ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 1 (2021). С. 78-85.

УДК 514.752, 514.764.274, 517.97

СВЯЗЬ ДЛИНЫ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТРУБЧАТЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Н.М. ПОЛУБОЯРОВА

Аннотация. В статье исследуются поверхности, которые являются экстремалями функционала потенциальной энергии. В нашем случае потенциальная энергия есть сумма двух функционалов, один функционал типа площади, а другой функционал объемной плотности сил. Экстремальные поверхности устойчивы, если вторая вариация функционала знако определена, иначе — неустойчивы. Для получения неустойчивости накладываем дополнительные условия на поверхность и подынтегральные функции, применяем свойства положительно определенных симметричных матриц, используем формулу Кронрода–Федерера, неравенство Коши–Буняковского, оценку гомоморфизма Вейнгартена и оцениваем вторую вариацию функционала. Данная техника доказательства представляет собой развитие приемов, разработанных В.А. Клячиным. Она позволяет получить условия неустойчивости поверхности. Установлено, что длину трубчатой экстремальной поверхности можно оценить с помощью минимальной и максимальной $(n-1)$-мерной меры сечения поверхности плоскостями. Поэтому полученное утверждение означает, что слишком длинные трубки с ненулевой средней кривизной неустойчивы. Физические аспекты данного явления рассмотрены в работе В.А. Саранина.

Ключевые слова: вариация функционала, экстремальная поверхность, функционал типа площади, функционал объемной плотности сил, функционал потенциальной энергии, устойчивость, неустойчивость, трубчатая поверхность, гиперплоскость, мера сечения поверхности, длина трубчатой поверхности.

Mathematics Subjects Classifications: 53A10, 30C70, 31A15

1. Введение

Исследования, предложенные вашему вниманию в данной статье, являются неким обобщением вопросов устойчивости и неустойчивости минимальных поверхностей. Проблема устойчивости подмногообразий нулевой средней кривизны в римановых многообразиях изучена довольно глубоко. Ей посвящены, например, работы Х. Барбоса и М. До Кармо, Б. Лоусона, А.В. Погорелова, Дж. Саймонса, А.А. Тужилина, А.Т. Фоменко и др. Соответствующая проблема в псевдоримановых многообразиях начала решаться сравнительно недавно, но и здесь есть интересные подходы к решению и результаты. Х. Барбоса и М. До Кармо показали, что ориентируемая минимальная поверхность в $\mathbb{R}^3$, у которой площадь образа гауссова отображения меньше, чем 2π, устойчива. М. До Кармо и Пенг дали обобщение проблемы Бернштейна в терминах устойчивости: плоскость – единственная полная устойчивая минимальная поверхность в $\mathbb{R}^3$, а в пространстве Лобачевского существуют однопараметрические семейства таких поверхностей. В работе А.А. Тужилина такие семейства подробно описаны с помощью понятия «индекса», а индекс минимальных

N.M. Poluboyarova, Relations between length and instability of tubular extremal surfaces.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

Поступила 30 августа 2020 г.

поверхностей вращения в пространстве Лобачевского исследуется методом рядов Фурье. Поскольку определение устойчивости минимальных поверхностей у разных авторов разнится, то уточним используемую нами терминологию.

Минимальные поверхности являются экстремалями функционала площади, а их устойчивость определяется как положительная определенность второй вариации этого функционала. Если же рассматривать поверхности, имеющие некоторую плотность и терпящие нагрузки извне, то функционал претерпевает изменения. Примерами таких поверхностей могут служить физические равновесные жидкости в гравитационном поле с потенциалом [1] или тентовые покрытия. С физической точки зрения устойчивость механической системы означает положительную определенность второй вариации потенциальной энергии системы.

В нашем случае потенциальная энергия описывается суммой двух функционалов, один функционал типа площади, а другой функционал объемной плотности сил. Для получения формул первой и второй вариации функционала потенциальной энергии применялся метод, предложенный в [2]. Он заключается в том, что поверхность деформируется вдоль единичных нормалей с помощью функции возмущения с компактным носителем на поверхности. Мы применили его для гиперповерхностей, полученных погружением многообразия в $\mathbb{R}^{n+1}$. Этот метод использовали ранее для поверхностей нулевой средней кривизны в искривленных лоренцевых произведениях в статье В.А. Клячина и В.М. Миклюкова [3], а также для поверхностей предписанной средней кривизны в работе В.А. Клячина [4]. Визуализацией данного метода можно считать изображение магнитной жидкости в поле с потенциалом, представленной в [5].

Получив вторую вариацию функционала потенциальной энергии, заметили, что в зависимости от знакоопределенности матрицы вторых производных подынтегральной функции функционала типа площади нужно рассматривать задачу на минимум или максимум функционала. Примеры приведены нами ранее в работе [6]. В данной работе рассмотрены положительно определенные матрицы.

Исследуя экстремали функционала потенциальной энергии на устойчивость и неустойчивость, мы использовали различные методы: емкостную технику, отображения с ограниченным искажением, поверхности G–параболического типа. В данной работе применяем метод сечения поверхности специальными плоскостями и для оценки длины трубки используем отношение максимальной и минимальной мер сечения поверхности. Например, в работе В.А. Саранина [5] экспериментально доказано, что жидкий цилиндр неустойчив, если его высота больше длины основания. А у В.А. Клячина в [4] утверждается, что слишком длинные трубки постоянной средней кривизны неустойчивы. На основании этих работ была выдвинута гипотеза о том, что слишком длинная экстремальная трубчатая поверхность также неустойчива. Далее в настоящей работе установлено, что гипотеза верна.

Результаты данной работы были анонсированы на международной уфимской конференции «Комплексный анализ и геометрия» [8].

2. Функционал и его вариации

Пусть M – n-мерное связное ориентируемое многообразие класса C^2. Рассмотрим ориентируемую гиперповерхность $\mathcal{M} = (M, u)$, полученную C^2-погружением $u : M \to \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ некоторая область, такая что $\mathcal{M} \subset \partial\mathcal{N}$; Φ, Ψ: $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ – C^2-гладкие функции. Если ξ поле единичных нормалей к поверхности $\mathcal{M}$, то для любой C^2-гладкой поверхности $\mathcal{M}$ определен функционал *потенциальной энергии*

$$W(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \Phi(\xi)\, d\mathcal{M} + \int\limits_{\mathcal{N}} \Psi(x)\, dx, \tag{2.1}$$

не зависящий от выбора нормали ξ.

На поверхности $\mathcal{M}$ индуцируется риманова метрика и соответствующее скалярное произведение касательных векторов, которое мы будем обозначать также как и скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n+1}$ через $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Введем обозначения $\overline{\nabla}$ и ∇ для римановых связностей в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mathcal{M}$ соответственно. Известны [10] следующие соотношения

$$\nabla h = (\overline{\nabla} h)^T, \quad \nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T,$$

справедливые для произвольных C^1–гладких функций $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ и C^1–гладких векторных полей X и Y, касательных к $\mathcal{M}$. Символом v^T обозначаем всюду ортогональную проекцию вектора v на касательную плоскость $T_m\mathcal{M}$ к поверхности $\mathcal{M}$ в соответствующей точке $m \in \mathcal{M}$. Тогда дивергенция векторного поля X, как сечение касательного расслоения поверхности $\mathcal{M}$, определяется как след линейного отображения $E \to \nabla_E X$ [9, §4, с. 232]. Выбирая в касательном пространстве $T_m\mathcal{M}$ ортонормированный базис $\{Z_i\}_{i=1}^n$, дивергенция векторного поля X, согласно [9, §5, с. 235], записывается в виде

$$\mathrm{div} X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{Z_i} X, Z_i \rangle.$$

Пусть $m \in \mathcal{M}$ и в некоторой окрестности точки $u(m)$ определены гладкие векторные поля X и Y, тогда билинейная форма

$$B(X(m), Y(m)) = (\overline{\nabla}_X Y)(u(m)) - (\overline{\nabla}_X Y)^T(u(m))$$

называется *второй фундаментальной формой* поверхности $\mathcal{M}$ (см. [10]). Форма $B(X,Y)$ также является симметричной [10, §3]. Для выбранного ортонормированного базиса в касательном пространстве $T_m\mathcal{M}$ к поверхности $\mathcal{M}$ в точке $u(m)$ вектор

$$\vec{H}(m) = \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}\, B = \frac{1}{n}\,\sum_{i=1}^{n} B(Z_i, Z_i)$$

называется *вектором средней кривизны* [10, §5] поверхности $\mathcal{M}$ в точке $u(m)$.

Пусть V – C^2-векторное поле, определенное в окрестности поверхности $\mathcal{M}$, такое что $V|_{\mathcal{M}} = h \cdot \xi$, где $h \in C_0^1(\mathcal{M})$, ξ – поле единичных нормалей к поверхности, при этом предполагается, что интегральные кривые поля V лежат на прямых линиях и вдоль них выполнено $|V| = \mathrm{const}$.

Ясно, что если поверхность $\mathcal{M}$ погружена, то любое векторное поле $V = h \cdot \xi$, заданное вдоль $\mathcal{M}$, можно продолжить в некоторую окрестность $\mathcal{M}$ так, что будут выполнены сформулированные выше условия. Заметим, что согласно работе [2] вторая вариация не зависит от выбора продолжений.

Пусть $U(\mathcal{M})$ – окрестность поверхности $\mathcal{M}$, в которой определено поле V и $g_t(x) : U(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}^{n+1}$ – однопараметрическая группа локальных диффеоморфизмов, порожденная векторным полем V. То есть $g_t(x)$ есть решение задачи Коши:

$$\frac{dg_t(x)}{dt} = V(g_t(x)), \qquad g_t(x)|_{t=0} = x.$$

Положим $\mathcal{M}_t = g_t(\mathcal{M})$ и $\mathcal{N}_t = g_t(\mathcal{N})$. Ясно, что $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}, \quad \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$.

Определение 2.1. *Поверхность $\mathcal{M}$ является экстремальной, если первая вариация функционала* (2.1) *равна нулю при всех бесконечно малых деформациях поверхности $\mathcal{M}$, то есть*

$$\left.\frac{dW(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\int\limits_{\mathcal{M}_t} \Phi(\xi)\, d\mathcal{M}_t + \int\limits_{\mathcal{N}_t} \Psi(x)\, dx\right)\Bigg|_{t=0} = 0.$$

Определение 2.2. *Экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ устойчива, если вторая вариация функционала (2.1) знакоопределена при всех бесконечно малых деформациях поверхности $\mathcal{M}$, иначе – неустойчива.*

Определение 2.3. *Будем говорить, что поверхность $\mathcal{M}$ трубчатая [7], если существуют два числа $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, такие, что для каждой гиперплоскости*

$$\Pi_t = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = t\},$$

ортогональной вектору $e_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$, сечение $\Sigma(t) = \mathcal{M} \cap \Pi_t$ не пусто при $\forall\ t \in (a; b)$ и всякая порция, заключенная между двумя гиперплоскостями Π_{t_1} и Π_{t_2} при $a < t_1 < t_2 < b$, является компактом.

Поверхность $\mathcal{M}$ трубчата в целом, если $a = -\infty$ и $b = +\infty$. Простейшим примером трубчатой в целом минимальной поверхности в $\mathbb{R}^3$ является катеноид.

Элементы матрицы G имеют вид

$$G_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \delta_{ij}(\Phi - \langle D\Phi, \xi \rangle), \tag{2.2}$$

где $D\Phi = \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}, \ldots, \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_{n+1}}\right)$, δ_{ij} – символ Кронекера.

Далее будем использовать обозначения: k_i – главные кривизны; E_i – главные направления поверхности; div – дивергенция в метрике поверхности $\mathcal{M}$, $H = \langle \vec{H}, \xi \rangle$ – средняя кривизна поверхности $\mathcal{M}$ относительно нормали ξ.

Тогда справедлива теорема о вариациях функционала потенциальной энергии.

Теорема 2.1. *Если $W(t) = W(\mathcal{M}_t)$, то*

$$W'(0) = \int\limits_{\mathcal{M}} (\operatorname{div}(D\Phi(\xi))^T - nH\Phi(\xi) + \Psi(x))h(x)\, d\mathcal{M}. \tag{2.3}$$

Более того, если $W'(0) = 0$ для любой функции $h(x) \in C_0^1(\mathcal{M})$, то выполнено

$$W''(0) = \int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ G(\nabla h, \nabla h) + h^2 \left(\langle \overline{\nabla} \Psi(x), \xi \rangle - \sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) \right) \right\} d\mathcal{M}, \tag{2.4}$$

где G – квадратичная форма, соответствующая матрице (2.2).

Формула первой вариации (2.3) функционала (2.1) доказана в [11], а второй вариации (2.4) – в работе [12].

3. Теорема о неустойчивости трубчатых пверхностей

Далее будем полагать, что матрица G положительно определена, $\lambda(\xi)$ и $\Lambda(\xi)$ – минимальное и максимальное по модулю собственные значения матрицы G из (2.2).

Для доказательства теоремы о неустойчивости нам потребуется экстремальное свойство собственных чисел положительно определенных матриц [13, с. 168]. В общем случае

$$\lambda(\xi)|\eta|^2 \leqslant G(\eta, \eta) \leqslant \Lambda(\xi)|\eta|^2,$$

для любых векторов $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{n+1}$, матрица G считается в точке ξ. В частности будет следовать

$$\lambda(\xi)|\nabla h|^2 \leqslant G(\nabla h, \nabla h) \leqslant \Lambda(\xi)|\nabla h|^2, \tag{3.1}$$

и

$$\lambda(\xi) \leqslant G(E_i, E_i) \leqslant \Lambda(\xi), \tag{3.2}$$

так как $|E_i|^2 = 1$.

Пусть вдоль поверхности выполнено условие

$$\left\langle \overline{\nabla}\Psi, \xi \right\rangle \leqslant 0. \tag{3.3}$$

Оно является по сути связующим между нагрузками на поверхность извне и внутри, его интерпретация в приложениях автору не известна, а его требование необходимо исключительно из-за особенностей методики доказательства, как и в работе [4].

Если $L_{\min}$, $L_{\max}$ - минимальная и максимальная $(n-1)$-мерные меры сечения поверхности $\mathcal{M}$ плоскостями вида $\{x : x_{n+1} = const\}$,

$$\Lambda^2 = \max_{\mathcal{M}} \Lambda(\xi), \quad \lambda^2 = \min_{\mathcal{M}} \lambda(\xi), \quad H_{\min} = \min_{\mathcal{M}} |H|,$$

то справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{M}$ погруженная трубчатая экстремальная для функционала (1) поверхность со средней кривизной $H_{\min} \neq 0$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, вдоль которой выполнено $\left\langle \overline{\nabla}\Psi,\, \xi \right\rangle \leqslant 0$, а граница поверхности расположена в параллельных плоскостях α_1 и α_2, заданных уравнениями $x_{n+1} = a$ и $x_{n+1} = b$ соответственно. Если расстояние между этими плоскостями удовлетворяет неравенству*

$$b - a > \frac{2\pi \Lambda L_{max}}{\sqrt{n} H_{\min} \lambda L_{min}},$$

то поверхность $\mathcal{M}$ неустойчива.

Замечание 3.1. *Аналогичная теорема для поверхностей постоянной средней кривизны доказана в работе В.А. Клячина* [4].

Доказательство. Для доказательства неустойчивости поверхности достаточно привести функцию $h : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, для которой вторая вариация функционала будет отрицательна (напомним, что рассматриваем только положительно определенные матрицы G), как того требует определение неустойчивости. Поскольку выражение второй вариации (2.4) выполнено для любой функции $h(x) \in C_0^1(\mathcal{M})$, то для определенности необходимо пояснить, что условие на функцию $h(x)$ выбирается из

$$h(x)|_{\partial\mathcal{M}} = 0, \qquad \int\limits_{\mathcal{M}} h(x)\, d\mathcal{M} = 0 \tag{3.4}$$

для случаев непустой и пустой границы поверхности $\mathcal{M}$ соответственно. Проведем оценку второй вариации с учетом условий (3.1), (3.2), (3.3) и $||A||^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i^2$.

$$\begin{aligned} I(h) = &\int\limits_{\mathcal{M}} \left(G(\nabla h, \nabla h) + h^2 (\left\langle \overline{\nabla}\Psi,\, \xi \right\rangle - \sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i)) \right) d\mathcal{M} \\ &\leqslant \int\limits_{\mathcal{M}} \left(G(\nabla h, \nabla h) - h^2 \sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) \right) d\mathcal{M} \leqslant \int\limits_{\mathcal{M}} \left(\Lambda(\xi) |\nabla h|^2 - h^2 \lambda(\xi) ||A||^2 \right) d\mathcal{M}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\Sigma(t) = \{x \in \mathcal{M} : f(x) = t\} = \mathcal{M} \bigcap \{x : x_{n+1} = t\}, \quad f(x) = x_{n+1}.$$

Требуемую функцию h будем искать в виде $h = h(f(x))$.

Согласно формуле Кронрода–Федерера [14, теорема 3.2.12], неравенству $||A||^2 \geqslant nH^2_{\min}$ и введенным обозначениям $\Lambda^2 = \max_{\mathcal{M}} \Lambda(\xi)$, $\lambda^2 = \min_{\mathcal{M}} \lambda(\xi)$ имеем

$$I(h) \leqslant \int\limits_{\mathcal{M}} \left(\Lambda(\xi)|\nabla h|^2 - h^2\lambda(\xi)||A||^2\right) d\mathcal{M}$$

$$\leqslant \Lambda^2 \int\limits_a^b (h')^2(\tau) \int\limits_{\Sigma(\tau)} |\nabla f| d\,\Sigma(\tau) d\tau - nH^2_{\min}\lambda^2 \int\limits_a^b h^2(\tau) \int\limits_{\Sigma(\tau)} \frac{1}{|\nabla f|} d\,\Sigma(\tau) d\tau.$$

Введем сокращения

$$\eta(\tau) = \int\limits_{\Sigma(\tau)} |\nabla f|\, d\,\Sigma(\tau), \qquad \nu(\tau) = \int\limits_{\Sigma(\tau)} \frac{1}{|\nabla f|}\, d\,\Sigma(\tau)$$

и $d\,\Sigma(t)$ элемент площади сечения $\Sigma(t)$. Тогда неравенство примет вид

$$I(h) \leqslant \Lambda^2 \int\limits_a^b (h')^2(\tau)\eta(\tau) d\tau - nH^2_{\min}\lambda^2 \int\limits_a^b h^2(\tau)\nu(\tau) d\tau.$$

Положим

$$h(t) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{2\pi\sigma}{\sigma_0}\right), & 0 \leqslant \sigma < \dfrac{\sigma_0}{2}, \\ \mu \sin\left(\dfrac{2\pi\sigma}{\sigma_0}\right), & \dfrac{\sigma_0}{2} \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0, \end{cases}$$

где

$$\sigma(t) = \int\limits_a^t \frac{d\tau}{\eta(\tau)}, \quad \sigma_0 = \int\limits_a^b \frac{d\tau}{\eta(\tau)},$$

μ – положительная постоянная, которая выбрана с учетом (3.4)

$$\int\limits_{\mathcal{M}} h(x)\, d\mathcal{M} = \int\limits_a^b h(\tau)\nu(\tau)\, d\tau = 0.$$

Существование такой постоянной очевидно по построению функции $h(t)$.

Находим производные для подстановки в неравенство.

$$h'(t) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\sigma_0} \cos\left(\dfrac{2\pi\sigma}{\sigma_0}\right) \sigma'(t) = \dfrac{2\pi}{\sigma_0} \cos\left(\dfrac{2\pi\sigma}{\sigma_0}\right) \dfrac{1}{\eta(t)}, & 0 \leqslant \sigma < \dfrac{\sigma_0}{2}, \\ \mu \dfrac{2\pi}{\sigma_0} \cos\left(\dfrac{2\pi\sigma}{\sigma_0}\right) \sigma'(t) = \mu \dfrac{2\pi}{\sigma_0} \cos\left(\dfrac{2\pi\sigma}{\sigma_0}\right) \dfrac{1}{\eta(t)}, & \dfrac{\sigma_0}{2} \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0. \end{cases}$$

После замены переменной $d\sigma(t) = dt/\eta(t)$ неравенство принимает вид

$$I(h) \leqslant \left(\frac{2\pi}{\sigma_0}\right)^2 \Lambda^2 \int\limits_0^{\sigma_0/2} \cos^2\left(\frac{2\pi\sigma}{\sigma_0}\right) d\sigma - nH^2_{\min}\lambda^2 \int\limits_0^{\sigma_0/2} \sin^2\left(\frac{2\pi\sigma}{\sigma_0}\right) \nu(\tau(\sigma))\eta(\tau(\sigma))\, d\sigma$$

$$+ \mu^2 \left(\frac{2\pi}{\sigma_0}\right)^2 \Lambda^2 \int\limits_{\sigma_0/2}^{\sigma_0} \cos^2\left(\frac{2\pi\sigma}{\sigma_0}\right) d\sigma - \mu^2 nH^2_{\min}\lambda^2 \int\limits_{\sigma_0/2}^{\sigma_0} \sin^2\left(\frac{2\pi\sigma}{\sigma_0}\right) \nu(\tau(\sigma))\eta(\tau(\sigma))\, d\sigma.$$

В силу неравенства Коши–Буняковского $(n-1)$–мерная площадь $L(t)$ сечения $\Sigma(t)$ может быть оценена

$$L(t) = \int\limits_{\Sigma(t)} d\Sigma(t) \leqslant \left(\int\limits_{\Sigma(\tau)} |\nabla f| d\,\Sigma(\tau) \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Sigma(\tau)} \frac{1}{|\nabla f|} d\,\Sigma(\tau) \right)^{1/2} = \sqrt{\eta(t)\nu(t)}.$$

Поэтому, полагая $L_{\max} = \max_{[a,b]} L(t)$, $L_{\min} = \min_{[a,b]} L(t)$, будем иметь

$$I(h) \leqslant \left(\frac{2\pi}{\sigma_0}\right)^2 \Lambda^2 \int\limits_0^{\sigma_0/2} \cos^2\left(\frac{2\pi\sigma}{\sigma_0}\right) d\sigma - L_{\min}^2 n H_{\min}^2 \lambda^2 \int\limits_0^{\sigma_0/2} \sin^2\left(\frac{2\pi\sigma}{\sigma_0}\right) d\sigma$$

$$+ \mu^2 \left(\frac{2\pi}{\sigma_0}\right)^2 \Lambda^2 \int\limits_{\sigma_0/2}^{\sigma_0} \cos^2\left(\frac{2\pi\sigma}{\sigma_0}\right) d\sigma - L_{\min}^2 \mu^2 n H_{\min}^2 \lambda^2 \int\limits_{\sigma_0/2}^{\sigma_0} \sin^2\left(\frac{2\pi\sigma}{\sigma_0}\right) d\sigma.$$

Вычисляя интегралы, получаем, что они равны

$$\int\limits_0^{\sigma_0/2} \cos^2\left(\frac{2\pi\sigma}{\sigma_0}\right) d\sigma = \frac{\sigma_0}{4}, \qquad \int\limits_{\sigma_0/2}^{\sigma_0} \cos^2\left(\frac{2\pi\sigma}{\sigma_0}\right) d\sigma = \frac{\sigma_0}{4},$$

$$\int\limits_0^{\sigma_0/2} \sin^2\left(\frac{2\pi\sigma}{\sigma_0}\right) d\sigma = \frac{\sigma_0}{4}, \qquad \int\limits_{\sigma_0/2}^{\sigma_0} \sin^2\left(\frac{2\pi\sigma}{\sigma_0}\right) d\sigma = \frac{\sigma_0}{4},$$

поэтому неравенство преобразуется к виду

$$I(h) \leqslant \frac{\sigma_0}{4}(1+\mu^2)\left(\left(\frac{2\pi}{\sigma_0}\right)^2 \Lambda^2 - n H_{\min}^2 L_{\min}^2 \lambda^2\right).$$

Замечая, что

$$\sigma_0 = \int\limits_a^b \frac{dt}{\eta(t)} \geqslant \int\limits_a^b \frac{dt}{L(t)} \geqslant \frac{b-a}{L_{\max}},$$

окончательно будем иметь

$$I(h) \leqslant \frac{\sigma_0}{4}(1+\mu^2) L_{\max}^2 \left(\left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2 \Lambda^2 - n H_{\min}^2 \frac{L_{\min}^2}{L_{\max}^2} \lambda^2\right).$$

В силу условия теоремы поверхность неустойчива, что влечет отрицательность второй вариации. Значит,

$$\left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2 \Lambda^2 - n H_{\min}^2 \frac{L_{\min}^2}{L_{\max}^2} \lambda^2 < 0.$$

Далее, выражая отсюда разность $b-a$, получаем оценку из формулировки теоремы

$$b - a > \frac{2\pi \Lambda L_{\max}}{\sqrt{n} H_{\min} \lambda L_{\min}}.$$

Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р. Финн. *Равновесные капиллярные поверхности.* М.: Математическая теория, Мир. 1989.
2. J. Simons. *Minimal varieties in riemannian manifolds* // Ann. of Math. **88**:1, 62–105 (1968).
3. В.А. Клячин, В.М. Миклюков. *Признаки неустойчивости поверхностей нулевой средней кривизны в искривленных лоренцевых произведениях* // Матем. сб. **187**:11, 67–88 (1996).
4. В.А. Клячин. *О некоторых свойствах устойчивых и неустойчивых поверхностей предписанной средней кривизны* // Изв. РАН. Сер. матем. **70**:4, 77–90 (2006).
5. В.А. Саранин. *Равновесие жидкостей и его устойчивость.* М.: Ин-т компьютерных исследований. 2002.
6. Н.М. Медведева. *Исследование устойчивости экстремальных поверхностей вращения* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. **7**:2, 25–32 (2007).
7. В.М. Миклюков, В.Г. Ткачев. *Некоторые свойства трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности* // Мат. сб. **180**:9, 1278–1295 (1989).
8. Н.М. Полубоярова. *Неустойчивость трубчатых экстремальных поверхностей* // Комплексный анализ и геометрия: сборник тезисов Международной конференции (г. Уфа, 23 – 26 мая 2018 г.) / отв. ред. З.Ю. Фазуллин. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2018., с. 32.
9. Ш. Кобаяси, К. Номидзу. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. М.: Наука, 1981.
10. Ш. Кобаяси, К. Номидзу. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 2. М.: Наука, 1981.
11. Н.М. Полубоярова. *Уравнения экстремалей функционала потенциальной энергии* // Вестник ВолГУ. Серия 1. Математика. Физика. **36**:5, 60–72 (2016).
12. Н.М. Полубоярова. *О неустойчивости экстремалей функционала потенциальной энергии* // Уфимск. матем. журн. **10**:3, 79—88 (2018).
13. И.М. Гельфанд. *Лекции по линейной алгебре.* М.: Наука, 1971.
14. Г. Федерер. *Геометрическая теория меры.* М.: Наука, 1987.

Наталья Михайловна Полубоярова,
Волгоградский государственный университет,
проспект Университетский, 100,
400062, г. Волгоград, Россия
E-mail: `natasha_medvedeva@volsu.ru`