G_{l,m}$. Для вычисления этой нормы воспользуемся тем, что пространство, сопряженное к H^2_-, — это пространство H^2_+ (пространство Харди в верхней полуплоскости). Пространство H^2_+ с нормой сопряженного пространства обозначим через $\hat{H}^2_+$. Тогда

$$\|G_{l,m}\|_{\hat{H}^2_-} = \sup_{\psi\in H^2_+,\, \|\psi\|_{H^2_+}=1} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G_{l,m}(r)\psi(r)\,dr \right|.$$

Вычисляя последний интеграл с помощью вычетов, мы получим

$$\|G_{l,m}\|_{\hat{H}^2_-} = \sup_{\psi\in H^2_+,\, \|\psi\|_{H^2_+}=1} \left| \sum_{k=l}^{m} \frac{c_{k,1}e^{H(\lambda_{k,1})}\psi(\lambda_{k,1}+\zeta)}{S'(\lambda_{k,1})\sqrt{|\lambda_{k,1}|+1}} \right| \le$$

$$\le \sup_{k=\overline{l,m}} \left| \frac{e^{H(\lambda_{k,1})}}{S'(\lambda_{k,1})\sqrt{|\lambda_{k,1}|+1}} \right| \left(\sum_{k=l}^{m} |c_{k,1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=l}^{m} |\psi(\lambda_{k,1}+\zeta)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

Функции класса H^2_+ удовлетворяют условиям леммы С при $\gamma = \pi$. Применив эту лемму и теорему 1 (п. 3), мы из (29) получаем

$$\|G_{l,m}\|_{H^2_-} \le const \sum_{k=l}^{m} |c_{k,1}|^2.$$

Соотношение (27) доказано. Аналогично рассматривается случай, когда $j \ne 1$. Так как $\{c_{k,1}\} \in l_2$, то последовательность $\{|c_{k,1}|^2\}$ фундаментальна. Значит, из последнего неравенства следует, что частичные суммы в правой части (26) образуют фундаментальную последовательность в $\hat{B}^2(D)$. По теореме Коши ряд в правой части (26) сходится в пространстве $\hat{B}^2(D)$ и $F_1 \in \hat{B}^2(D)$. Оценка (25) доказана. Из непрерывности оператора T_j^{-1}, которую мы доказали, следует непрерывность оператора $T^{-1} = \sum T_j^{-1}$. Из (24) следует, что $T\,T^{-1} = I$ в пространстве l^2, и так как $Ker\ T = 0$, то $T^{-1}\,T = I$ в пространстве $\hat{B}_2(D)$.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть функция $S(\lambda) \in \tilde{S}_D$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ее нули. Тогда система функций*

$$\left\{ \frac{S(\lambda)\sqrt{K(\lambda_k)}}{S'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)} \right\} \tag{30}$$

образует базис Рисса в $\hat{B}_2(D)$.

Теорема 3. *Пусть D — выпуклый многоугольник, $S(\lambda)$ — функция класса $\tilde{S}_D$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ее нули. Тогда система*

$$\left\{ \frac{e^{\lambda_k z}}{\sqrt{K(\lambda_k)}} \right\}_{k=1}^{\infty}, \tag{31}$$

построенная по этим нулям, является базисом Рисса в пространстве Бергмана $B_2(D^*)$ (через D^* обозначается многоугольник, симметричный D относительно вещественной оси).

Доказательство.

Как говорилось ранее, пространство $B_2^*(D)$ изоморфно пространству $\hat{B}_2(D)$. Поэтому по теореме 2 достаточно показать, что системы (30) и (31) биортогональны (см. [3]).

Пусть $\varphi_j \in B_2^*$, и $\varphi_j(e^{\lambda z}) = \frac{S(\lambda)\sqrt{K(\lambda_j)}}{S'(\lambda_j)(\lambda-\lambda_j)}$, $j = \overline{1,\infty}$.

Пусть

$$T_{j,k} = \varphi_j\left(\frac{e^{\lambda_k z}}{\sqrt{K(\lambda_k)}}\right) = \frac{S(\lambda_k)\sqrt{K(\lambda_j)}}{S'(\lambda_j)(\lambda_k-\lambda_j)\sqrt{K(\lambda_k)}},$$

тогда $T_{j,k} = 0$, если $k \neq j$. $T_{j,k} = 1$, если $k = j$. Следовательно, системы (30) и (31) биортогональны.

Теорема доказана.

4. Конструирование целой функции класса $\tilde{S}_D$

В этом параграфе мы покажем, что несмотря на жесткие ограничения на рост функций класса $\tilde{S}_D$, этот класс не является пустым.

Рассмотрим на положительной вещественной полуоси меру $d\mu(t)$, где $\mu(t)$ — некоторая возрастающая непрерывная функция такая, что

1) $\mu(t) \to +\infty$, $t \to +\infty$, $\mu(0) = 0$;

2) существуют положительные константы c и C такие, что $ch \leq \mu(t+h) - \mu(t) \leq Ch$, для любых $t, h \geq 0$.

Выберем последовательность точек $\{T_j\}_{j=0}^{\infty}$ таких, что

$$\mu(T_k) = k,\ k = \overline{0,\infty}\,. \tag{32}$$

По теореме о среднем значении существуют точки $t_k \in [T_{k-1}; T_k]$ такие, что

$$\int\limits_{T_{k-1}}^{T_k} t\, d\mu(t) = t_k,\ k = \overline{1,\infty}\,. \tag{33}$$

Элементарным примером такой функции может служить $\mu(t) = t$.

Докажем некоторые свойства функции $\mu(t)$.

Лемма 5. *Пусть* $n(t) = \sum\limits_{t_k \leq t} 1$. *Тогда*

1) $|\mu(t) - n(t)| \leq 2$ *для любого* t*;*

2) $\int\limits_{T_{k-1}}^{T_k} (\mu(t) - n(t))\, dt = 0$ *для любого* $k = \overline{1,\infty}$.

Доказательство.

1) Пусть $t \in [T_{k-1}, T_k]$. Тогда $|\mu(t) - n(t)| = |\mu(t) - \mu(T_k) + \mu(T_k) - n(t)| \leq \leq |\mu(t) - k| + |k - n(t)| \leq 2$.

2) По определению t_k мы имеем

$$\int\limits_{T_{k-1}}^{T_k} (t - t_k)\, d\mu(t) = 0.$$

Интегрируя по частям, получим

$$k(T_k - t_k) - (k-1)(T_{k-1} - t_k) - \int\limits_{T_{k-1}}^{T_k} \mu(t)\,dt = 0.$$

Отсюда

$$\int\limits_{T_{k-1}}^{T_k} (\mu(t) - (k-1))\,dt = T_k - t_k.$$

Или

$$\int\limits_{T_{k-1}}^{t_k} (\mu(t) - (k-1))\,dt + \int\limits_{t_k}^{T_k} (\mu(t) - k)\,dt + \int\limits_{t_k}^{T_k} dt = T_k - t_k.$$

То есть

$$\int\limits_{T_{k-1}}^{t_k} (\mu(t) - (k-1))\,dt + \int\limits_{t_k}^{T_k} (\mu(t) - k)\,dt = 0. \tag{34}$$

По определению $n(t) = k$, если $t_k \le t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Поэтому (34) перепишется в виде

$$\int\limits_{T_{k-1}}^{t_k} (\mu(t) - n(t))\,dt + \int\limits_{t_k}^{T_k} (\mu(t) - n(t))\,dt = 0,$$

откуда и следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 6. *Для любых* $k = \overline{1, \infty}$ *выполняются оценки*

$$\frac{1}{C} \le T_k - T_{k-1} \le \frac{1}{c}, \tag{35}$$

$$t_{k+1} - t_k \ge \frac{1}{C}\left(1 + \sqrt{\frac{C}{c}}\right)^{-1}, \tag{36}$$

где c *и* C *— константы из определения функции* μ.

Доказательство.

1) Из определения функции $\mu(t)$ следует, что $c(T_k - T_{k-1}) \le \mu(T_k) - \mu(T_{k-1}) = 1 \le$ $\le C(T_k - T_{k-1})$, откуда и следует (35).

2) Интегрируя по частям левую часть (33), мы получим

$$\int\limits_{t_k}^{T_k} (\mu(T_k) - \mu(t))\,dt = \int\limits_{T_{k-1}}^{t_k} (\mu(t) - \mu(T_{k-1}))\,dt. \tag{37}$$

По определению функции $\mu(t)$ $\mu(T_k) - \mu(t) \ge c(T_k - t)$ и $\mu(t) - \mu(T_{k-1}) \le C(t - T_{k-1})$. Из двух последних неравенств и из (37) мы получаем $\int\limits_{t_k}^{T_k} (T_k - t)\,dt \le C \int\limits_{T_{k-1}}^{t_k} (t - T_{k-1})\,dt$. Следовательно, $c(T_k - t_k)^2 \le C(t_k - T_{k-1})^2$. Из последнего неравенства и из (35) получаем $t_k - T_{k-1} \ge \frac{1}{C}\left(1 + \sqrt{\frac{C}{c}}\right)^{-1}$. Учитывая, что $t_k - t_{k-1} \ge t_k - T_{k-1}$, получим (36).

Лемма доказана.

Пусть $u(z)$ — некоторая субгармоническая функция с ассоциированной мерой $d\mu(t)$, $z \in \mathbb{C}$. Обозначим $B_n = B(0, T_n)$ — круг с центром в начале координат и радиусом T_n. Тогда в круге B_n имеет место представление Рисса:

$$u(z) = \int_0^{T_k} \ln|z-t|\,d\mu(t) + H_n(z), \tag{38}$$

где $H_n(z)$ — некоторая функция, гармоническая в B_n (см. [8]). Пусть $H_n(z) = Re\, g_n(z)$, где $g_n(z)$ — функция, голоморфная в B_n. Положим

$$f_n(z) = e^{g_n(z)} \prod_{t_k \in B_n} (z - t_k).$$

Теорема 4. *Последовательность функций $f_n(z)$ сходится равномерно на компактах из $\mathbb{C}$ к целой функции $f(z)$ и для любого $\delta > 0$ вне кругов $B(t_k, \delta)$, $k = 0, 1, ...$, выполняется оценка*

$$|\ln|f(z)| - u(z)| \le A,$$

где A — некоторая положительная константа, зависящая только от C, c и δ.

Доказательство.

Докажем сначала, что для любых $\delta > 0$, $s, n = \overline{0, \infty}$, $s > n$, вне множества

$$E_n^s(\delta) = \{z \in \mathbb{C}:\ T_n - \delta < Re\, z < T_s + \delta,\ |Im\, z| < \delta\}$$

выполняется соотношение

$$\left|\int_{T_n}^{T_s} \ln|z-t|\,d(\mu(t) - n(t))\right| \le \frac{2}{\delta c}\left(arctg\,\frac{T_s - x}{\delta} - arctg\,\frac{T_n - x}{\delta}\right), \tag{39}$$

где $z = x + iy$.

Для сокращения записи функцию $\ln|z-t|$ будем обозначать через $L(z,t)$. Дважды интегрируя по частям, учитывая определение точек T_k и пункт 2 леммы 5, получим

$$\int_{T_n}^{T_s} \ln|z-t|\,d(\mu(t) - n(t)) = -\int_{T_n}^{T_s} L'_t(z,t)(\mu(t) - n(t))\,dt =$$

$$= \int_{T_n}^{T_s} L''_{tt}(z,t)\left(\int_{T_n}^{t} (\mu(\tau) - n(\tau)\,d\tau\right) dt.$$

Пусть $z = x + iy$, тогда

$$L''_{tt} = \frac{y^2 - (x-t)^2}{(y^2 + (x-t)^2)^2},$$

следовательно,

$$|L''_{tt}| \le \frac{1}{y^2 + (x-t)^2}.$$

Кроме того, в силу пункта 1 леммы 5 и соотношения (35) для точек $t \in [T_{k-1}; T_k]$ имеем $(n < k \le s)$

$$\left|\int_{T_n}^{t} (\mu(\tau) - n(\tau))\,d\tau\right| = \left|\int_{T_{k-1}}^{t} (\mu(\tau) - n(\tau))\,d\tau\right| \le 2(T_k - T_{k-1}) \le \frac{2}{c}.$$

На основе последних двух оценок для $z \notin E_n^s(\delta)$ получим

$$\left|\int_{T_n}^{T_s} \ln|z-t|\,d(\mu(t) - n(t))\right| \le \frac{2}{c}\int_{T_n}^{T_s} \frac{dt}{(t-x)^2 + \delta^2}.$$

Вычислив последний интеграл, получим (39).

Возьмем произвольный компакт K на плоскости и индекс m такой, что $K \subset B(0, T_{m-1})$. Для точек $z \in K$ и индексов $s > n > m$ имеем

$$|\ln|f_s(z)| - \ln|f_n(z)|| = |(\ln|f_s(z)| - u(z)) + (u(z) - \ln|f_n(z)|)| =$$

$$= \left| \int_0^{T_s} \ln|z-t|\, d(n(t)-\mu(t)) + \int_0^{T_n} \ln|z-t|\, d(\mu(t)-n(t)) \right| = \left| \int_{T_n}^{T_s} \ln|z-t|\, d(\mu(t)-n(t)) \right|.$$

По выбору индекса m точка $z \in K \subset B(0, T_{m-1})$, значит в силу соотношения (35) $Re\, z \leq T_{m-1} \leq T_m - \frac{1}{C} < T_n - \frac{1}{C}$. Можем применить (39) для постоянной $\delta = \frac{1}{C}$:

$$|\ln|f_s(z)| - \ln|f_n(z)|| \leq \frac{2C}{c}\left(arctg\, C(T_s - x) - arctg\, C(T_n - x)\right).$$

Выражение в правой части при $n, s \to \infty$ стремится к нулю равномерно по $z \in K$. Таким образом, последовательность функций $\ln|f_s(z)|$ равномерно фундаментальна на компактах. Учитывая определение этих функций по теореме Коши, получим, что последовательность аналитических функций $f_s(z)$ имеет равномерный на компактах предел, который обозначим через $f(z)$.

Докажем требуемые оценки для функции $\ln|f(z)|$. Вначале рассмотрим точки $z \in \mathbb{C}$, лежащие вне полосы $|Im\, z| < \delta$. Если индекс s такой, что $|z| < T_s$, то по определению функции f_s

$$|u(z) - \ln|f_s(z)|| = \left| \int_0^{T_s} \ln|z-t|\, d(\mu(t)-n(t)) \right|.$$

Поскольку $|Im\, z| > \delta$, то по (39) для $z \notin E_0^s(\delta)$

$$|u(z) - \ln|f_s(z)|| \leq \frac{2}{\delta c}\left(arctg\, \frac{T_s - x}{\delta} + arctg\, \frac{x}{\delta}\right) \leq \frac{2\pi}{\delta c}. \tag{40}$$

Пусть теперь $|Im\, z| \leq \delta$ и для всех $k = 0, 1, ...$ $|z - t_k| \geq \delta$. Через m обозначим такой индекс, что

$$|t_m - z| = \min_k |t_k - z|.$$

Тогда в силу оценок (36) имеем

$$\begin{aligned} &0 < x - t_{m-1} < \frac{t_m - t_{m-1}}{2} \leq \frac{1}{c}, \\ &0 < t_{m+1} - x < \frac{t_{m+1} - t_m}{2} \leq \frac{1}{c}. \end{aligned} \tag{41}$$

Кроме того, для $k = m-3, ..., m+2$ в силу (36) верны оценки

$$\delta < |z - t_k| < |x - t_k| + |y| < |t_{m+2} - t_{m-3}| + \delta \leq \frac{5}{c} + \delta.$$

Следовательно, для $k = m-3, ..., m+2$

$$|\ln|z - t_k|| \leq \max(|\ln\delta|, |\ln(\frac{5}{c} + \delta)|) := M_1(\delta, c). \tag{42}$$

Далее интегрированием по частям получим

$$\left| \int_{T_{m-3}}^{T_{m+2}} \ln|z-t|\, d\mu(t) \right| = \left| \int_{T_{m-3}}^{T_{m+2}} \ln|z-t|\, d(\mu(t) - \mu(x)) \right| \leq$$

$$\leq (\mu(T_{m+2}) - \mu(x))|\ln|z - T_{m+2}|| + (\mu(x) - \mu(T_{m-3}))|\ln|z - T_{m-3}|| + \left| \int_{T_{m-3}}^{T_{m+2}} \frac{|\mu(t) - \mu(x)|}{|z-t|}\, d\mu(t) \right|.$$

По условиям на функцию $\mu(t)$ для $t \in [T_{m-3}; T_{m+2}]$ выполняются оценки

$$|\mu(x) - \mu(t)| \leq |x - t|,\ |\mu(x) - \mu(t)| \leq |\mu(T_{m+2}) - \mu(T_{m-3})| = 5.$$

Поэтому

$$\left| \int_{T_{m-3}}^{T_{m+2}} \ln|z-t|\, d\mu(t) \right| \leq$$

$$\leq 5|\ln|z-T_{m+2}||+5|\ln|z-T_{m-3}||+(T_{m-3}-T_{m+2}).$$

По выбору индекса m и в силу (35) теперь имеем

$$\left|\int_{T_{m-3}}^{T_{m+2}}\ln|z-t|\,d\mu(t)\right|\leq 5|\ln(\delta^2+\frac{2}{5}c^2)|+\frac{5}{c}. \tag{43}$$

Возьмем произвольную точку z, лежащую в полосе $|Im\,z|<\delta$, но вне кругов $B(t_k,\delta)$, $k=0,1,...$ Если индекс s таков, что $|z|<T_{s-3}$, а точка t_m — ближайшая к z, то

$$|u(z)-\ln|f_s(z)||=\left|\int_0^{T_s}\ln|z-t|d(\mu(t)-n(t))\right|=\left|\int_0^{T_{m-3}}\ln|z-t|d(\mu(t)-n(t))\right|+$$

$$+\left|\int_{T_{m-3}}^{T_{m+2}}\ln|z-t|d\mu(t)\right|+\left|\int_{T_{m-3}}^{T_{m+2}}\ln|z-t|dn(t)\right|+\left|\int_{T_{m+2}}^{T_s}\ln|z-t|d(\mu(t)-n(t))\right|.$$

По выбору индекса m и по соотношениям (35) имеем

$$x>t_{m-1}>T_{m-2}>T_{m-3}+\frac{1}{C},$$

$$x<t_{m+1}<T_{m+1}<T_{m+2}-\frac{1}{C}.$$

Для первого и последнего интеграла применим (39) с $\delta=\frac{1}{C}$:

$$\left|\int_0^{T_{m-3}}\ln|z-t|d(\mu(t)-n(t))\right|\leq\frac{2C\pi}{c},$$

$$\left|\int_{T_{m+2}}^{T_s}\ln|z-t|d(\mu(t)-n(t))\right|\leq\frac{2C\pi}{c}.$$

Второй и третий интеграл оцениваются по соотношениям (42) и (43).

Теорема 4 доказана.

Теорема 4 позволяет построить целую функцию требуемого роста. Пусть D — выпуклый многоугольник и d_j — длина стороны, перпендикулярной направлению $\{re^{i\varphi_j},\,r>0\}$, $j=1,2,...,n$. Тогда мера, ассоциированная с опорной функцией $u(re^{i\varphi})=h(\varphi)r$ многоугольника D, равна сумме мер $d_j\mu_j$, где μ_j — линейная мера Лебега на луче $\{re^{i\varphi_j},\,r>0\}$. Пусть число d определено из условия $dd_1=\frac{1}{2}$.

Представим меру μ_1 в виде суммы ее сужений на отрезок $[0,d]$ и на луч $(d,\infty):\ \mu_1={\mu_1}''+{\mu_1}'$. Тогда, очевидно, $\mu_1''(\mathbb{C})=\frac{1}{2d_1}$.

Если $v(z)$ — субгармоническая функция, ассоциированная мера которой совпадает с линейной мерой dx на положительной полуоси, то по теореме 4 существует целая функция $f(z)$, которая вне кругов с радиусами $\delta>0$ и центрами в своих нулях удовлетворяет условию

$$v(z)-A(\delta)\leq\ln|f(z)|\leq v(z)+A(\delta), \tag{44}$$

где $A(\delta)$ — некоторая константа, зависящая только от δ (для $\mu(x)=x, c=C=1$). Положим

$$u_0(z)=\int\ln|z-w|\,d\mu_1''(w).$$

Ассоциированная мера функции $v((z+d)e^{-i\varphi_1})$ совпадает с ${\mu_1}'$, а ассоциированные меры функций $v(ze^{-i\varphi_j})$, $j=2,3,...,n$, совпадают соответственно с мерами μ_j. Следовательно, ассоциированные меры функций $u(re^{i\varphi})$ и $d_1u_0+d_1v((z+d)e^{-i\varphi_1})+d_2v(ze^{-i\varphi_2})+...+$ $+d_nv(ze^{-i\varphi_n})$ совпадают. Значит,

$$u(re^{i\varphi})=d_1u_0+d_1v((z+d)e^{-i\varphi_1})+d_2v(ze^{-i\varphi_2})+...+d_nv(ze^{-i\varphi_n})+H(z),$$

где $H(z)$ — гармонична на всей плоскости. Пусть $G(z)$ — целая функция такая, что $Re\ G(z) = H(z)$.

В силу соотношения (44) имеем

$$d_1 v((z+d)e^{-i\varphi_1}) - A_1(\delta) \le \ln|f((z+d)e^{-i\varphi_1})| \le d_1 v((z+d)e^{-i\varphi_1}) + A_1(\delta), \qquad (45)$$

$$d_j v(ze^{-i\varphi_j}) - A_j(\delta) \le \ln|f(ze^{-i\varphi_j})| \le d_j v(ze^{-i\varphi_j}) + A_j(\delta),\ j = 2, ..., n. \qquad (46)$$

Кроме того, т.к. $\mu_1''(\mathbb{C}) = \frac{1}{2d_1}$, то при больших z ($|z| > 2d$)

$$\frac{1}{2}\ln|z| + \ln\frac{1}{2} \le d_1 u_0(z) \le \frac{1}{2}\ln|z| + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}. \qquad (47)$$

Теперь положим

$$L(z) = f((z+d)e^{-i\varphi_1})f(ze^{-i\varphi_2})...f(ze^{-i\varphi_n})e^{G(z)}.$$

Из соотношений (45), (46), (47) видим, что $L(z)$ удовлетворяет всем условиям и принадлежит $\tilde{S}_D$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гайер Д.*Лекции по теории аппроксимации в комплексной области.* М.: Мир. 1986.
2. Никольский Н.К., Павлов Б.С., Хрущев С.В. *Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер. I.* // Препринт ЛОМИ. С. 8–80.
3. Левин Б.Я., Любарский Ю.И. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. АН СССР. Сер. матем. Т. 39. № 3. 1975. С. 657–702.
4. Любарский Ю.И. *Ряды экспонент в пространствах Смирнова и интерполяция целыми функциями специальных классов* // Изв. АН СССР. Сер. матем. Т. 52. № 3. 1988. С. 559–580.
5. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *Об отсутствии безусловных базисов из экспонент в пространствах Бергмана на областях, не являющихся многоугольниками* // Изв. РАН. Серия матем. Т 71. № 6. 2007. С. 69–90.
6. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *Преобразование Лапласа функционалов на пространствах Бергмана* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 68. № 4. 2004. С. 5–42.
7. Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций* // Сиб. мат. журн. Т. 26. № 4. 1985. С. 159–175.
8. Ландкоф Н.С. *Основы современной теории потенциала.* М.: Наука. 1966.

Константин Петрович Исаев,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: orbit81@list.ru