ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 1 (2010). С. 3-16.

УДК 517.54

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ И ИНТЕГРАЛАХ ЛАПЛАСА

Р.А. БАШМАКОВ, К.П. ИСАЕВ, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. Во многих вопросах анализа в качестве характеристики выпуклости функции используются вторые производные, что накладывает серьезные ограничения на класс рассматриваемых функций. В работе вводятся геометрические характеристики выпуклости, что с нашей точки зрения более естественно при изучении весовых функциональных пространств. Более подробно рассматривается одномерный случай, доказывается эквивалентность различных характеристик. В качестве приложения изучается асимптотика многомерного интеграла Лапласа.

Ключевые слова: выпуклые функции, сопряженная по Юнгу функция, преобразование Лапласа.

1. Геометрические характеристики выпуклых функций

Часть результатов анонсирована в работе [1].

Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ — элементы пространства $\mathbb{R}^n$, и скалярное произведение $xy = \sum_{k=1}^n x_k y_k$. Для выпуклой функции h, заданной на множестве E из $\mathbb{R}^n$, определим функцию, сопряженную по Юнгу (см. [2])

$$\widetilde{h}(y) = \sup_{x\in E}(xy - h(x)),\ y \in \mathbb{R}^n.$$

Удобно считать, что функция h принимает значение $+\infty$ вне множества E и тогда в определении $\widetilde{h}(y)$ вместо верхней грани по множеству E можно брать верхнюю грань по $\mathbb{R}^n$.

Известно (см. [2]), что $\widetilde{h}$ также выпуклая функция, причем сопряженная по Юнгу к функции $\widetilde{h}$, совпадает с h. Пусть $\widetilde{E} = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \widetilde{h}(y) < +\infty\}$. Будем считать, что внутренность $\widetilde{E}$ — не пустое множество.

Через $V(A)$ будем обозначать n-мерный объем множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Пусть E — некоторая область в $\mathbb{R}^n$ и $x \in E$. Определим по индукции по размерности пространства величину $\mathrm{vd}(x, E)$, которую будем называть "объемным расстоянием"(см. [6]). Если $E \subset \mathbb{R}$, то положим

$$\mathrm{vd}(x, E) = \inf\{|x - y| :\ y \notin E\}$$

— обычное расстояние от точки $x \in E$ до границы E. Пусть величина $\mathrm{vd}(x, E)$ определена в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Возьмем точку $y_0 \in \partial E$ такую, что

$$\inf\{|x - y| :\ y \notin E\} = |x - y_0|.$$

Если таких точек на границе несколько, то возьмем любую из них. Через точку y_0 проходит единственная опорная гиперплоскость, ортогональная отрезку, соединяющему точки x, y_0. Пусть P — гиперплоскость, параллельная этой опорной гиперплоскости и проходящая

R.A. Bashmakov, K.P. Isaev, R.S. Yulmukhametov, On Geometric Characteristics of Convex Functions and Laplace Integrals.

Поступила 20 февраля 2010 г.

через точку x. Размерность выпуклого множества $E_1 = P\bigcap E$ равна n и $x \in E_1$. По допущению индукции величина $\mathrm{vd}(x, E_1)$ уже определена. Положим

$$\mathrm{vd}(x, E) = \mathrm{vd}(x, E_1)|x - y_0|.$$

Как видно из определения, величина $\mathrm{vd}(x, E)$ не всегда определяется однозначно, если $n > 1$. Если обычное расстояние от x до границы E или одного из сечений E плоскостями достигается не в единственной точке, то в зависимости от выбора точки достижения величина E может получиться различной. Из доказываемых теорем будет видно, что в случаях, рассматриваемых в наших утверждениях, разные значения $\mathrm{vd}(x, E)$ будут сравнимыми.

Пусть в дальнейшем

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \ h(x) + \widetilde{h}(y) - xy \le 1\},$$

и для $y \in \mathbb{R}^n$ через D_y обозначим проекцию на $\mathbb{R}^n_x$ сечения множества D:

$$D_y = \{x \in \mathbb{R}^n : \ (x, y) \in D\}.$$

При фиксированном y возьмем произвольную точку $x = x_y$, для которой верно равенство

$$\widetilde{h}(y) + h(x_y) - yx_y = 0,$$

и через D^y обозначим проекцию на $\mathbb{R}^n_y$ сечения множества D:

$$D^y = \{z : \ (x_y, z) \in D\}.$$

2. Одномерный случай

Рассмотрим подробнее "объемное расстояние" в одномерном случае, а также введем и изучим близкие к нему характеристики выпуклых функций. Если в определение интервала D^y подставить условие, определяющее точку x_y, то получим интервал

$$\{z : \ \widetilde{h}(z) - \widetilde{h}(y) - x_y(z - y) \le 1\}.$$

Очевидно, график линейной функции $l(z) = \widetilde{h}(y) + x_y(z - y)$ есть не что иное, как одна из касательных прямых к графику функции $\widetilde{h}$. Поэтому мы можем перейти к определению, не использующему преобразование Юнга.

Определение 1. *Пусть $u(x)$ — выпуклая функция на интервале $I \subset \mathbb{R}$. Возьмем положительное число p. В любой точке $y \in I$ существует хотя бы одна касательная к графику функции u. Предположим, что график линейной функции $l(x)$ является касательной в точке y. Возьмем интервал*

$$I_1(l, y, p) = \{x : \ u(x) - l(x) \le p\},$$

и расстояние от точки y до границы этого интервала обозначим через $\rho_1(u, y, p)$.

Отметим некоторую неоднозначность данного определения величины $\rho_1(u, y, p)$, связанную с свободой выбора функции $l(x)$: если функция u не дифференцируема в некоторой точке y, то касательных в этой точке может быть несколько. Но из последующих лемм следует, что значения величины $\rho_1(u, y, p)$ при различном выборе функции $l(x)$ сравнимы между собой и, тем самым, пригодны для наших целей. Кроме того, можно рассматривать в каждой точке касательную с наибольшим или, наоборот, с наименьшим угловым коэффициентом. Если функция u дифференцируема в точке y, то величина $\rho_1(u, y, p)$ определяется однозначно. Напомним, что функцию u за пределы интервала I мы доопределяем равной $+\infty$. Если имеется в виду одна функция u, то в обозначении $\rho_1(u, y, p)$ символ u будем опускать.

Лемма 1. *При $q \geq p > 0$ имеют место двусторонние оценки*

$$\rho_1(y,q) \geq \rho_1(y,p) \geq \frac{p}{q}\rho_1(y,q)$$

при одном и том же выборе касательной прямой l.

Доказательство. Левое неравенство очевидно. Пусть $I_1(y,q) = (a_q; b_q)$ и $\alpha = \frac{p}{q}$, $x = \alpha b_q + (1-\alpha)y$. Тогда в силу выпуклости функции $u_1 = u - l$ имеем

$$u_1(x) \leq \alpha u_1(b_q) + (1-\alpha)u_1(y) = \frac{p}{q}u_1(b_q) \leq p.$$

Следовательно, если $I_1(y,p) = (a_p; b_p)$, то $b_p \geq \alpha b_q + (1-\alpha)y$, то есть $b_p - y \geq \alpha(b_q - y)$. Точно также покажем, что $y - a_p \geq \alpha(y - a_q)$. Таким образом, $\rho_1(y,p) \geq \alpha\rho_1(y,q) = \frac{p}{q}\rho_1(y,q)$.

Для положительного числа p введем еще одну величину:

$$\rho_2(u,y,p) = \sup\left\{t > 0 : \int_{y-t}^{y+t} |u'(\tau) - u'(y)|\, d\tau \leq p\right\}. \tag{1}$$

Величина $\rho_2(u,y,p)$ более корректно определена: производная выпуклой функции существует всюду за исключением счетного множества точек и монотонна, поэтому интеграл в определении существует для почти всех значений y и непрерывно зависит от пределов интегрирования. Далее заметим, что интеграл (1) легко считается и величину $\rho_2 = \rho_2(u,y,p)$ можно определить из равенства

$$\frac{u(y-\rho_2) + u(y+\rho_2)}{2} - u(y) = \frac{p}{2}.$$

Таким образом, величина ρ_2 оказывается определенной и для тех значений y, в которых $u'(y)$ не определена.

Лемма 2. *1. Для любого положительного p выполняются оценки*

$$2\rho_2(y,p) \geq \rho_1(y,p) \geq \rho_2(y,p).$$

2. При $q \geq p > 0$ имеют место двусторонние оценки

$$\rho_2(y,q) \geq \rho_2(y,p) \geq \frac{p}{q}\rho_2(y,q).$$

Доказательство. 1. Докажем правое неравенство в первом соотношении. По замечанию перед леммой величину $\rho_2 = \rho_2(u,y,p)$ можно определить из равенства

$$\frac{u(y-\rho_2) + u(y+\rho_2)}{2} - u(y) = \frac{p}{2}.$$

Пусть l — линейная функция, определяющая величину $\rho_1(u,y,p)$ и $u_1 = u - l$. Для краткости положим $a = y - \rho_2$, $b = y + \rho_2$ и $I_2(y,p)) = (a;b)$. Тогда $a + b = 2y$, $u_1(y) = 0$, $u_1(x) \geq 0$ и

$$u_1(a) + u_1(b) = p.$$

Так как каждое слагаемое в левой части — неотрицательная величина, то каждое из них не превосходит p, то есть $a, b \in I_1(l,y,p)$ или $I_2(y,p) \subset I_1(l,y,p)$. Другими словами, $\rho_1(u,y,p) \geq \rho_2(u,y,p)$.

Пусть теперь $I_1(l,y,\frac{p}{2}) = (m;n)$. Это значит, что

$$u_1(m) \leq \frac{p}{2}, \quad u_1(n) \leq \frac{p}{2}. \tag{2}$$

Если, например, $y-m\le n-y$, то $\rho_1(y,\frac{p}{2})=y-m$, причем

$$u_1(y+(y-m))\le u_1(n)\le \frac{p}{2}.$$

Сложим последнее неравенство с первым неравенством в (2) и получим

$$u_1(y-(y-m))+u_1(y+(y-m))\le p.$$

Тем самым, $\rho_2(y,p)\ \ge\ y-m\ =\ \rho_1(y,\frac{p}{2})$. Из правой оценки в лемме 1 следует $\rho_1(y,\frac{p}{2})\ge\frac{1}{2}\rho_1(y,p)$. Значит, $\rho_2(y,p)\ge\frac{1}{2}\rho_1(y,p)$.

2. Докажем теперь второе утверждение. Левое неравенство очевидно. Положим $r=\rho_2(y,q)$. Определение величины $\rho_2(y,q)$ означает, что выполняется равенство

$$\frac{u(y-r)+u(y+r)}{2}-u(y)=\frac{q}{2}.$$

Пусть $\alpha=\frac{p}{q}$. Тогда $\alpha\in(0,1]$ и

$$y-\alpha r=\alpha(y-r)+(1-\alpha)y, y+\alpha r=\alpha(y+r)+(1-\alpha)y.$$

В силу выпуклости функции u имеем

$$u(y-\alpha r)\le\alpha u(y-r)+(1-\alpha)u(y), \tag{3}$$

$$u(y+\alpha r)\le\alpha u(y+r)+(1-\alpha)u(y). \tag{4}$$

Сложив эти два неравенства, получим

$$\frac{u(y-\alpha r)+u(y+\alpha r)}{2}-u(y)=\alpha\frac{u(y-r)+u(y+r)}{2}-\alpha u(y)=\alpha\frac{q}{2}=\frac{p}{2}.$$

По определению эта оценка значит, что

$$\rho_2(y,p)\ge\alpha r=\frac{p}{q}\rho_2(y,q).$$

Величину $\rho_2(y,p)$ можно определить более функциональным образом.

Определение 2. *Для произвольной непрерывной функции $u(y)$ на вещественной оси и положительного числа r через $d(u,y,r)$ обозначим отклонение в равномерной норме функции u на промежутке $[y-r;y+r]$ от линейных функций:*

$$d(u,y,r)=\inf\{\max_{t\in[y-r;y+r]}|u(t)-l(t)|,\ l - \textit{линейна}\}.$$

Через $\rho(u,y,p)$ обозначим наибольшее число r, такое, что на интервале $[y-r;y+r]$ функция u отклоняется от линейных функций не более чем на p:

$$\rho(u,y,p)=\sup\{r:\ d(u,y,r)\le p\}.$$

Лемма 3. *Если для выпуклой функции u величина $\rho_2(u,y,p)$ определена по соотношению* (1)*, то*

$$\rho(u,y,p)=\rho_2(u,y,2p).$$

Доказательство. Пусть $r=\rho_2(u,y,2p)$, тогда по определению этой величины

$$\frac{u(y-r)+u(y+r)}{2}-u(y)=p.$$

Возьмем линейную функцию

$$l(x)=\frac{x-(y-r)}{2r}u(y+r)+\frac{x-(y+r)}{-2r}u(y-r). \tag{5}$$

Для этой функции верны соотношения

$$l(y-r)=u(y-r),\quad l(y+r)=u(y+r),$$

$$u(x)\le l(x),\quad x\in[y-r;y+r].$$

Для линейной функции

$$l_1(x) = \frac{x-y}{-r}u(y-r) + \frac{x-(y-r)}{r}u(y)$$

выполняются соотношения

$$l_1(y-r) = u(y-r), \quad l_1(y) = u(y),$$
$$u(x) \geq l_1(x), \quad x \in [y; y+r].$$

Для линейной функции $\Delta l(x) = l(x) - l_1(x)$ легко сосчитать значения на концах интервала $[y; y+r]$:

$$\Delta l(y) = p, \quad \Delta l(y+r) = 2p,$$

значит, в промежутке $[y; y+r]$ имеет место оценка

$$0 \leq l(x) - u(x) \leq l(x) - l_1(x) \leq 2p.$$

Аналогично, с помощью линейной функции

$$l_2(x) = \frac{x-y}{r}u(y+r) + \frac{x-(y+r)}{-r}u(y)$$

покажем, что и в промежутке $[y-r; y]$ выполняется такая же оценка. Итак,

$$0 \leq l(x) - u(x) \leq 2p, \quad x \in [y-r; y+r].$$

Для линейной функции $l_0(x) = l(x) - p$ получаем оценки

$$-p \leq l_0(x) - u(x) \leq p, \quad x \in [y-r; y+r].$$

Отсюда

$$\rho(u, y, p) \geq \rho_2(u, y, 2p). \tag{6}$$

Теперь положим $r = \rho(u, y, p)$. Тогда существует линейная функция l_0, которая в промежутке $[y-r; y+r]$ удовлетворяет оценке

$$|u(x) - l_0(x)| \leq p,$$

причем в силу определения величины $\rho(u, y, p)$

$$\max_{t \in [y-r; y+r]} (u(t) - l_0(t)) = -\min_{t \in [y-r; y+r]} (u(t) - l_0(t)) = p.$$

Положим $l_1(x) = l_0(x) + p$, тогда

$$0 \leq l_1(x) - u(x) \leq 2p, \quad x \in [y-r; y+r]. \tag{7}$$

Возьмем функцию $l(x)$, определенную по формуле (5). Тогда

$$l(y-r) = u(y-r) \leq l_1(y-r), \quad l(y+r) = u(y+r) \leq l_1(y+r).$$

Для линейных функций неравенство продолжается внутрь промежутка:

$$l(x) \leq l_1(x), \quad x \in [y-r; y+r].$$

Отсюда и из (7) получим

$$0 \leq l(x) - u(x) \leq 2p, \quad x \in [y-r; y+r],$$

в частности $l(y) - u(y) \leq 2p$. Подставим определение функции $l(x)$:

$$\frac{u(y+r) + u(y-r)}{2} - u(y) \leq 2p.$$

Это неравенство означает, что

$$\rho_2(u, y, 2p) \geq r = \rho(u, y, p).$$

Вместе с соотношением (6) это неравенство доказывает утверждение леммы 3.

Функция $\rho(u, y, p)$ сравнима с величиной $\rho_1(u, y, p)$ и, кроме того, обладает свойством непрерывности по переменным u и y.

Лемма 4. *1. Пусть u — выпуклая функция на вещественной оси и p — положительное число. Тогда функция $\rho(y) = \rho(u, y, p)$ удовлетворяет условию Лифшица: для всех x, y из области определения функции u*

$$|\rho(y) - \rho(x)| \le |y - x|.$$

2. Пусть u_1, u_2 — выпуклые функции на вещественной оси, такие, что

$$|u_1(x) - u_2(x)| \le C,$$

p — положительное число. Тогда функции $\rho_1(y) = \rho(u_1, y, p)$ и $\rho_2(y) = \rho(u_2, y, p)$ удовлетворяют условию

$$\frac{p}{(p+C)}\rho(u_1, y, p) \le \rho(u_2, y, p) \le \frac{(p+C)}{p}\rho(u_1, y, p).$$

Доказательство. 1. Возьмем произвольное y и $x \in (y - \rho(y); y + \rho(y))$. По определению $\rho(y)$ существует линейная функция $l(t)$, удовлетворяющая оценке

$$|u(t) - l(t)| \le p, \quad t \in [y - \rho(y); y + \rho(y)].$$

Не уменьшая общности, будем считать, что $x > y$, и положим $r = y + \rho(y) - x$. Тогда $[x - r; x + r] \subset [y - \rho(y); y + \rho(y)]$, поэтому

$$|u(t) - l(t)| \le p, \quad t \in [x - r; x + r].$$

Следовательно,

$$\rho(x) \ge r = y + \rho(y) - x,$$

то есть

$$\rho(y) - \rho(x) \le x - y.$$

Если $\rho(y) \ge \rho(x)$, то мы имеем $|\rho(y) - \rho(x)| \le |x - y|$. Если же $\rho(y) < \rho(x)$, то $y \in [x - \rho(x); x + \rho(x)]$ и мы можем провести рассуждения, поменяв местами x и y, в результате получим

$$\rho(x) - \rho(y) \le y - x$$

или

$$|\rho(x) - \rho(y)| \le |y - x|.$$

Итак, если $x \in [y - \rho(y); y + \rho(y)|$, то выполняется последнее неравенство, которое означает непрерывность функции $\rho(t)$. Возьмем теперь произвольные x, y, $x < y$, и положим

$$\delta = \min_{t \in [x,y]} \rho(t).$$

Поскольку $\rho(t)$ — положительная непрерывная функция, то $\delta > 0$. Возьмем возрастающую последовательность $t_1 = x < t_2 < ... < t_n = y$, такую, что $t_{i+1} - t_i = \delta$ для всех i. Тогда $t_i \in [t_{i+1} - \rho(t_{i+1}); t_{i+1} + \rho(t_{i+1})]$, и по доказанному

$$|\rho(t_{i+1}) - \rho(t_i)| \le t_{i+1} - t_i.$$

Следовательно,

$$|\rho(y) - \rho(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n-1} |(\rho(t_{i+1}) - \rho(t_i))\right| \le \sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1} - t_i) = |y - x|.$$

Утверждение первого пункта леммы 4 доказано.

2. Положим $r = \rho(u_1, y, p)$. Тогда существует линейная функция $l(x)$, удовлетворяющая условию

$$|u_1(x) - l(x)| \le p, \quad x \in [y - r; y + r].$$

По условиям леммы

$$|u_2(x) - l(x)| \le |u_2(x) - u_1(x)| + |u_1(x) - l(x)| \le C + p, \quad x \in [y - r; y + r].$$

Значит,

$$\rho(u_2, y, p + C) \ge r = \rho(u_1, y, p).$$

В силу правого неравенства во втором пункте леммы 2 получаем

$$\rho(u_2, y, p) \ge \frac{p}{(p + C)}\rho(u_2, y, p + C) \ge \frac{p}{(p + C)}\rho(u_1, y, p).$$

Проведя те же рассуждения и поменяв местами функции u_1, u_2, получим и верхнюю оценку.

Лемма 4 доказана.

Введем еще одну характеристику для выпуклых функций. Пусть z — фиксированная точка на плоскости. Для любого положительного числа $r > 0$ через $B(z, r)$ обозначим круг $\{w : \ |w - z| < r\}$ и для непрерывной в $\overline{B}(z, r)$ функции f положим

$$\|f\|_r = \max_{w \in \overline{B}(z,r)} |f(w)|.$$

Пусть $d(f, z, r)$ — расстояние от функции f до подпространства гармонических в $B(z, r)$ функций:

$$d(f, z, r) = \inf\{\|f - H\|_r, \ H - \text{гармонична в} \ \ B(z, r)\}.$$

Если $u(x)$ — выпуклая функция на интервале $I \subset \mathbb{R}$, то функция $u(w) = u(\mathrm{Re}\, w)$ является непрерывной функцией в вертикальной полосе $I + i\mathbb{R}$ на плоскости. Для положительного числа p положим

$$\tau(u, z, p) = \sup\{r : \ d(u, z, r) \le p\}.$$

Ясно, что $\tau(u, z, p)$ зависит только от $\mathrm{Re}\, z$. Кроме того, поскольку функцию u при необходимости мы доопределяем, полагая равной $+\infty$ вне интервала I, то $\tau(u, z, p)$, как и $\rho_1(u, y, p)$, $\rho(u, y, p)$, не может превосходить расстояния от y до границы интервала определения функции u.

Лемма 5. *1. Для функции $\tau(y, p) = \tau(u, y, p)$ для любого положительного p выполняются оценки*

$$\tau(y, p) \ge \rho(y, p) \ge \frac{1}{16}\tau(y, p).$$

2. При $q \ge p > 0$ имеют место двусторонние оценки

$$\tau(y, q) \ge \tau(y, p) \ge \frac{p}{16q}\tau(y, q).$$

3. Функция $\tau(y) = \tau(u, y, p)$ удовлетворяет условию Лифшица: для всех x, y из области определения функции u

$$|\tau(y) - \tau(x)| \le |y - x|.$$

4. Пусть u_1, u_2 — выпуклые функции на вещественной оси, такие, что

$$|u_1(x) - u_2(x)| \le C,$$

p — положительное число. Тогда функции $\tau_1(y) = \rho(u_1, y, p)$ и $\tau_2(y) = \rho(u_2, y, p)$ удовлетворяют условию

$$\frac{p}{16(p + C)}\tau(u_1, y, p) \le \tau(u_2, y, p) \le \frac{16(p + C)}{p}\rho(u_1, y, p).$$

Доказательство.

1. Зафиксируем точку $z \in \mathbb{C}$ так, что $y = \mathrm{Re}\ z$ лежит в области определения функции u. Положим $r = \rho(u, y, p)$. Тогда существует линейная функция l, удовлетворяющая условию

$$|u(x) - l(x)| \leq p, \quad x \in [y - r; y + r].$$

Функция $v(w) = l(\mathrm{Re}\ w)$ — гармонична и

$$|u(\mathrm{Re}\ w) - l(\mathrm{Re}\ w)| \leq p, \quad w \in B(z, r).$$

Тем самым

$$\tau(y, p) \geq r = \rho(y, p).$$

Теперь положим $r = \tau(u, y, p)$. В круге $B(z, r)$ существует гармоническая функция H такая, что $\|u - H\|_r \leq p$. Возьмем линейную функцию l такую, что $l(x) \leq u(x)$, $\forall x$, $l(y) = u(y)$(существование такой функции обеспечивается выпуклостью функции u), и пусть $v(w) = l(\mathrm{Re}\ w)$. Тогда в круге $B(z, r)$ выполняются неравенства

$$v(w) \leq u(w) \leq H(w) + p,$$

следовательно,

$$(H(w) + p) - v(w) \geq 0.$$

Кроме того, поскольку $v(z) = u(\mathrm{Re}\ z)$, то

$$(H(z) + p) - v(z) = (H(z) + p) - u(\mathrm{Re}\ z) = (H(z) - u(\mathrm{Re}\ z)) + p \leq 2p.$$

Применим неравенство Харнака для неотрицательных гармонических функций к функции $H(w) + p - v(w)$, в круге $B(z, \frac{r}{2})$ имеем оценку

$$(H(w) + p) - v(w) \leq 3\left((H(z) + p) - v(z)\right) \leq 6p.$$

Тогда в том же круге $B(z, \frac{r}{2})$ выполняется оценка

$$|u(\mathrm{Re}\ w) - v(w)| \leq |u(\mathrm{Re}\ w) - H(w)| + |h(w) + p - v(w)| + p \leq 8p.$$

Функции в левой части этого неравенства зависят только от $x = \mathrm{Re}\ w$, поэтому мы получаем

$$|u(x) - l(x)| \leq 8p, \quad x \in \left[y - \frac{r}{2}; y + \frac{r}{2}\right].$$

Из этой оценки следует, что

$$\rho(y, 8p) \geq \frac{r}{2} = \tau(y, p)$$

или

$$\tau(y, p) \leq 2\rho(y, 8p).$$

Из этой оценки по леммам 2 и 3 получим

$$\tau(y, p) \leq 16\rho(y, p)$$

2. Вторая часть леммы 5 может быть получена на основе п. 1 и лемм 2 и 3.

3. Возьмем точки y_1, y_2 из области определения функции $u(x)$ и пусть $r = \tau(u, y_1, p)$. Это значит, что в круге $B(y_1, r)$ существует гармоническая функция $H(z)$, удовлетворяющая условию

$$|u(\mathrm{Re}\ z) - H(z)| \leq p.$$

Если $|y_1 - y_2| < r$, то это неравенство выполняется и в круге $B(y_2, r - |y_1 - y_2|)$, тем самым

$$\tau(u, y_2, p) \geq r - |y_1 - y_2| = \tau(u, y_1, p) - |y_1 - y_2|,$$

или

$$\tau(u, y_1, p) - \tau(u, y_2, p) \leq |y_1 - y_2|.$$

Если же $|y_1 - y_2| \geq r = \tau(u, y_1, p)$, то тем более

$$\tau(u, y_1, p) - \tau(u, y_2, p) \leq |y_1 - y_2|.$$

Поменяем местами y_1, y_2:

$$\tau(u, y_2, p) - \tau(u, y_1, p) \le |y_1 - y_2|.$$

Таким образом,

$$|\tau(u, y_1, p) - \tau(u, y_2, p)| \le |y_1 - y_2|.$$

4. Этот пункт доказывается точно также, как п.2 леммы 4.

3. Асимптотика интегралов Лапласа

Пусть E — выпуклая область в пространстве $\mathbb{R}^n$ и h — выпуклая функция в области E. В этом параграфе изучается асимптотическое поведение интегралов вида

$$L_h(y) = \int e^{xy - h(x)}\, dx,$$

где для $x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ использовано обозначение $xy = \sum_{k=1}^n x_i y_i$.

Если функция h дважды непрерывно дифференцируема и ее вторая производная удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, то рассматриваемая задача является классической и подробно изучена. Соответствующие результаты можно найти в книгах [2], [3].

Теорема 1. *Пусть*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n :\ h(x) + \widetilde{h}(y) - xy \le 1\}$$

и для $y \in \mathbb{R}^n$ через D_y обозначим проекцию на $\mathbb{R}^n_x$ сечения множества D:

$$D_y = \{x \in \mathbb{R}^n :\ (x, y) \in D\}.$$

Тогда

$$e^{-1} V(D_y) e^{\widetilde{h}(y)} \le \int e^{xy - h(x)}\, dx \le (1 + n!) V(D_y) e^{\widetilde{h}(y)},\ y \in \widetilde{E}.$$

Доказательство. Нижняя оценка очевидна в силу неотрицательности подынтегральной функции и определения множества D. Зафиксируем y. Заметим, что при всех x и y

$$\widetilde{h}(y) + h(x) - xy \ge 0.$$

Положим

$$\alpha(t) = V(\{x :\ \widetilde{h}(y) + h(x) - xy \le t\}),\ t \ge 0.$$

В наших обозначениях $\alpha(1) = V(D_y)$. Как известно ([4]), $(\alpha(t))^{\frac{1}{n}}$ — вогнутая возрастающая функция на $[0; +\infty)$. Имеет место представление

$$L_h(y) = e^{\widetilde{h}(y)} \int_0^\infty e^{-t}\, d\alpha(t).$$

Не уменьшая общности, будем считать, что $\alpha(0) = 0$. Из вогнутости функции $(\alpha(t))^{\frac{1}{n}}$ следует оценка

$$(\alpha(t))^{\frac{1}{n}} \le (\alpha(1))^{\frac{1}{n}} t,\ t \ge 1. \tag{8}$$

Интегрированием по частям получим

$$L_h(y) e^{-\widetilde{h}(y)} = \int_0^1 e^{-t}\, d\alpha(t) + \int_1^\infty e^{-t}\, d\alpha(t) \le \alpha(1) + \int_1^\infty e^{-t} \alpha(t)\, dt.$$

Воспользуемся оценкой (8):

$$L_h(y) e^{-\widetilde{h}(y)} \le \alpha(1) \left(1 + \int_1^\infty e^{-t} t^n\, dt\right) \le (1 + n!) \alpha(1).$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. Очевидно, можно было бы взять любое положительное число p и вместо множества D взять множество

$$D(p)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n:\ h(x)+\widetilde{h}(y)-xy\le p\}$$

и теми же рассуждениями доказать асимптотику

$$e^{-p}V(D(p)_y)e^{\widetilde{h}(y)}\le\int e^{xy-h(x)}\,dx\le(1+\frac{n!}{p^n})V(D(p)_y)e^{\widetilde{h}(y)},\ y\in\widetilde{E}.$$

При фиксированном y возьмем произвольную точку $x=x_y$, для которой верно равенство

$$\widetilde{h}(y)+h(x_y)-yx_y=0$$

и через D^y обозначим проекцию на $\mathbb{R}^n_y$ сечения множества D:

$$D^y=\{z:\ (x_y,z)\in D\}.$$

Теорема 2. *Имеют место неравенства*

$$\frac{1}{e(1+n!)\mathrm{vd}(y,D^y)}e^{\widetilde{h}(y)}\le\int e^{xy-h(x)}\,dx\le\frac{e^2(1+n!)(2n)^n}{\mathrm{vd}(y,D^y)}e^{\widetilde{h}(y)},\ y\in\widetilde{E}.$$

Доказательство. Для сокращения записей при фиксированном y введем обозначение

$$u(x)=\widetilde{h}(y)+h(x+x_y)-(x+x_y)y.$$

Тогда u — неотрицательная выпуклая функция и $u(0)=0$, причем $\{x:\ u(x)\le 1\}=D_y-x_y$. Нетрудно вычислить, что имеет место равенство

$$\widetilde{u}(z)=\widetilde{h}(z+y)-\widetilde{h}(y)-x_yz.$$

По определению сопряженных по Юнгу $\widetilde{h}(z+y)\ge x(y+z)-h(x)$ для всех x, в частности,

$$\widetilde{h}(z+y)\ge x_y(y+z)-h(x_y).$$

Поэтому

$$\widetilde{u}(z)=\widetilde{h}(z+y)-\widetilde{h}(y)-x_yz\ge x_y(y+z)-h(x_y)-\widetilde{h}(y)-x_yz=0,\tag{9}$$

причем $\widetilde{u}(0)=0$. Рассмотрим выпуклое множество

$$E=\{z:\ \widetilde{u}(z)\le 1\}$$

и опорную функцию H этого множества:

$$H(z)=\sup_{t\in E}zt.$$

Поскольку $0\in E$, то $H(z)\ge 0$.

Лемма 6. *Пусть*

$$F=\{u(x)\le 1\},\quad G_1=\{H(x)\le 1\},\quad G_2=\{H(x)\le 2\}.$$

Имеют место включения

$$G_1\subset F\subset G_2.$$

Доказательство. Если $u(x) \le 1$, то

$$H(x) = \sup_{z\in E} xz \le \sup_{z\in E}(xz - \widetilde{u}(z) + 1) \le \sup(xz - \widetilde{u}(z)) + 1 = u(x) + 1 \le 2,$$

и, тем самым, правое включение доказано. Пусть $H(x) \le 1$ и $z \notin E$, тогда, поскольку $0 \in E$, то найдется $\tau > 1$ и $z_0 \in \partial E$ так, что $z = \tau z_0$. В силу выпуклости функции $\widetilde{u}$ имеем

$$1 = \widetilde{u}(z_0) \le \frac{1}{\tau}\widetilde{u}(z) + \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)\widetilde{u}(0) = \frac{1}{\tau}\widetilde{u}(z),$$

то есть $\widetilde{u}(z) \ge \tau$. Поэтому

$$xz - \widetilde{u}(z) \le \tau(xz_0 - 1) \le \tau(\sup_{z'\in\partial E} xz' - 1) = \tau(H(x) - 1) \le 0.$$

Отсюда в силу неотрицательности функции $\widetilde{u}$ справедлива следующая оценка

$$u(x) = \sup_z(xz - \widetilde{u}(z)) = \max(\sup_{z\in E}(xz - \widetilde{u}(z)), \sup_{z\notin E}(xz - \widetilde{u}(z))) \le$$
$$\le \max(\sup_{z\in E}(xz - \widetilde{u}(z)), 0) \le \sup_{z\in E} zx = H(x) \le 1.$$

Лемма доказана.

С помощью замены переменных $x := x + x_y$ получим равенство

$$L_h(y) = \int e^{xy-h(x)}\,dx = \int e^{(x+x_y)y-h(x+x_y)}\,dx = e^{\widetilde{h}(y)}\int e^{-u(x)}\,dx. \tag{10}$$

Применим к последнему интегралу теорему 1, учитывая, что $\widetilde{u}(0) = 0$:

$$e^{-1}V(F)\int e^{-u(x)}\,dx \le (1+n!)\,V(F),$$

а объем множества F оценим по лемме

$$e^{-1}V(G_1) \le \int e^{-u(x)}\,dx \le (1+n!)\,V(G_2).$$

Опорная функция H тоже неотрицательная, значит, $\widetilde{H}(0) = 0$, и по замечанию имеем

$$e^{-2}V(G_2) \le \int e^{-H(x)}\,dx \le (1+n!)\,V(G_1).$$

Последние два соотношения дают оценку

$$\frac{1}{e(1+n!)}\int e^{-H(x)}\,dx \le e^{-1}V(G_1) \le \int e^{-u(x)}\,dx \le$$
$$\le (1+n!)V(G_2) \le (1+n!)e^2\int e^{-H(x)}\,dx.$$

Вместе с представлением (10) получим

$$\frac{1}{e(1+n!)}e^{\widetilde{h}(y)}\int e^{-H(x)}\,dx \le L_h(y) \le (1+n!)e^2 e^{\widetilde{h}(y)}\int e^{-H(x)}\,dx. \tag{11}$$

Таким образом, для доказательства теоремы 2 нам нужно выяснить асимптотику интеграла от $\exp(-H(x)))$, где $H(x)$ — опорная функция множества

$$E = \{z :\ \widetilde{u}(z) \le 1\}.$$

Заметим, что

$$E + y = \{t :\ \widetilde{h}(t) - \widetilde{(}y) - x_y t + x_y y \le 1\} = \{\widetilde{h}(t) + h(x_y) - x_y t \le 1\} = D^y,$$

поэтому $\mathrm{vd}(y, D^y) = \mathrm{vd}(0, E)$. Следовательно, утверждение теоремы 2 будет вытекать из следующей леммы.

Лемма 7. *Пусть E — выпуклое множество, содержащее начало координат и $H(x)$ — опорная функция этого множества. Тогда*

$$\frac{1}{\mathrm{vd}(0,E)} \le \int e^{-H(x)}\,dx \le \frac{(2n)^n}{\mathrm{vd}(0,E)}.$$

Доказательство. При определении величины $\mathrm{vd}(x, E)$ мы фактически строили ортогональный репер с началом в точке x. Поскольку утверждение леммы инвариантно относительно поворотов системы координат, то можем считать, что

$$\inf\{|x| :\ x = (0, ..., 0, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) \notin E\}$$

достигается в точке $(0, ..., 0, a_i, 0, ..., 0) \in \partial E$, причем $a_i > 0$. При таком выборе системы координат, очевидно

$$\mathrm{vd}(0, E) = a_1 a_2 ... a_n.$$

Пусть H_1 — опорная функция симплекса с вершинами в точках $(0, ..., 0, \pm a_i, 0, ..., 0)$. Очевидно, что этот симплекс лежит в E, поэтому для всех x $H_1(x) \le H(x)$. С другой стороны,

$$H_1(x) = \max_i(\pm a_i x_i) = \max_i(a_i|x_i|) \ge \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i|x_i|,$$

следовательно,

$$\int e^{-H(x)}\,dx \le \int e^{-H_1(x)}\,dx \le \int e^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i|x_i|)}\,dx = \frac{(2n)^n}{a_1a_2...a_n}.$$

Таким образом,

$$\int e^{-H(x)}\,dx \le \frac{(2n)^n}{a_1a_2...a_n} = \frac{(2n)^n}{\mathrm{vd}(0,E)}.$$

Докажем нижнюю оценку. По выбору системы координат опорная гиперплоскость P_1 к множеству E в граничной точке $(a_1, 0, ..., 0)$ описывается уравнением

$$x = (x_1, ..., x_n) :\ x_1 = a_1.$$

Рассмотрим пересечение E_1 множества E с подпространством $R_1 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) :\ x_1 = 0\}$. Снова по выбору системы координат опорная гиперплоскость P_2 к множеству E_1 в пространстве R_1 в граничной точке $(0, a_2, 0, ..., 0)$ описывается уравнением (в пространстве R_1) $x_2 = a_2$. Значит, во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ уравнение этой опорной плоскости имеет вид

$$A_{2,1}x_1 + x_2 = a_2.$$

Продолжая рассуждать аналогичным образом, получим, что опорная гиперплоскость P_i к множеству E в точке $(0, ..., 0, a_i, 0, ..., 0)$ описывается уравнением вида

$$A_{i,1}x_1 + A_{i,2}x_2 + ... + A_{i,i-1}x_{i-1} + x_i = a_i.$$

Положим

$$A_{i,i} = 1, \quad A_{i,j} = 0,\ j > i,$$

и через A обозначим треугольную матрицу с элементами $A_{i,j}$. Через G обозначим выпуклую неограниченную область, ограниченную гиперплоскостями P_i, $i = 1, 2, ..., n$, содержащую множество E. Область G есть пересечение полупространств

$$P_i^- = \{x = (x_1, ..., x_n) :\ A_{i,1}x_1 + A_{i,2}x_2 + ... + A_{i,i-1}x_{i-1} + x_i < a_i\}.$$

При линейном преобразовании пространства $y = Ax$ область G преобразуется в область

$$G' = \{y = (y_1, ..., y_n) : \ y_i < a_i, \ i = 1, 2, ..., n\}.$$

Опорная функция области G' легко вычисляется:

$$H_{G'}(z) = \begin{cases} \sum_i a_i z_i, & \text{если все } z_i \geq 0, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть B — обратная матрица к матрице A. Тогда для опорной функции области G выполняется формула

$$H_G(z) = \sup_{x \in G} zx = \sup_{y \in G'} z(By) = \sup_{y \in G'} (B^T z) y = H_{G'}((A^T)^{-1} z),$$

где A^T, B^T — транспонированные матрицы. Поскольку $E \subset G$, то $H(x) \leq H_G(x)$, значит

$$\int e^{-H(x)}\, dx \geq \int e^{-H_G(x)}\, dx = \int e^{-H_{G'}((A^T)^{-1}(x))}\, dx.$$

Произведем замену переменных в последнем интеграле, учитывая, что $\det A = 1$,

$$\int e^{-H(x)}\, dx \geq \int e^{-H_{G'}(y)}\, dy = \int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-H_{G'}(y)}\, dy = \int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\sum_i a_i y_i}\, dy = \frac{1}{a_1 ... a_n}.$$

Лемма 7 доказана.

Подставим соотношения леммы 7 в оценки (5) и получим утверждение теоремы 2.

В заключении на основании лемм 2 – 5 сформулируем теорему 2 для одномерного случая следующим образом:

Теорема 2 (a). *Пусть $h(t)$ — выпуклая функция на интервале I и*

$$K(x) = \int_I e^{2xt - 2h(t)} dt,$$

$$\widetilde{h}(x) = \sup_I (xt - h(t)),$$

$$J = \{x \in \mathbb{R} : \ \widetilde{h}(x) < \infty\}.$$

Тогда для любого $p > 0$ существует постоянная $C(p)$ такая, что

$$\frac{1}{C(p)} \frac{1}{t(\widetilde{h}, x, p)} e^{2\widetilde{h}(x)} \leq K(x) \leq C(p) \frac{1}{t(\widetilde{h}, x, p)} e^{2\widetilde{h}(x)}, \ \forall x \in J.$$

где функция $t(\widetilde{h}, x, p)$ — любая из введенных выше функций $\rho(\widetilde{h}, x, p)$, $\rho_1(\widetilde{h}, x, p)$, $\rho_2(\widetilde{h}, x, p)$, $\tau(\widetilde{h}, x, p)$.

Введенные геометрические характеристики в одномерном случае, когда $\widetilde{h}(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, будут эквивалентны величине $\frac{1}{\sqrt{h''(x)}}$, и мы получаем классические результаты об асимптотике интегралов Лапласа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Напалков В.В., Башмаков Р.А., Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическое поведение интегралов Лапласа и геометрические характеристики выпуклых функций* // ДАН. Т. 413. № 1. 2007. С. 20–22.
2. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ.* М.: Мир. 1973.
3. Федорюк М.В. *Метод перевала.* М.: Наука. 1977.
4. Евграфов М.А. *Асимптотические оценки и целые функции.* М.: Наука. 1979.
5. Погорелов А.В. *Внешняя геометрия выпуклых поверхностей.* М.: Наука. 1969.

6. Юлмухаметов Р.С. *Асимптотика многомерного интеграла Лапласа* // Сб. БНЦ УрО АН СССР. Уфа. 1989.
7. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Пэли-Винера на весовые пространства* // Матем. заметки. Т. 48. № 5. 1990. С. 83–87.
8. Луценко В.И. *Теорема Пэли-Винера на неограниченном интервале* // Исследования по теории приближений. Уфа. 1989. С. 79–85.
9. N. Aronszajn *Theory of reproducing kernels* // Transactions of the American Mathematical Society. V. 68. № 3. 1950. P. 337–404.
10. S. Saitoh *Fourier-Laplace transforms and Bergman spaces on the tube domains* // Мат. вестн. Т. 38. № 4. 1987. С. 571–586.

Рустэм Абдрауфович Башмаков,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: bashmakov_rustem@mail.ru

Константин Петрович Исаев,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: orbit81@list.ru

Ринад Салаватович Юлмухаметов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: Yulmukhametov@mail.ru