ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 1 (2021). С. 56-68.

УДК 517.5

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА-СТЕЧКИНА И ЗНАЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В L_2

М.Р. ЛАНГАРШОЕВ, С.С. ХОРАЗМШОЕВ

Аннотация. При решении некоторых задач теории приближения, вместо обычного модуля непрерывности $\omega_m(f,t)$ для оценки наилучшего приближения 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве L_2, иногда удобнее использовать эквивалентную характеристику $\Omega_m(f,t)$, называемую обобщенным модулем непрерывности. Подобная усредненная характеристика гладкости функции в ходе исследования важных вопросов конструктивной теории функций в метрическом пространстве $L_p(0<p<1)$ рассматривалась К.В. Руновским и Э.А. Стороженко, В.Г. Кротовым и П. Освальдом. В пространстве L_2 при нахождении точных констант в неравенстве типа Джексона использовал ее С.Б. Вакарчук. Мы продолжим исследование в нахождении решений задач теории приближения и рассмотрим новые точные неравенства типа Джексона–Стечкина, связывающие наилучшие приближения дифференцируемых периодических функций тригонометрическими полиномами с интегралами, содержащими обобщенные модули непрерывности. Для классов функций, определенных при помощи указанных характеристик, вычислены точные значения некоторых известных n-поперечников.

Ключевые слова: наилучшее полиномиальное приближение, обобщенный модуль непрерывности, экстремальная характеристика, поперечники.

Mathematics Subject Classification: 42A10, 41A17, 41A44

1. Введение

Пусть $L_2 = L_2[0,2\pi]$ – пространство измеримых по Лебегу 2π-периодических функций с нормой

$$\|f\| = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Обозначим через

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &= \inf\Big\{\|f-T_{n-1}\|: \quad T_{n-1}(x)\in\mathcal{T}_{n-1}\Big\} \\ &= \|f-S_{n-1}(f)\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{1}$$

M.R. Langarshoev, S.S. Khorazmshoev, Sharp inequalities of Jackson-Stechkin type and the diameters of classes of functions in L_2.

Поступила 04 мая 2020 г.

наилучшее приближение функции $f \in L_2$ тригонометрическими полиномами порядка $n-1$, $n \in \mathbb{N}$ в пространстве L_2, где

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(kx + \varphi_k),$$

$\mathcal{T}_{n-1}$ – подпространство, состоящее из всевозможных тригонометрических полиномов порядка $n-1$, $S_{n-1}(f)$ – частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f.

Через $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+; \quad L_2^0 \equiv L_2)$ обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)} \neq const$ принадлежат пространству L_2.

Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ величина

$$\omega_m(f, \tau) := \sup\left\{\|\Delta_h^m(f\cdot)\| : |h| \leqslant \tau\right\},$$

где

$$\Delta_h^m(f, x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x + kh)$$

– конечная разность m-го порядка функции $f \in L_2$ в точке x с шагом h называется модулем непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$.

При решении задачи вычисления точных констант в неравенствах типа Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leqslant \chi\, n^{-r} \omega_m\left(f^{(r)}, \frac{\tau}{n}\right); \qquad r \in \mathbb{Z}_+, \qquad \tau > 0,$$

вместо обычного модуля непрерывности $\omega_m(f, \tau)$ иногда удобнее использовать следующую эквивалентную характеристику, так называемый обобщенный модуль непрерывности m-го порядка

$$\Omega_m(f, \tau) = \left\{\frac{1}{\tau^m} \int\limits_0^{\tau} \cdots \int\limits_0^{\tau} \|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|^2 dh_1 \cdots dh_m\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\tau > 0, \qquad \overline{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_m), \qquad \Delta_{\overline{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1,$$
$$\Delta_{h_j}^1(f) = f(\cdot + h_j) - f(\cdot), \qquad j = \overline{1, m}$$

(см., например [1], [2]). Интересные результаты при применении модуля непрерывности $\Omega_m(f, \tau)$ в задачах аппроксимации $f \in L_2$ были получены в работах [3], [4], [5], [6], [7], [8]. В частности, С.Б. Вакарчук и В.И. Забутная [8] показали, что при $0 < t \leqslant \dfrac{3\pi}{4}$ имеет место соотношение

$$\sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m\left(f^{(r)}, \dfrac{t}{n}\right)_2} : \quad f \neq const\right\} = \left\{2\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)\right\}^{-\frac{m}{2}},$$

где $m, n \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+$.

В 1967 году Н.И. Черных сообщил (см. [9]), что для характеристики величины $E_{n-1}(f)$ более естественным является не джексоновский функционал $\omega_m\left(f^{(r)},\tau\right)$, а усредненный с весом $\varphi(\tau)>0,\quad 0<\tau\leqslant h$ функционал

$$\Phi_m\left(f^{(r)},h\right)=\left(\frac{\int\limits_0^h\omega_m^2\left(f^{(r)},\tau\right)\varphi(\tau)d\tau}{\int\limits_0^h\varphi(\tau)d\tau}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Исходя из сказанного, вводим в рассмотрение следующие экстремальные аппроксимационные характеристики

$$\mathcal{K}_{m,n,r}(h)=\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}}\frac{2^{\frac{m}{2}}n^rE_{n-1}(f)}{\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-\tau)\Omega_m^{\frac{2}{m}}\left(f^{(r)},\tau\right)d\tau\right)^{\frac{m}{2}}},\tag{2}$$

$$\chi_{m,n,r}(h)=\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}}\frac{2^{\frac{m}{2}}n^rE_{n-1}(f)}{\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-\tau)\Omega_m^{p}\left(f^{(r)},\tau\right)d\tau\right)^{\frac{1}{p}}},\tag{3}$$

содержащие обобщенный модуль непрерывности с весовой функцией $\dfrac{2}{h^2}(h-\tau)$, где $0<\tau\leqslant h$. Еще одним аргументом в пользу такого выбора весовой функции

$$\varphi(\tau)=\frac{2}{h^2}(h-\tau),\qquad 0<\tau\leqslant h$$

является работа [10], в которой сделано существенное продвижение в решении задач о точной константе в неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $C[0,2\pi]$. При этом важную роль сыграл указанный вес, с помощью которого осреднялась сама конечная разность, а не ее норма. Для обычного модуля непрерывности $\omega_m(f,\tau)$ аппроксимационная характеристика, подобная (2), была рассмотрена в работе [11].

Пусть $S=\{x,\|x\|\leqslant 1\}$ – единичный шар в L_2, $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2, $\Lambda_n\subset L_2$ – n-мерное подпространство, $\Lambda^n\subset L_2$ – подпространство коразмерности n, $\mathcal{L}:L_2\to\Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор, переводящей элементы пространства L_2 в Λ_n; $\mathcal{L}^{\perp}$: $L_2\to\Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования пространства L_2 на подпространство Λ_n.

Величины

$$b_n(\mathfrak{M},L_2)=\sup\left\{\sup\left\{\varepsilon>0:\quad \varepsilon S\cap\Lambda_{n+1}\subset\mathfrak{M}\right\}:\quad \Lambda_{n+1}\subset L_2\right\},$$
$$d^n(\mathfrak{M},L_2)=\inf\left\{\sup\left\{\|f\|_2:\quad f\in\mathfrak{M}\cap\Lambda^n\right\}:\quad \Lambda^n\subset L_2\right\},$$
$$d_n(\mathfrak{M},L_2)=\inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-\varphi\|_2:\quad \varphi\in\Lambda_n\right\}:\quad f\in\mathfrak{M}\right\}:\quad \Lambda_n\subset L_2\right\},$$
$$\lambda_n(\mathfrak{M},L_2)=\inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathcal{L}f\|_2:\quad f\in\mathfrak{M}\right\}:\quad \mathcal{L}L_2\subset\Lambda_n\right\}:\quad \Lambda_n\subset L_2\right\},$$
$$\pi_n(\mathfrak{M},L_2)=\inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathcal{L}^{\perp}f\|_2:\quad f\in\mathfrak{M}\right\}:\quad \mathcal{L}^{\perp}L_2\subset\Lambda_n\right\}:\quad \Lambda_n\subset L_2\right\}$$

называют соответственно бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным n-поперечниками в пространстве L_2. Поскольку L_2 – гильбертово пространство, то между перечисленными выше n-поперечниками выполняются соотношения (см., например [12]):

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \leqslant d^n(\mathfrak{M}, L_2) \leqslant d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \lambda_n(\mathfrak{M}, L_2) = \pi_n(\mathfrak{M}, L_2). \tag{4}$$

Также полагаем

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}) := \sup\{E_{n-1}(f): \quad f \in \mathfrak{M}\}.$$

Непрерывную возрастающую на полусегменте $0 \leqslant \tau < \infty$ функцию $\Phi(\tau)$ такую, что $\Phi(0) = 0$, будем называть мажорантой. Для произвольных $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $h > 0$ введем в рассмотрение следующие классы функций:

$$W_m^{(r)}(h) := \left\{ f \in L_2^{(r)}: \quad \frac{2}{h^2}\int_0^h (h-\tau)\Omega_m^{\frac{2}{m}}\left(f^{(r)}, \tau\right) d\tau \leqslant 1 \right\},$$

$$W_m^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in L_2^{(r)}: \quad \left(\frac{2}{h^2}\int_0^h (h-\tau)\Omega_m^{\frac{2}{m}}\left(f^{(r)}, \tau\right) d\tau\right)^{\frac{m}{2}} \leqslant \Phi(h) \right\},$$

$$W_p^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in L_2^{(r)}: \quad \left(\frac{2}{h^2}\int_0^h (h-\tau)\Omega_m^{p}\left(f^{(r)}, \tau\right) d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \Phi(h) \right\}.$$

Через τ_* обозначим величину аргумента функции $\sin\tau/\tau$, при котором она достигает на полусегменте $[0, \infty)$ своего наименьшего значения. При этом τ_* есть минимальный положительный корень уравнения $\dfrac{\operatorname{tg}\tau}{\tau} = 1, \quad 4,49 < \tau_* < 4,51$ (см. [5]). Положим

$$\left(1 - \frac{\sin\tau}{\tau}\right)_* := \begin{cases} 1 - \dfrac{\sin\tau}{\tau}, & \text{если} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_*; \\ 1 - \dfrac{\sin\tau_*}{\tau_*}, & \text{если} \quad \tau \geq \tau_*. \end{cases}$$

Эта функция будет играть важную роль при нахождении значения вышеперечисленных поперечников указанных классов функций.

2. Основные результаты

Теорема 2.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in \mathbb{R}_+$. Тогда имеет место следующее равенство*

$$\mathcal{K}_{m,n,r}(h) = \left(1 - \frac{2\,\mathrm{Si}(nh)}{nh} + \frac{4\sin^2\dfrac{nh}{2}}{n^2h^2}\right)^{-\frac{m}{2}}, \tag{5}$$

где $\mathrm{Si}(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau x^{-1}\sin x dx$ *– интегральный синус.*

Доказательство. Если функция $f \in L_2^{(r)}$ и

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right)$$

– ряд Фурье функции $f(x)$, то

$$\Omega_m^2\left(f^{(r)}, \tau\right) = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2 \left(1 - \frac{\sin k\tau}{k\tau}\right)^m, \tag{6}$$

где $\rho_k^2=\rho_k^2(f)=a_k^2(f)+b_k^2(f),\quad k\in\mathbb{N}$. В силу неравенства Гельдера для сумм, при любом натуральном m, пользуясь соотношениями (6) и (1), будем иметь

$$E_{n-1}^2(f)\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\frac{\sin k\tau}{k\tau}+\left(E_{n-1}^2(f)\right)^{1-\frac{1}{m}}\frac{1}{2n^{\frac{2r}{m}}}\Omega_m^{\frac{2}{m}}\left(f^{(r)};\tau\right). \tag{7}$$

Умножая обе части неравенства (7) на функцию $h-\tau$, затем, проинтегрировав левую и правую части полученного неравенства по переменной τ в пределах от 0 до h и пользуясь определением интегрального синуса, запишем

$$\begin{aligned}E_{n-1}^2(f)\leqslant 2\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\frac{\mathrm{Si}(kh)}{kh}-\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\frac{4\sin^2\dfrac{kh}{2}}{k^2h^2}\\+E_{n-1}^{2-\frac{2}{m}}(f)\frac{1}{n^{\frac{2r}{m}}h^2}\int\limits_0^h(h-\tau)\Omega_m^{\frac{2}{m}}\left(f^{(r)};\tau\right)d\tau.\end{aligned} \tag{8}$$

Воспользуясь тем фактом, что функция $\dfrac{\mathrm{Si}(x)}{x}$ является невозрастающей на $[0,\infty)$, имеем

$$\max\left\{\frac{\mathrm{Si}(kh)}{kh}:\quad k\geq n\right\}=\frac{\mathrm{Si}(nh)}{nh},\qquad 0<nh\leqslant\pi,$$

а также, используя равенство

$$\sup\left\{\frac{\sin x}{x}:\quad \frac{nh}{2}\leqslant x<\infty\right\}=\frac{2\sin\dfrac{nh}{2}}{nh},$$

из неравенств (8) получим

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{2\,\mathrm{Si}(nh)}{nh}+\frac{4\sin^2\dfrac{nh}{2}}{n^2h^2}\right)E_{n-1}^2(f)\\\leqslant E_{n-1}^{2-\frac{2}{m}}(f)\frac{1}{n^{\frac{2r}{m}}h^2}\int\limits_0^h(h-\tau)\Omega_m^{\frac{2}{m}}\left(f^{(r)};\tau\right)d\tau.\end{aligned} \tag{9}$$

Из неравенства (9) вытекает, что

$$\frac{2^{\frac{m}{2}}n^rE_{n-1}(f)}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int\limits_0^h(h-\tau)\Omega_m^{\frac{2}{m}}\left(f^{(r)};\tau\right)d\tau\right)^{\frac{m}{2}}}\leqslant\left(1-\frac{2\,\mathrm{Si}(nh)}{nh}+\frac{4\sin^2\dfrac{nh}{2}}{n^2h^2}\right)^{-\frac{m}{2}}, \tag{10}$$

откуда с учетом определения величины (2) получаем оценку сверху

$$\mathcal{K}_{m,n,r}(h)\leqslant\left(1-\frac{2\,\mathrm{Si}(nh)}{nh}+\frac{4\sin^2\dfrac{nh}{2}}{n^2h^2}\right)^{-\frac{m}{2}}. \tag{11}$$

Чтобы установить равенство (5), достаточно рассмотреть функцию $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$, для которой

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \qquad \Omega_m^2\left(f_0^{(r)};\tau\right) = 2^m n^{2r}\left(1-\frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)^m, \qquad 0 < n\tau \leqslant \pi.$$

Откуда с учетом формулы (2) имеем следующую оценку снизу

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{m,n,r}(h) &\geq \frac{2^{\frac{m}{2}} n^r E_{n-1}(f_0)}{\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\Omega_m^{\frac{2}{m}}\left(f_0^{(r)},\tau\right)d\tau\right)^{\frac{m}{2}}} \\ &= \left(1-\frac{2\,\mathrm{Si}(nh)}{nh}+\frac{4\sin^2\frac{nh}{2}}{n^2h^2}\right)^{-\frac{m}{2}}.\end{aligned} \tag{12}$$

Требуемое равенство (5) получаем из сравнения неравенств (11) и (12), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1. □

Теорема 2.2. *Пусть $m,n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leqslant 2$. Тогда для произвольного h, $0 < h \leqslant \pi/n$ имеет место следующее равенство*

$$\chi_{m,n,r}(h) = \left(\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\left(1-\frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)^{mp/2} d\tau\right)^{-1/p}. \tag{13}$$

Доказательство. Возведем равенство (6) в степень $\frac{p}{2}$, $0 < p \leqslant 2$, умножим на весовую функцию $\frac{2}{h^2}(h-\tau)$, $0 < \tau \leqslant h$ и проинтегрируем по τ в промежутке $[0,h]$, затем возведем обе части полученного неравенства в степень $\frac{1}{p}$. В итоге получаем

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\Omega_m^p\left(f^{(r)},\tau\right)d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\qquad = 2^{\frac{m}{2}+\frac{1}{p}}\left[\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2\left(1-\frac{\sin k\tau}{k\tau}\right)^m\right)^{\frac{p}{2}} d\tau\right]^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{14}$$

Воспользуемся далее следующим упрощенным вариантом известного неравенства Минковского [13; с.32]

$$\left(\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}|f_k(\tau)|^2\right)^{\frac{p}{2}} d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^h |f_k(\tau)|^p d\tau\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

справедливого при $0 < p \leqslant 2$ и любом $h > 0$. Из равенства (14) имеем

$$\begin{gathered}\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\Omega_m^p\left(f^{(r)},\tau\right)d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \\ \geq 2^{\frac{m}{2}+\frac{1}{p}}\left[\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\left(k^{rp}\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\left(1-\frac{\sin k\tau}{k\tau}\right)^{\frac{mp}{2}}d\tau\right)^{\frac{2}{p}}\right]^{\frac{1}{2}}.\end{gathered} \tag{15}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = x^{2r}\left(\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\left(1-\frac{\sin x\tau}{x\tau}\right)^{\frac{mp}{2}}d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$

и покажем, что она в области $Q_n = \{x : x \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$ является монотонно возрастающей и

$$\min\{\varphi(x) :\, x \in Q_n\} = \varphi(n) = n^{2r}\left(\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\left(1-\frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)^{\frac{mp}{2}}d\tau\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Будем следовать схеме рассуждений работы [8]. В этой работе доказано, что при любых $\nu, \alpha \in \mathbb{R}_+$, $x \geq 1$ и $0 < y \leqslant \dfrac{3\pi}{4}$ имеет место неравенство

$$x^{\nu}\left(1-\frac{\sin xy}{xy}\right)^{\alpha} \geq \left(1-\frac{\sin y}{y}\right)^{\alpha}.$$

Из этого неравенства при $x = \dfrac{k}{n}$, $k, n \in \mathbb{N}$, $k \geq n$ и $y = n\tau$, $0 < \tau \leqslant h$, $\nu = rp$, $\alpha = \dfrac{mp}{2}$, $m \in \mathbb{N}$ сразу получаем

$$k^{rp}\left(1-\frac{\sin k\tau}{k\tau}\right)^{\frac{mp}{2}} \geq n^{rp}\left(1-\frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)^{\frac{mp}{2}}. \tag{16}$$

Умножая обе части неравенства (16) на положительную функцию $\dfrac{1}{h^2}(h-\tau)$, $0 < \tau \leqslant h$, интегрируя полученное выражение по переменному τ в пределах от 0 до h и возведя в степень $\dfrac{1}{p}$, для произвольного $k \geq n$, $k, n \in \mathbb{N}$ запишем

$$\left(k^{rp}\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\left(1-\frac{\sin k\tau}{k\tau}\right)^{\frac{mp}{2}}d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(n^{rp}\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\left(1-\frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)^{\frac{mp}{2}}d\tau\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{17}$$

Сопоставляя соотношения (17) и (15), имеем

$$\begin{gathered}\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\Omega_m^p\left(f^{(r)},\tau\right)d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \geq 2^{\frac{m}{2}+\frac{1}{p}}n^r \\ \cdot\left[\left(\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\left(1-\frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)^{\frac{mp}{2}}d\tau\right)^{\frac{2}{p}}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{gathered} \tag{18}$$

Из неравенства (18) в силу формулы (1) окончательно запишем следующее соотношение

$$\frac{2^{\frac{m}{2}+\frac{1}{p}} n^r E_{n-1}(f)}{\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\Omega_m^p\left(f^{(r)},\tau\right)d\tau\right)^{\frac{1}{p}}} \leqslant \left(\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\left(1-\frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)^{\frac{mp}{2}}d\tau\right)^{-\frac{1}{p}}. \tag{19}$$

Следовательно, согласно определению величины (3), из неравенства (19) получаем оценку сверху экстремальной характеристики $\chi_{m,n,r}(h)$, а именно

$$\chi_{m,n,r}(h) \leqslant \left(\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\left(1-\frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)^{\frac{mp}{2}}d\tau\right)^{-\frac{1}{p}}. \tag{20}$$

Чтобы получить оценки снизу величины $\chi_{m,n,r}(h)$, достаточно рассмотреть функцию $f_0(x)=\cos nx \in L_2^{(r)}$, для которой

$$E_{n-1}(f_0)=1, \qquad \Omega_m\left(f_0^{(r)};\tau\right)=2^{\frac{m}{2}}n^r\left(1-\frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)^{\frac{m}{2}}, \qquad 0<n\tau\leqslant\pi.$$

С учетом формулы (3) имеем

$$\begin{aligned}\chi_{m,n,r}(h) &\geq \frac{2^{\frac{m}{2}+\frac{1}{p}} n^r E_{n-1}(f_0)}{\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\Omega_m^p\left(f_0^{(r)},\tau\right)d\tau\right)^{\frac{1}{p}}} \\ &= \left(\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\left(1-\frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)^{\frac{mp}{2}}d\tau\right)^{-\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{21}$$

Требуемое равенство (13) получаем из сравнения неравенств (20) и (21), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2. □

Теорема 2.3. *Пусть $m,n,r\in\mathbb{N}$ и $h>0$. Тогда имеют место равенства*

$$\begin{aligned}\sigma_{2n}\left(W_m^{(r)}(h),L_2\right) &= \sigma_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(h),L_2\right)=E_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(h)\right) \\ &= \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}n^r}\left(1-\frac{2\,\mathrm{Si}(nh)}{nh}+\frac{4\sin^2\frac{nh}{2}}{n^2h^2}\right)^{-\frac{m}{2}},\end{aligned}$$

где $\sigma_n(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n-поперечников.

Доказательство. Оценку сверху для проекционного n-поперечника получаем из неравенства (10) с учетом определения класса функций $W_m^{(r)}(h)$:

$$\begin{aligned}\pi_{2n}\left(W_m^{(r)}(h),L_2\right) &\leqslant \pi_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(h),L_2\right)\leqslant E_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(h)\right) \\ &= \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}n^r}\left(1-\frac{2\,\mathrm{Si}(nh)}{nh}+\frac{4\sin^2\frac{nh}{2}}{n^2h^2}\right)^{-\frac{m}{2}}.\end{aligned} \tag{22}$$

С целью получения оценки снизу бернштейновского n-поперечника введем в рассмотрение $(2n+1)$-мерный шар полиномов $S_{2n+1}\in\mathcal{T}_{2n-1}\bigcap L_2$:

$$S_{2n+1}=\left\{T_n(x):\quad \|T_n(x)\|\leqslant\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}n^r}\left(1-\frac{2\,\mathrm{Si}(nh)}{nh}+\frac{4\sin^2\dfrac{nh}{2}}{n^2h^2}\right)^{-\frac{m}{2}}\right\}$$

и покажем его принадлежность классу $W_m^{(r)}(h)$. В работе [5] для произвольного тригонометрического полинома $T_n(x)\in\mathcal{T}_{2n-1}$ доказано неравенство

$$\Omega_m\left(T_n^{(r)},\tau\right)\leqslant 2^{\frac{m}{2}}n^r\left(1-\frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)_*^{\frac{m}{2}}\|T_n\|. \tag{23}$$

Используя это неравенство, имеем

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-\tau)\Omega_m^{\frac{2}{m}}\left(T_n^{(r)},\tau\right)d\tau$$
$$\leqslant\frac{4}{h^2}\int\limits_0^h(h-\tau)n^{\frac{2r}{m}}\left(1-\frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)d\tau\|T_n\|^{\frac{2}{m}}=1,$$

откуда следует, что $S_{2n+1}\in W_m^{(r)}(h)$. По определению бернштейновского n-поперечника получаем оценку снизу

$$\begin{aligned}b_{2n}\left(W_m^{(r)}(h),L_2\right)\geq b_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(h),L_2\right)\geq b_{2n}\left(S_{2n+1},L_2\right)\\ =\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}n^r}\left(1-\frac{2\,\mathrm{Si}(nh)}{nh}+\frac{4\sin^2\dfrac{nh}{2}}{n^2h^2}\right)^{-\frac{m}{2}}.\end{aligned} \tag{24}$$

Утверждение теоремы вытекает из сопоставления неравенств (22) и (24). $\square$

Теорема 2.4. *Пусть $m,n,r\in\mathbb{N}$ и функция Φ удовлетворяет условию*

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)}\geq\left(\frac{\pi^2}{\pi^2-2\pi\,\mathrm{Si}(\pi)+4}\right)^{\frac{m}{2}}\\ \times\begin{cases}\left(1-\dfrac{2\,\mathrm{Si}(nh)}{nh}+\dfrac{4\sin^2\dfrac{nh}{2}}{n^2h^2}\right)^{\frac{m}{2}}, & \text{если}\quad 0\leqslant h\leqslant\dfrac{\pi}{n},\\ \left(1-\dfrac{2\pi}{nh}+\dfrac{2\pi^2-2\pi\,\mathrm{Si}(\pi)+4}{n^2h^2}\right)^{\frac{m}{2}}, & \text{если}\quad h\geq\dfrac{\pi}{n}.\end{cases}\end{aligned} \tag{25}$$

Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned}\gamma_{2n}\left(W_m^{(r)}(\Phi);L_2\right)=\gamma_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(\Phi);L_2\right)=E_{n-1}\left(W_m^{(r)}(\Phi)\right)\\ =\frac{\pi^m}{2^{\frac{m}{2}}n^r}\left\{\frac{1}{\pi^2-2\pi\,\mathrm{Si}(\pi)+4}\right\}^{\frac{m}{2}}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),\end{aligned} \tag{26}$$

где $\gamma_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников, рассмотренных выше.

Доказательство. Из неравенства (10) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ получаем

$$E_{n-1}(f) \leqslant \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} n^r} \left(1 - \frac{2\,\mathrm{Si}(nh)}{nh} + \frac{4\sin^2\dfrac{nh}{2}}{n^2h^2}\right)^{-\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\Omega_m^{\frac{2}{m}}(f^{(r)},\tau)d\tau\right)^{\frac{m}{2}}.$$

Полагая в этом неравенстве $h = \dfrac{\pi}{n}$ и учитывая определение класса $W_m^{(r)}(\Phi)$, а также с учетом соотношения (4) между перечисленными выше n-поперечники, получим оценку сверху

$$\begin{aligned}\gamma_{2n}\left(W_m^{(r)}(\Phi); L_2\right) &\leqslant \gamma_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(\Phi); L_2\right)\\ &\leqslant d_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(\Phi); L_2\right) \leqslant E_{n-1}\left(W_m^{(r)}(\Phi)\right)\\ &\leqslant \frac{\pi^m}{2^{\frac{m}{2}} n^r}\left(\frac{1}{\pi^2 - 2\pi\,\mathrm{Si}(\pi) + 4}\right)^{\frac{m}{2}} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).\end{aligned} \tag{27}$$

Для получения оценки снизу вводим в рассмотрение шар тригонометрических полиномов

$$S_{2n+1} := \left\{T_n \in \mathcal{T}_{2n+1} : \quad \|T_n\| \leqslant \frac{\pi^m}{2^{\frac{m}{2}} n^r}\left(\frac{1}{\pi^2 - 2\pi\,\mathrm{Si}(\pi) + 4}\right)^{\frac{m}{2}} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

и, используя неравенство (23), покажем, что шар S_{2n+1} принадлежит классу $W_m^{(r)}(\Phi)$. Рассуждения проведем для двух случаев: для $0 \leqslant h \leqslant \dfrac{\pi}{n}$ и $h \geq \dfrac{\pi}{n}$.

Пусть $0 \leqslant h \leqslant \dfrac{\pi}{n}$. Используя определение класса $W_m^{(r)}(\Phi)$ и первое из ограничений (25), для произвольного полинома $T_n \in S_{2n+1}$ имеем

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\Omega_m^{\frac{2}{m}}\left(T_n^{(r)},\tau\right)d\tau\right)^{\frac{m}{2}}\\ &\leqslant \left(\frac{4n^{2r/m}}{h^2}\|T_n\|^{\frac{2}{m}}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\int\limits_0^h (h-\tau)\left(1 - \frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)_* d\tau\right)^{\frac{m}{2}}\\ &= \left\{\frac{\pi^2}{\pi^2 - 2\pi\,\mathrm{Si}(\pi) + 4}\right\}^{\frac{m}{2}} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(1 - \frac{2\,\mathrm{Si}(nh)}{nh} + \frac{4\sin^2\dfrac{nh}{2}}{n^2h^2}\right)^{\frac{m}{2}} \leqslant \Phi(h).\end{aligned} \tag{28}$$

Пусть теперь $h \geq \dfrac{\pi}{n}$. Используя определение класса $W_m^{(r)}(\Phi)$, неравенство (23) и второе неравенство из ограничения (25), получаем

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\Omega_m^{\frac{2}{m}}\left(T_n^{(r)},\tau\right)d\tau\right)^{\frac{m}{2}} \leqslant \left(\frac{4n^{2r/m}}{h^2}\|T_n\|^{\frac{2}{m}}\right)^{\frac{m}{2}}\\ &\times\left(\int\limits_0^{\pi/n}\left(\frac{\pi}{n}-\tau\right)\left(1 - \frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)_* d\tau + \int\limits_{\pi/n}^h (h-\tau)d\tau\right)^{\frac{m}{2}}\\ &= \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 - 2\pi\,\mathrm{Si}(\pi) + 4}\right)^{\frac{m}{2}} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(1 - \frac{2\pi}{nh} + \frac{2\pi^2 - 2\pi\,\mathrm{Si}(\pi) + 4}{n^2h^2}\right)^{\frac{m}{2}} \leqslant \Phi(h).\end{aligned} \tag{29}$$

Неравенства (28) и (29) показывают, что $S_{2n+1} \subset W_m^{(r)}(\Phi)$. В силу определения бернштейновского n-поперечника и неравенств (4) запишем оценки снизу для рассматриваемых n-поперечников

$$\begin{aligned}\gamma_{2n}\left(W_m^{(r)}(\Phi); L_2\right) &\geq \gamma_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(\Phi; L_2\right)\\ &\geq b_{2n}\left(W_m^{(r)}(\Phi); L_2\right) \geq b_{2n}\left(S_{2n+1}; L_2\right)\\ &\geq \frac{\pi^m}{2^{\frac{m}{2}} n^r}\left\{\frac{1}{\pi^2 - 2\pi\,\mathrm{Si}(\pi) + 4}\right\}^{\frac{m}{2}} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).\end{aligned} \tag{30}$$

Сопоставляя оценки сверху (27) и оценки снизу (30), получаем требуемые равенства (26). Теорема 2.4 доказана. □

Теорема 2.5. *Если мажоранта $\Phi(h)$ при любом $0 < h \leqslant \dfrac{\pi}{n}$ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)} \geq \frac{\left(\int\limits_0^h (h-\tau)\left(1 - \dfrac{\sin n\tau}{n\tau}\right)_*^{\frac{mp}{2}} d\tau\right)^{\frac{1}{p}}}{2^{\frac{1}{p}}\left(\dfrac{1}{\pi^2}\int\limits_0^\pi \tau\left(1 - \dfrac{\sin\tau}{\pi - \tau}\right)^{\frac{mp}{2}} d\tau\right)^{\frac{1}{p}}}, \tag{31}$$

то для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства

$$\begin{aligned}\delta_{2n}\left(W_p^{(r)}(\Phi); L_2\right) &= \delta_{2n-1}\left(W_p^{(r)}(\Phi); L_2\right) = E_n\left(W_p^{(r)}(\Phi)\right)\\ &= \frac{1}{2^{\frac{m}{2}+\frac{1}{p}} n^r}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^\pi \tau\left(1 - \frac{\sin\tau}{\pi-\tau}\right)^{\frac{mp}{2}} d\tau\right)^{-\frac{1}{p}},\end{aligned} \tag{32}$$

где $\delta_n(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n-поперечников.

Доказательство. Будем использовать неравенство (19), записывая его в виде

$$E_{n-1}(f) \leqslant \frac{1}{2^{\frac{m}{2}+\frac{1}{p}} n^r}\left(\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\left(1 - \frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)^{\frac{mp}{2}} d\tau\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-\tau)\Omega_m^p\left(f^{(r)}, \tau\right) d\tau\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Полагая в этом неравенстве $h = \dfrac{\pi}{n}$, согласно определению класса $W_p^{(r)}(\Phi)$, имеем

$$E_{n-1}(f) \leqslant \frac{1}{2^{\frac{m}{2}+\frac{1}{p}} n^r}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^\pi \tau\left(1 - \frac{\sin\tau}{\pi-\tau}\right)^{\frac{mp}{2}} d\tau\right)^{-\frac{1}{p}} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{33}$$

Из неравенства (33) с учетом соотношения (4) между перечисленными выше n-поперечниками получим оценку сверху

$$\begin{aligned}\delta_{2n}\left(W_p^{(r)}(\Phi); L_2\right) &\leqslant \delta_{2n-1}\left(W_p^{(r)}(\Phi); L_2\right) \leqslant \pi_{2n-1}\left(W_p^{(r)}(\Phi); L_2\right) \leqslant E_n\left(W_p^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2}\\ &\leqslant \frac{1}{2^{\frac{m}{2}+\frac{1}{p}} n^r}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^\pi \tau\left(1 - \frac{\sin\tau}{\pi-\tau}\right)^{\frac{mp}{2}} d\tau\right)^{-\frac{1}{p}} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).\end{aligned} \tag{34}$$

С целью получения оценки снизу введем в рассмотрение $(2n+1)$-мерный шар полиномов

$$S_{2n+1}=\left\{T_n(x):\quad \|T_n\|\leqslant\frac{1}{2^{\frac{m}{2}+\frac{1}{p}}n^r}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi}\tau\left(1-\frac{\sin\tau}{\pi-\tau}\right)^{\frac{mp}{2}}d\tau\right)^{-\frac{1}{p}}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

и покажем его принадлежность классу $W_p^{(r)}(\Phi)$. Используя неравенство (23), докажем, что для произвольного $T_n(x)\in S_{2n+1}$ выполняется соотношение

$$\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-\tau)\Omega_m^p\left(T_n^{(r)},\tau\right)d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\Phi(h).$$

Действительно, согласно неравенству (23) и ограничению (31) на $\Phi(h)$, имеем

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-\tau)\Omega_m^p\left(T_n^{(r)},\tau\right)d\tau\right)^{\frac{1}{p}}&\leqslant\left(2^{\frac{mp}{2}}n^{pr}\int\limits_0^h(h-\tau)\left(1-\frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)_*^{\frac{mp}{2}}d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\|T_n\|\\&=2^{\frac{m}{2}}n^r\left(\int\limits_0^h(h-\tau)\left(1-\frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)_*^{\frac{mp}{2}}d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\\&\times\frac{\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2^{\frac{m}{2}+\frac{1}{p}}n^r\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi}\tau\left(1-\frac{\sin\tau}{\pi-\tau}\right)^{\frac{mp}{2}}d\tau\right)^{\frac{1}{p}}}\leqslant\Phi(h),\end{aligned}$$

а это значит, что $S_{2n+1}\in W_p^{(r)}(\Phi)$. Используя определение бернштейновского n-поперечника, запишем соответствующую оценку снизу

$$\begin{aligned}\delta_{2n}\left(W_p^{(r)}(\Phi);L_2\right)&\geq b_{2n}\left(W_p^{(r)}(\Phi);L_2\right)\geq b_{2n}\left(S_{2n+1};L_2\right)\\&\geq\frac{1}{2^{\frac{m}{2}+\frac{1}{p}}n^r}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi}\tau\left(1-\frac{\sin\tau}{\pi-\tau}\right)^{\frac{mp}{2}}d\tau\right)^{-\frac{1}{p}}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).\end{aligned}\tag{35}$$

Сравнивая соотношения (34) и (35), в силу неравенства (4) получаем требуемые равенства (32). □

Авторы благодарят рецензента за ценные советы и замечания, использованные в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э.А. Стороженко, В.Г. Кротов, П. Освальд. *Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах* $L_p, 0<p<1$ // Матем. сборник. **98(140)**, 395–415 (1975).
2. К.В. Руновский. *Прямая теорема о приближении "углом"в пространстве* L_p, $0<p<1$ // Матем. заметки. **52**:5, 93–96 (1992).
3. С.Б. Вакарчук. *Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из* L_2 // Матем. заметки. **78**:5, 792–796 (2005).
4. S.B. Vakarchuk, V.I. Zabutna. *Widths of function classes from* L_2 *and exact constants in Jackson type inequalities* // East J. Approx. **14**:4, 411–421 (2008).
5. С.Б. Вакарчук, В.И. Забутная. *Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в* L_2 *и поперечники функциональных классов* // Матем. заметки. **86**:3, 328–336 (2009).

6. М.Ш. Шабозов, Г.А. Юсупов. *Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2* // Сиб. матем. журн. **52**:6, 1414–1427 (2011).
7. М.Ш. Шабозов, С.С. Хоразмшоев. *Наилучшие полиномиальные приближения дифференцируемых периодических функций и значения поперечников классов функций, задаваемых обобщенными модулями непрерывности в L_2* // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. **1(142)**, 7–19 (2011).
8. С.Б. Вакарчук, В.И. Забутная. *Неравенство типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и оперечники функциональных классов в пространстве L_2* // Матем. заметки. **92**:4, 497–514 (2012).
9. Н.И. Черных. *О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2* // Матем. заметки. **2**:5, 513–522 (1967).
10. S. Focart, Yu. Kryakin, A. Shadrin. *On the exact constant in the Jacson – Stechkin inequality for the uniform metric* // Constr. Approx. **65**:6, 157–179 (1999).
11. К.К. Палавонов. *О наилучшем приближении периодических функций и значениях поперечников функциональных классов в L_2* //Изв. АН РТ. Отд. физ-мат., хим., геол. и тезн. н. **2(151)**, 40–50 (2013).
12. В.М. Тихомиров. *Некоторые вопросы теории приближений.* М.: МГУ. 1976.
13. G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya. *Inequalities.* Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1934.

Мухтор Рамазонович Лангаршоев,
Подмосковный колледж «Энергия»,
ул. Большая Московская, 190,
г. Старая Купавна, Россия
E-mail: mukhtor77@mail.ru

Саидджобир Саиднасиллоевич Хоразмшоев,
Таджикский технический университет,
ул. Академиков Раджабовых, 10,
г. Душанбе, Таджикистан
E-mail: skhorazmshoev@mail.ru