ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 1 (2010). С. 59-70.

УДК 519.6

WENO/РУНГЕ-КУТТА МЕТОД ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ УПРУГИХ ВОЛН

М.Н. ДМИТРИЕВ, Е.И. РОМЕНСКИЙ

Аннотация. В работе представлено применение численного метода WENO/Рунге-Кутта высокого порядка точности для решения уравнений линейной теории упругости, записанной в виде гиперболической системы законов сохранения. Рассматривались методы до 5-го порядка точности по пространству и до 4-го порядка точности по времени. Сравнение результатов расчетов тестовых задач с результатами, полученными широко применяемым в сейсмике методом Вирье второго порядка по пространству и по времени, показывает несомненное преимущество алгоритма WENO/Рунге-Кутта. Рассмотрено также применение метода в случае ограничения расчетной области посредством введения специальным образом построенных поглощающих слоев PML (Perfectly Matched Layer).

Ключевые слова: линейная теория упругости, упругие волны, методы высокого порядка точности.

1. Введение

Методы численного моделирования в геофизике в последние годы приобретают все более важную роль. Необходимость улучшения методик зондирования нефтяных резервуаров и акустического каротажа скважин требует повышения качества моделирования и разработки новых высокоточных численных методов.

Для моделирования сейсмических волн наиболее широко распространена традиционная формулировка уравнений линейной теории упругости в виде дифференциальных уравнений второго порядка для перемещений среды, и многие численные методы основаны именно на таком подходе. В последние годы многие исследователи используют другую формулировку уравнений в виде гиперболической системы законов сохранения первого порядка, для которых разрабатываются эффективные численные конечно-разностные алгоритмы высокого порядка точности как по пространству, так и по времени. В задачах сейсмики и сейсмоакустики используются, в частности, разностная схема Вирье [2], схема на повернутых сетках [3], которые могут со вторым порядком точности моделировать волновые процессы в сложноустроенных (слоистых, трещиноватых) упругих средах. Отметим, что основные трудности при численном исследовании упругих волн в геофизических приложениях заключаются в необходимости расчета волн высокой частоты (до нескольких сотен килогерц) и на больших временах (характерное время — время пробега нескольких сотен длин волн). Для такого типа задач традиционные конечно-разностные методы дают нежелательные эффекты, такие как сильное размазывание волновых фронтов или осцилляции за волной. В последние годы для гиперболических законов сохранения разрабатываются алгоритмы, позволяющие получать более высокий порядок точности как по

M.N. Dmitriev, E.I. Romenski, WENO/RK method for modelling elastic waves.

Работа поддержана РФФИ (проекты 07-05-00538, 08-05-00265, 09-05-00221), Президиумом РАН (проект № 2).

Поступила 20 октября 2009 г.

пространству, так и по времени. Можно упомянуть такие методы, как дискретный метод Галеркина, ADER метод, WENO методы [4].

В данной работе представлено применение WENO/Рунге-Кутта алгоритма для решения гиперболической системы законов сохранения линейной теории упругости. Рассматривались методы до 5-го порядка точности по пространству и до 4-го порядка точности по времени. Сравнение результатов расчетов тестовых задач с результатами, полученными широко используемым в сейсмике методом Вирье второго порядка по пространству и по времени, показывает несомненное преимущество WENO/Рунге-Кутта методов. Отметим, что разработанные методы могут быть прямо использованы для расчета упругих волн в средах с переменными (в том числе с разрывными) характеристиками среды (плотность, скорости звука).

В работе также рассмотрено применение метода в случае ограничения расчетной области посредством введения специальным образом построенных поглощающих слоев PML (Perfectly Matched Layer), предложенных в работах [7, 8]. Разработанные алгоритмы иллюстрируются серией расчетов тестовых задач, одномерных и двумерных.

2. Уравнения линейной теории упругости

Мы будем рассматривать уравнения линейной теории упругости как гиперболическую систему уравнений первого порядка, которая формулируется в терминах скоростей движения среды u_i и деформаций ε_{ij}.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i,j = 1,2,3, \\ &\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = 0, \quad i,j = 1,2,3. \end{aligned} \tag{1}$$

Первое уравнение здесь выражает закон сохранения импульса, второе уравнение описывает эволюцию тензора малых деформаций при движении среды. Мы будем рассматривать случай изотропной среды, для которой напряжения σ_{ij} связаны с деформациями и законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}. \tag{2}$$

Здесь ρ — плотность среды, λ, μ — постоянные Ламе.

Известно, что система (1) является гиперболической, что позволяет применять для ее решения современные численные методы, разработанные для решения гиперболических систем законов сохранения.

В данной статье проведен сравнительный анализ численных методов для решения одномерных и двумерных задач, поэтому ниже приведены соответствующие варианты уравнений.

Двумерная система уравнений может быть получена из (1) в предположении, что движение вдоль одной оси координат, например x_3, отсутствует. Это означает, что $u_3 = 0$, а значит, и $\sigma_{13} = 0, \sigma_{23} = 0, \sigma_{33} = 0$. При этом система (1) сводится к нижеследующей векторной форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Здесь консервативные переменные $\mathbf{U}$ и конвективные потоки $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ имеют вид

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} -\sigma_{11} \\ -\sigma_{12} \\ -u_1 \\ 0 \\ -u_2/2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} -\sigma_{12} \\ -\sigma_{22} \\ 0 \\ -u_2 \\ -u_1/2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Далее для конструирования численных методов будут использоваться одномерные варианты системы (3)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

а для решения задачи Римана (задачи о распаде разрыва) — их эквивалентные формы, записанные в характеристических переменных.

Для одномерной системы, описывающей распространение волн вдоль оси x, такая система имеет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(u_1 \mp \frac{c_p}{\lambda+2\mu}\sigma_{11}\right) \pm c_p \frac{\partial}{\partial x}\left(u_1 \mp \frac{c_p}{\lambda+2\mu}\sigma_{11}\right) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(u_2 \mp \frac{c_s}{\mu}\sigma_{12}\right) \pm c_s \frac{\partial}{\partial x}\left(u_2 \mp \frac{c_s}{\mu}\sigma_{12}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $c_p = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ и $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ соответственно продольная и поперечная скорости звука. Система для волн вдоль оси z имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(u_2 \mp \frac{c_p}{\lambda+2\mu}\sigma_{22}\right) \pm c_p \frac{\partial}{\partial y}\left(u_2 \mp \frac{c_p}{\lambda+2\mu}\sigma_{22}\right) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(u_1 \mp \frac{c_s}{\mu}\sigma_{12}\right) \pm c_s \frac{\partial}{\partial y}\left(u_1 \mp \frac{c_s}{\mu}\sigma_{12}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Системы (6), (7) могут быть применены для решения задачи Римана, которая в случае одномерного движения вдоль оси x имеет нижеследующую формулировку. Пусть при $t = 0$ на оси x заданы начальные данные $u_1^L, u_2^L, \varepsilon_{11}^L, \varepsilon_{22}^L, \varepsilon_{12}^L$ при $x < 0$ и $u_1^R, u_2^R, \varepsilon_{11}^R, \varepsilon_{22}^R, \varepsilon_{12}^R$ при $x > 0$. Требуется найти решение при $t > 0$.

Решение задачи Римана является кусочно-постоянным в плоскости (x, t), разделенной характеристиками $dx/dt = -c_p$, $dx/dt = -c_s$, $dx/dt = 0$, $dx/dt = c_s$, $dx/dt = c_p$. Нас интересует решение $u_1^*, u_2^*, \varepsilon_{11}^*, \varepsilon_{22}^*, \varepsilon_{12}^*$ в области, ограниченной характеристиками $dx/dt = -c_s$ и $dx/dt = c_s$, и выражающие его формулы имеют вид:

$$\begin{aligned}
u_1^* &= \frac{1}{2}(u_1^R + u_1^L) + \frac{1}{2}\frac{c_p}{\lambda+2\mu}(\sigma_{11}^R - \sigma_{11}^L),\\
u_2^* &= \frac{1}{2}(u_2^R + u_2^L) + \frac{1}{2}\frac{c_s}{\mu}(\sigma_{12}^R - \sigma_{12}^L),\\
\sigma_{11}^* &= \frac{1}{2}(\sigma_{11}^R + \sigma_{11}^L) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda+2\mu}{c_p}(u_1^R - u_1^L),\\
\sigma_{12}^* &= \frac{1}{2}(\sigma_{12}^R + \sigma_{12}^L) + \frac{1}{2}\frac{\mu}{c_s}(u_2^R - u_2^L).
\end{aligned} \tag{8}$$

Отметим, что задача Римана для случая, когда среда слева и справа от разрыва имеет разные материальные характеристики (ρ^L, c_p^L, c_s^L слева и ρ^L, c_p^L, c_s^L справа), также может быть решена методом характеристик, и ее решение в области, ограниченной характеристиками $dx/dt = -c_s^L$ и $dx/dt = c_s^R$, имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
u_1^* &= \frac{\rho^R c_p^R u_1^R + \rho^L c_p^L u_1^L + \sigma_{11}^R - \sigma_{11}^L}{\rho^L c_p^L + \rho^R c_p^R}, \\
u_2^* &= \frac{\rho^R c_s^R u_2^R + \rho^L c_s^L u_2^L + \sigma_{11}^R - \sigma_{11}^L}{\rho^L c_s^L + \rho^R c_s^R}, \\
\sigma_{11}^* &= \frac{\rho^L c_p^L \rho^R c_p^R}{\rho^L c_p^L + \rho^R c_p^R} \left[\frac{\sigma_{11}^R}{\rho^R c_p^R} + \frac{\sigma_{11}^L}{\rho^L c_p^L} + u_1^R - u_1^L \right], \\
\sigma_{12}^* &= \frac{\rho^L c_s^L \rho^R c_s^R}{\rho^L c_s^L + \rho^R c_s^R} \left[\frac{\sigma_{12}^R}{\rho^R c_s^R} + \frac{\sigma_{12}^L}{\rho^L c_s^L} + u_2^R - u_2^L \right].
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Заметим, что для решения задачи Римана в последнем случае необходимо использовать условия на контактном разрыве

$$[u_1] = 0, \quad [\sigma_{11}] = 0, \quad [u_2] = 0, \quad [\sigma_{12}] = 0,$$

где $[f] = f^R - f^L$ — скачок функции f при переходе через разрыв.

3. Ограничение расчетной области

Во многих задачах сейсмики и сейсмоакустики волны могут распространяться в неограниченной области. Для того чтобы ограничить расчетную область, применяются различные методы. Ниже будет описана адаптация к применяемому методу высокого порядка точности подхода, использующего окаймление расчетной области поглощающим слоем. Такой слой должен обеспечивать поглощение без отражения волн, приходящих в него из расчетной области. В данной работе мы остановимся на так называемых идеально-согласованных поглощающих слоях PML (от английского Perfectly Matched Layer). Это специальным образом сконструированный слой, расположенный вдоль границы расчетной области и обеспечивающий затухание решения по мере его распространения. Впервые описание таких слоев было изложено в работе [7] для расчета электромагнитных волновых полей, а применительно к уравнениям упругости — в работе [8].

Сформулируем уравнения, моделирующие распространение волн внутри PML и обеспечивающие затухание решения. Решение системы (3) представляется в виде суммы

$$\mathbf{U} = \mathbf{U^x} + \mathbf{U^y},$$

слагаемые которой являются решениями уравнений

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{U^x}}{\partial t} + d(x)\mathbf{U^x} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0, \\
\frac{\partial \mathbf{U^y}}{\partial t} + d(y)\mathbf{U^y} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Здесь $d(s) > 0$ — демпфирующая функция, которая, следуя работе [3], выбиралась следующим образом:

$$d(s) = \frac{2c_p}{L} \log(1/R) \left(\frac{s}{L}\right)^4,$$

где $s \in [0, L]$, L — ширина поглощающего слоя, R — константа характеризующая коэффициент отражения. В численных расчетах выбиралось $R = 10^{-5}$.

4. Численные методы

В данном параграфе приведено краткое описание конечно-объемного метода WENO в применении к описанным в предыдущем параграфе двумерным уравнениям линейной теории упругости (3).

Предположим, что плоскость x, y разбита на счетные ячейки

$$\Pi_{ij} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$$

с номерами i, j и длинами сторон $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$, $\Delta y = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$. Пространственная аппроксимация уравнения (3) имеет следующий вид

$$\frac{d\mathbf{U}_{i,j}}{dt} = -\frac{\mathbf{F}_{i+1/2,j} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{\mathbf{G}_{i,j+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}}{\Delta x}. \tag{11}$$

Здесь $\mathbf{U}_{i,j}$ — значение решения, отнесенное к ячейке Π_{ij}, а $\mathbf{F}_{i-1/2,j}$,$\mathbf{F}_{i+1/2,j}$, $\mathbf{G}_{i,j-1/2}$,$\mathbf{G}_{i,j+1/2}$ — значения потоков через грани ячейки. Вычисление потоков на гранях счетных ячеек может быть выполнено различными способами. Мы опишем здесь конечно-объемный WENO алгоритм [6], который использует усредненные значения решения по счетным ячейкам:

$$\mathbf{U}_{ij}(t) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{U}(t, x, y) dx dy.$$

Выражения для потоковых членов в (11) получаются при интегрировании уравнения по объему ячейки $\Pi_{ij} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$:

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} = \frac{1}{\Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i+1/2}, y)) dy,$$
$$\mathbf{G}_{i,j+1/2} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{G}(\mathbf{U}(t, x, y_{j+1/2})) dx. \tag{12}$$

Опишем общую процедуру нахождения $\mathbf{F}_{i+1/2,j}$. Для этого интегралы в формуле (12) аппроксимируются N-точечной квадратурной формулой

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} \approx \frac{1}{\Delta y} \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i+1/2}, y_\alpha)) K_\alpha, \tag{13}$$

где K_α — веса квадратурной формулы. Далее для нахождения величин $\mathbf{U}_{i+1/2,\alpha} = \mathbf{U}(t, x_{i+1/2}, y_\alpha)$ применяется WENO реконструкция из средних значений по ячейкам слева и справа на гранях между ячейками ${\mathbf{U}^{\mathbf{L}}}_{i+1/2,\alpha} = \mathbf{U}(t, x_{i+1/2} - 0, y_\alpha)$, ${\mathbf{U}^{\mathbf{R}}}_{i+1/2,\alpha} = \mathbf{U}(t, x_{i+1/2} + 0, y_\alpha)$. После этого приближенное значение $\mathbf{F}_{i+1/2,j}$ получается из решения задачи о распаде разрыва в узлах y_α:

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} \approx \frac{1}{\Delta y} \sum_{\alpha=1}^{N} \widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{U}^{\mathbf{L}}_{\mathbf{i+1/2},\alpha}, \mathbf{U}^{\mathbf{R}}_{\mathbf{i+1/2},\alpha}) K_\alpha. \tag{14}$$

В данной работе для аппроксимации интеграла использовалась двухточечная квадратура 4-го порядка:

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} \approx \frac{1}{2}\mathbf{F}\left(\mathbf{U}(x_{i+1/2}, y_j - \frac{\Delta y}{2\sqrt{3}}, t)\right) + \frac{1}{2}\mathbf{F}\left(\mathbf{U}(x_{i+1/2}, y_j + \frac{\Delta y}{2\sqrt{3}}, t)\right). \tag{15}$$

Для вычисления $\mathbf{U}(x_{i+1/2}, y_j \pm \frac{\Delta y}{2\sqrt{3}}, t)$ применялась двумерная WENO реконструкция 5-го порядка. Для этого сначала применяем одномерную реконструкцию $\mathbf{U}(x_{i+1/2}, y_k, t)$ из средних значений $\mathbf{U}(x_i, y_k, t)$ слева и справа от грани $x = x_{i+1/2}$ для $k = j - 3 \cdots, j + 3$. В качестве шаблона используется взвешенная комбинация трех шаблонов:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U}^{(0)} &= \frac{1}{6}(-\mathbf{U}_{i+2} + 5\mathbf{U}_{i+1} + 2\mathbf{U}_i),\\
\mathbf{U}^{(1)} &= \frac{1}{6}(-\mathbf{U}_{i-1} + 5\mathbf{U}_i + 2\mathbf{U}_{i+1}),\\
\mathbf{U}^{(2)} &= \frac{1}{6}(2\mathbf{U}_{i-2} - 7\mathbf{U}_{i-1} + 11\mathbf{U}_i),\\
\mathbf{U}^L_{i+1/2} &= \mathbf{U}_{i+1/2}(x_{i+1/2} - 0) = \sum_{l=0}^{2} \omega_l \mathbf{U}^{(l)}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Веса ω_l имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\omega_l = \frac{\alpha_l}{\sum\limits_{l=0}^{2} \alpha_l}, \quad \alpha_0 = \frac{d_0}{(\varepsilon + \beta_0)^2}, \quad \alpha_1 = \frac{d_1}{(\varepsilon + \beta_1)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{d_2}{(\varepsilon + \beta_2)^2},\\
&d_0 = \frac{3}{10}, \quad d_1 = \frac{3}{5}, \quad d_2 = \frac{1}{10}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Индикаторы гладкости шаблонов:

$$
\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{13}{12}(\mathbf{U}_i - 2\mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{U}_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3\mathbf{U}_i - 4\mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{U}_{i+2})^2,\\
\beta_1 &= \frac{13}{12}(\mathbf{U}_{i-1} - 2\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i+1})^2 + (\mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{U}_{i+1})^2,\\
\beta_2 &= \frac{13}{12}(\mathbf{U}_{i-2} - 2\mathbf{U}_{i-1} + \mathbf{U}_i)^2 + \frac{1}{4}(\mathbf{U}_{i-2} - 4\mathbf{U}_{i-1} + \mathbf{U}_i)^2.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Формулы для вычисления $\mathbf{U}^R_{i-\frac{1}{2}}$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U}^{(0)} &= \frac{1}{6}(2\mathbf{U}_{i+2} - 7\mathbf{U}_{i+1} + 11\mathbf{U}_i),\\
\mathbf{U}^{(1)} &= \frac{1}{6}(-\mathbf{U}_{i+1} + 5\mathbf{U}_i + 2\mathbf{U}_{i-1}),\\
\mathbf{U}^{(2)} &= \frac{1}{6}(-\mathbf{U}_{i-2} + 5\mathbf{U}_{i-1} + 2\mathbf{U}_i),\\
\mathbf{U}^R_{i-1/2} &= \mathbf{U}_{i-1/2}(x_{i-1/2} + 0) = \sum_{l=0}^{2} \omega_l \mathbf{U}^{(l)}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Веса d_0, d_1 и d_2 получаются циклической перестановкой:

$$
d_0 = \frac{1}{10}, \quad d_1 = \frac{3}{5}, \quad d_2 = \frac{3}{10}. \tag{20}
$$

После этого проводим одномерную WENO реконструкцию по переменной y, используя найденные выше значения. Формулы для реконструкции в точке $y_j - \frac{\Delta y}{2\sqrt{3}}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{U}_j + (3\mathbf{U}_j - 4\mathbf{U}_{j+1} + \mathbf{U}_{j+2})\frac{\sqrt{3}}{12},\\
&\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}_j - (-\mathbf{U}_{j-1} + \mathbf{U}_{j+1})\frac{\sqrt{3}}{12},\\
&\mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{U}_j - (3\mathbf{U}_j - 4\mathbf{U}_{j-1} + \mathbf{U}_{j-2})\frac{\sqrt{3}}{12},\\
&\mathbf{U}\left(y_j - \frac{\Delta y}{2\sqrt{3}}\right) = \sum_{l=0}^{2} \omega_l \mathbf{U}^{(l)}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Веса d_0, d_1 и d_2 имеют вид

$$d_0 = \frac{210 - \sqrt{3}}{1080}, \quad d_1 = \frac{11}{18}, \quad d_2 = \frac{210 + \sqrt{3}}{1080}. \tag{22}$$

Формулы для вычисления $\mathbf{U}\left(y_j + \frac{\Delta y}{2\sqrt{3}}\right)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{U}_j - (3\mathbf{U}_j - 4\mathbf{U}_{j+1} + \mathbf{U}_{j+2})\frac{\sqrt{3}}{12},\\
&\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}_j - (\mathbf{U}_{j-1} - \mathbf{U}_{j+1})\frac{\sqrt{3}}{12},\\
&\mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{U}_j - (-3\mathbf{U}_j + 4\mathbf{U}_{j-1} - \mathbf{U}_{j-2})\frac{\sqrt{3}}{12},\\
&\mathbf{U}\left(y_j + \frac{\Delta y}{2\sqrt{3}}\right) = \sum_{l=0}^{2} \omega_l \mathbf{U}^{(l)}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Веса d_0, d_1 и d_2 получаются циклической перестановкой:

$$d_0 = \frac{210 + \sqrt{3}}{1080}, \quad d_1 = \frac{11}{18}, \quad d_2 = \frac{210 - \sqrt{3}}{1080}. \tag{24}$$

Шаг интегрирования по времени Δt выбирается из условия Куранта-Фридрихса-Леви:

$$\Delta t \le CFL \min_{ij}\left(\frac{\Delta x}{S_{ij}^x}, \frac{\Delta y}{S_{ij}^y}\right)$$

S_{ij}^x и S_{ij}^y — максимальные скорости распространения волн в направлении осей x и y соответственно. CFL — число Куранта-Фридрихса-Леви, которое выбирается как $CFL < 1$ в одномерном случае и $CFL < 1/2$ в двумерном случае.

5. Численные примеры

В данном параграфе будет проведен сравнительный анализ результатов расчетов, полученных с использованием метода WENO/Рунге-Кутта и других классических методов, в частности широко используемого в задачах сейсмики метода Вирье. Применение численных методов в изучении распространения упругих волн сталкивается с такими трудностями, как необходимость точного вычисления волн высоких частот (10–100 kHz) на очень больших временах пробега (до нескольких сотен длин волн). Мы продемонстрируем преимущество WENO/Рунге-Кутта методов при решении такого рода задач.

5.1. Одномерные упругие волны. Продемонстрируем теперь преимущество метода WENO/Рунге-Кутта по сравнению с некоторыми другими конечно-разностными методами на серии одномерных задач о распространении упругих волн. Рассмотрим вначале волну, распространяющуюся вправо вдоль оси x. Волна задается в начальных данных следующим образом:

$$u_1(0,x) = e^{-10(x-2)^2},\ \varepsilon_{11}(0,x) = -e^{-10(x-2)^2}.$$

Точное решение на момент времени t, соответствующее этим начальным данным, выражается формулой

$$u_1(t,x) = e^{-10(x-c_pt)^2},\ \varepsilon_{11}(t,x) = -e^{-10(x-c_pt)^2}.$$

На рис. 1 слева приведено сравнение результата расчета методом С.К. Годунова распада разрыва (первый порядок точности)[1] с аналитическим решением на момент времени, соответствующий прохождению волной расстояния около 50 длин волн. Первоначально на длину волны приходилось 40 точек, число Куранта в расчетах было взято 0.7. Полученный численно профиль скорости дает сильное падение амплитуды и размазывание профиля. Можно сделать вывод, что такого рода методы дают неудовлетворительные результаты при решении подобных задач.

На рис. 1 справа приведено сравнение с точным решением численных результатов, полученных схемой Вирье и схемой WENO/Рунге-Кутта пятого порядка по пространству и 3-го и 4-го порядков по времени. На длину волны приходится 20 точек, число Куранта равно 0.7. Видно, что схема Вирье создает существенные осцилляции за волной, а сам фронт волны оказывается несколько запаздывающим по сравнению с точным решением. Методы WENO-5/Рунге-Кутта-3,4 дают гораздо лучшие результаты, но падение амплитуды достигает 20%. Можно тем не менее увидеть, что повышение точности интегрирования по времени уменьшает падение амплитуды волны.

На рис. 2 показаны результаты расчета той же задачи с более мелким пространственным шагом (число точек на длину волны — 40), из которых видно, что метод Вирье и в этом случае дает осциллирующее решение, в то время как WENO-5/Рунге-Кутта-4 дает очень хорошее соответствие точному решению.

Метод WENO/Рунге-Кутта легко может быть обобщен на случай переменных коэффициентов уравнений (различные скорости звука и плотности в среде). Оказывается, что для этого не нужно выделять контактную границу, и сквозной счет обеспечивает нужный порядок точности. На рис. 3 слева приведены результаты расчета задачи о распространении волны в двухслойной среде. Внутри расчетной области $x \in [0, 100]$ при $x < 50$ параметры среды $\rho = 1,\ c = 1$, а при $x > 50$ параметры среды $\rho = 1,\ c = 2$. Форма источника прежняя, в начальных данных было взято 20 точек на длину волны. Видно, что метод Вирье дает неудовлетворительные результаты по сравнению с методом WENO-5/Рунге-Кутта-3.

Только при существенном увеличении числа точек на длину волны метод Вирье дает результат, приближающийся по точности к методу WENO/Рунге-Кутта. На рис. 3 справа приведен тот же расчет, но для числа точек на длину волны 20 для WENO-5/Рунге-Кутта-3 схемы и 400 точек на длину волны для схемы Вирье.

5.2. Двумерные упругие волны. Приведем теперь пример расчета распространения упругих волн, инициированных точечным источником, и их взаимодействия с поглощающим слоем. Расчетная область представляет собой прямоугольник $(x, y) \in [0, 8] \times [0, 8]$. В начальный момент времени в центре области задается источник в виде импульса Риккера, который входит как правая часть в уравнения для $\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial x} &= f(t)\delta(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_s}), \\ \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial y} &= f(t)\delta(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_s}), \end{aligned} \tag{25}$$

где $f(t) = 1 - 2\pi^2\nu^2(t-t_0)^2 e^{-\pi^2\nu^2(t-t_0)^2},\ \nu = 30,\ t_0 = \frac{3}{\nu}$.

Поглощающие слои заданы внутри расчетной области в виде $(x, y) \in [0, 8] \times [0, 1.5]$, $(x, y) \in [6.5, 8] \times [0, 8]$.

Для расчета во всей области, включая PML, использовался описанный выше метод WENO-5/Рунге-Кутта-4. Уравнения, моделирующие затухание внутри PML, брались в виде (10).

На рис. 4 приведено поле напряжения σ_{11}, полученное в результате расчета для различных моментов времени $t = 1.2, 1.5, 1.7, 1.9$. Видно, что волна уходит за пределы расчетной области, при этом не возникает видимых отражений от границы раздела основной области и PML.

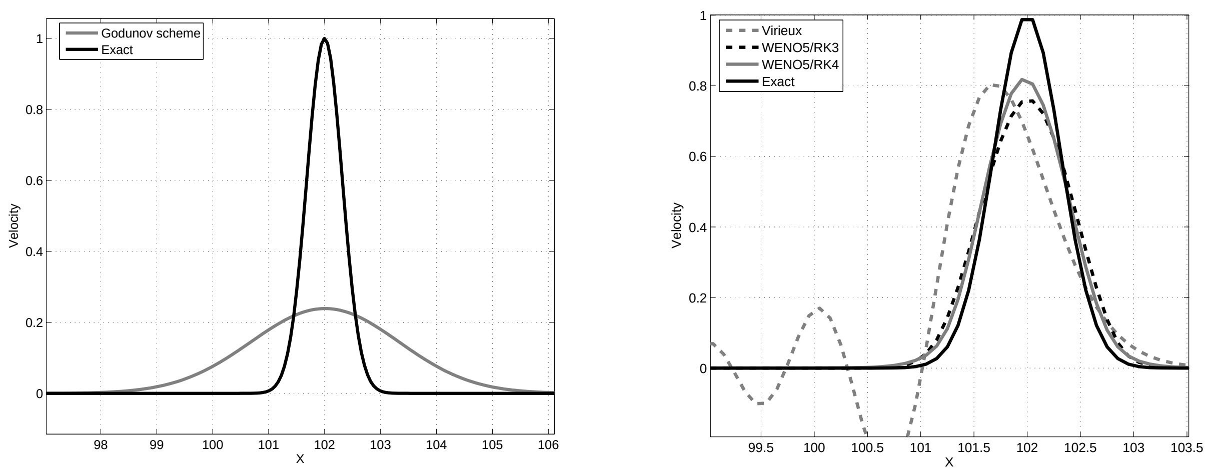


Рис. 1. Искажение импульса. На левом графике – распределение скорости, сравнение численного решения по схеме Годунова с аналитическим решением. Справа – сравнение численного решения по схеме Вирье и WENO/Рунге-Кутта методов с аналитическим решением

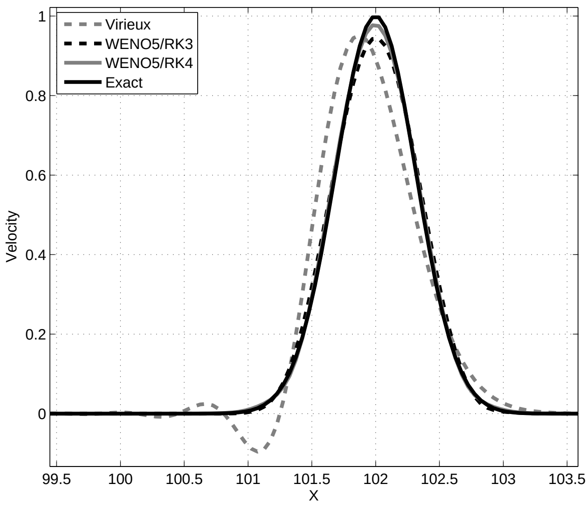


Рис. 2. Искажение импульса. Сравнение численного решения по схеме Вирье и WENO/Рунге-Кутта методов с аналитическим решением

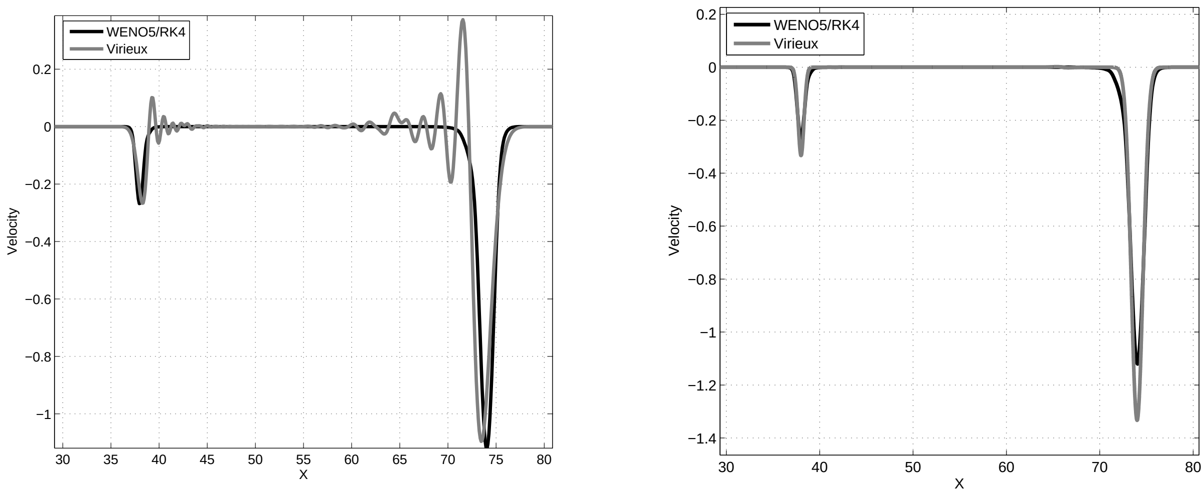
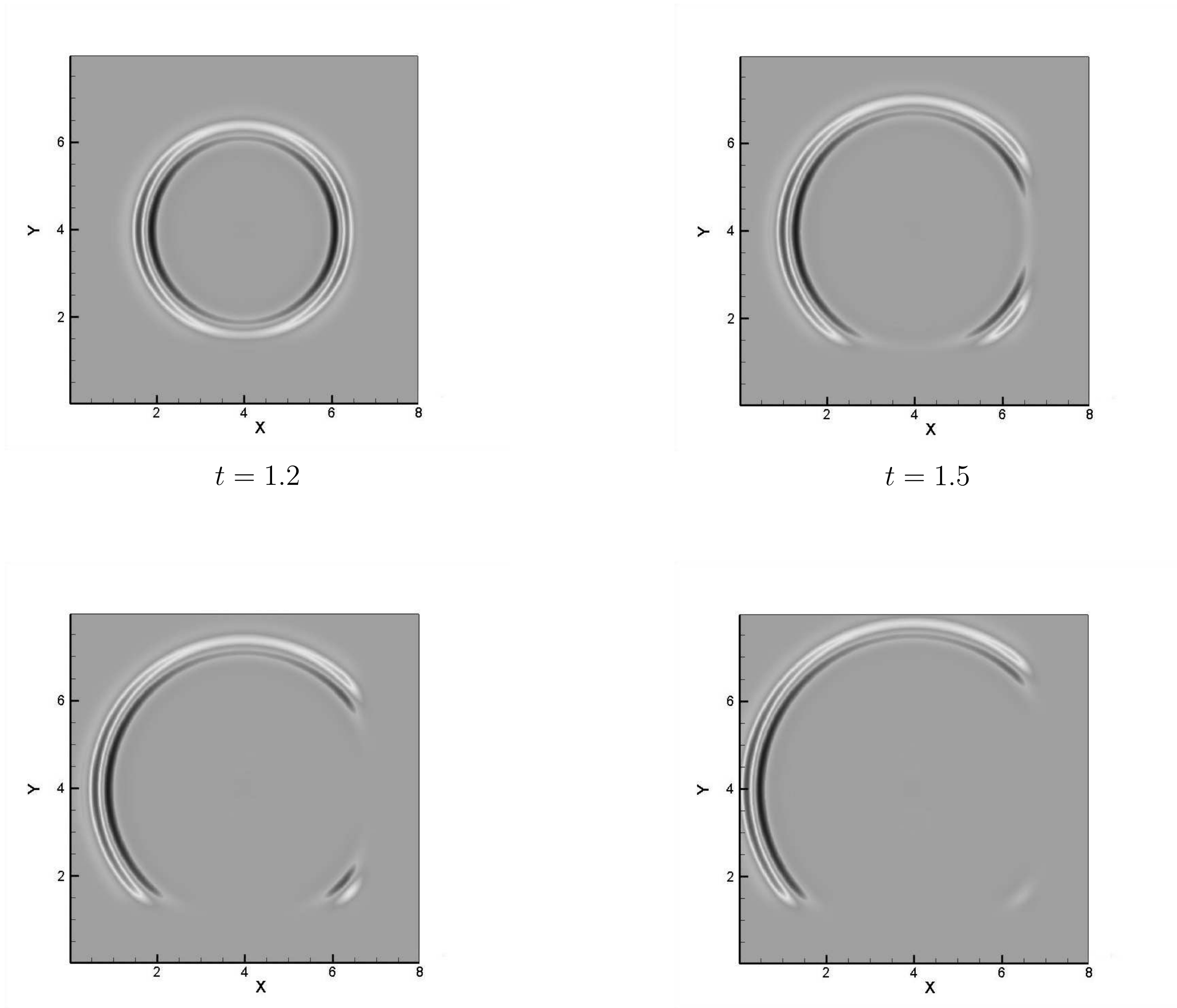


Рис. 3. Искажение импульса для двухслойной модели. Распределение скорости, сравнение численного решения по схеме Вирье с WENO-5/Рунге-Кутта-4 методом

6. Заключение

Метод WENO/Рунге-Кутта может эффективно применяться для расчета распространения упругих волн, в том числе в средах с переменными характеристиками упругости. При этом точность результатов, полученных методом WENO/Рунге-Кутта, превосходит классические конечно-разностные методы. Включение в расчет поглощающих PML слоев не представляет трудностей в применении метода. Заметим, что представленный алгоритм легко обобщается на трехмерный случай.

Авторы выражают признательность В.А. Титареву, В.А. Чеверде за плодотворные обсуждения данной работы.



$t = 1.2$ $t = 1.5$

$t = 1.7$ $t = 1.9$

Рис. 4. Снимки волнового поля σ_{11} для различных времен

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. *Численное решение многомерных задач газовой динамики.* М.: Наука. 1976.
2. J. Virieux *P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method* // Geophysics. 1986. Vol. 103. №. 4. P. 889–901.
3. E.H. Saenger, N. Gold, S.A. Shapiro *Modeling the propagation of the elastic waves using a modified finite-difference grid* // Wave Motion. 2000. Vol. 31. №. 1. P. 77–92.
4. E.F. Toro *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics.* Springer. 2009.
5. G.S. Jiang, C.W. Shu *Efficient implementation of weighted ENO schemes* // J. Comput. Phys. 1996. Vol. 126. P. 202–212.
6. V.A. Titarev, E.F. Toro *Finite-volume WENO schemes for three-dimensional conservation laws* // J. Comput. Phys. 2004. Vol. 201. №. 1. P. 238–260.
7. J.P. Berenger *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves* // J. Comput. Phys. 1994. Vol. 114. P. 185–200.
8. F. Collino, C. Tsogka *Application of the perfectly matched layer absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media* // Geophysics. 2001. Vol. 66. P. 294–307.

9. C.W. Shu *Total variation diminishing Runge-Kutta schemes* // J. Mathematics of Computation. Vol. 67. P. 73–85.
10. D. Drikakis, W. Rider *High-resolution methods for incompressible and low-speed flows.* Springer-Verlag 2004.

Максим Николаевич Дмитриев,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090, г. Новосибирск, Россия
E-mail: mnd@ngs.ru

Евгений Игоревич Роменский,
Институт математики им. С.Л. Соболева СОРАН,
ул. Коптюга, 4,
630090, г. Новосибирск, Россия
E-mail: evrom@math.nsc.ru