ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 1 (2021). С. 46-55.

УДК 517.972

О ВЗАИМОСВЯЗИ ВАРИАЦИОННЫХ СИММЕТРИЙ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ

С.А. БУДОЧКИНА

Аннотация. В работе изложен достаточно общий подход к выявлению взаимосвязи между симметриями B_u-потенциалов (вариационными симметриями) и алгебраическими структурами (Ли-допустимыми алгебрами и алгебрами Ли). Для этого в пространстве генераторов симметрий функционалов определены такие билинейные операции, как $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведение, $\mathcal{G}$-коммутатор, коммутатор. В первой части работы с целью полноты изложения приведены необходимые сведения о B_u-потенциальных операторах, инвариантных функционалах и вариационных симметриях. Во второй части получены условия, при которых $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведение, $\mathcal{G}$-коммутатор, коммутатор генераторов симметрий B_u-потенциалов также являются их генераторами симметрий. Доказано, что при выполнении некоторых условий $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведение превращает линейное пространство генераторов симметрий B_u-потенциалов в Ли-допустимую алгебру, а $\mathcal{G}$-коммутатор, коммутатор – в алгебру Ли. Как следствие, аналогичные результаты получены для генераторов симметрий потенциалов ($B_u \equiv I$ – тождественный оператор). Кроме того, установлена связь симметрий функционалов с алгебрами Ли в случае бипотенциальности их градиентов. Теоретические результаты проиллюстрированы примерами.

Ключевые слова: вариационная симметрия, генератор преобразования, Ли-допустимая алгебра, алгебра Ли, $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведение, $\mathcal{G}$-коммутатор, коммутатор.

Mathematics Subject Classification: 47G40, 70S10

1. Введение

Симметрии и первые интегралы играют важную роль в математике, механике, физике. После работы [1] широкий интерес к исследованию симметрийных свойств и нахождению законов сохранения связан с фундаментальными монографиями [2], [3]. Для решения задачи нахождения первых интегралов с помощью вариационных симметрий требуется исследовать вопрос о существовании функционала действия, т.е. решить обратную задачу вариационного исчисления, в том числе и для уравнений с непотенциальными операторами. Построению прямых и косвенных вариационных формулировок различных типов уравнений и их систем посвящены, например, работы [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]. В работах [13], [14] установлена связь симметрий эйлеровых и неэйлеровых функционалов с первыми интегралами соответствующих уравнений движения. Разработанные в [15], [16] методы исследования симметрийных свойств операторных уравнений со второй производной по времени позволяют находить их первые интегралы, причем и в случае непотенциальности операторов этих уравнений. В монографии [17] показано, что симметрии эйлеровых функционалов являются также симметриями соответствующих уравнений Эйлера-Лагранжа. В работах [18], [19] получены аналогичные результаты в общем случае для неэйлеровых функционалов, которым соответствуют уравнения с квазипотенциальными

S.A. Budochkina, On connection between variational symmetries and algebraic structures.

Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН и РФФИ (грант 19-08-00261а).

Поступила 15 апреля 2020 г.

операторами. Хорошо известна роль алгебраических структур, связанных с уравнениями движения, в механике конечномерных и бесконечномерных систем [6], [7], [17], [20], [21], [22], [23]. В работе [7] исследована инвариантность до дивергенции обобщенного действия по Пфаффу, получена формула для нахождения первых интегралов операторного уравнения Биркгофа и доказано, что генераторы дивергентных симметрий функционала образуют алгебру Ли относительно коммутатора. Эти исследования были продолжены в работах [13], [14], [18], [19]. Кроме того, в работе [24] получены условия, при которых $(\mathcal{S},\mathcal{T})$-произведение, $\mathcal{G}$-коммутатор, коммутатор генераторов симметрий операторных уравнений также являются их генераторами симметрий, и установлена связь симметрий операторных уравнений с Ли-допустимыми алгебрами и алгебрами Ли.

В связи с изложенным выше естественным образом возникает задача установления взаимосвязи вариационных симметрий с алгебраическими структурами (Ли-допустимыми алгебрами и алгебрами Ли). Этому и посвящена настоящая работа.

Ниже будем следовать обозначениям и терминологии работ [6], [19], [24].

2. Необходимые определения и теоремы

В дальнейшем нам потребуются следующие определения и теоремы.

Пусть U, V – линейные нормированные пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

Определение 2.1 ([6]). *Оператор $N : D(N) \subset U \to V$ называется B_u- потенциальным на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$, если существуют линейный оператор $B_u : D(B_u) \subset V \to V$ и дифференцируемый по Гато функционал $F_N : D(F_N) = D(N) \to \mathbb{R}$ такие, что*

$$\delta F_N[u,h] = \Phi(N(u), B_u h) \qquad \forall\ u \in D(N), \quad \forall\ h \in D(N'_u, B_u),$$

где $D(N'_u, B_u) = D(N'_u) \cap D(B_u)$.

Функционал F_N называется B_u-потенциалом оператора N, а N – B_u-градиентом функционала F_N.

Теорема 2.1 ([6]). *Пусть дифференцируемый по Гато оператор $N : D(N) \subset U \to V$ и билинейная форма $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ такие, что для любых фиксированных элементов $u \in D(N)$, $g, h \in D(N'_u, B_u)$ функция $\varepsilon \to \Phi(N(u+\varepsilon h), B_u g)$ является непрерывно дифференцируемой на отрезке [0,1]. Тогда для B_u-потенциальности оператора N в односвязной области $D(N)$ относительно рассматриваемой билинейной формы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\Phi(N'_u h, B_u g) + \Phi(N(u), B'_u(g;h)) = \Phi(N'_u g, B_u h) + \Phi(N(u), B'_u(h;g)) \tag{2.1}$$
$$\forall\ u \in D(N), \quad \forall\ g,h \in D(N'_u, B_u).$$

При этом B_u-потенциал F_N определяется формулой

$$F_N[u] = \int\limits_0^1 \Phi(N(\tilde u(\lambda)), B_{\tilde u(\lambda)}(u-u_0))\, d\lambda + F_N[u_0], \tag{2.2}$$

где $\tilde u(\lambda) = u_0 + \lambda(u-u_0)$, u_0 – фиксированный элемент из $D(N)$.

Если $B_u \equiv I$ – тождественный оператор, то функционал (2.2) принимает вид

$$F_N[u] = \int\limits_0^1 \Phi(N(\tilde u(\lambda)), u-u_0)\, d\lambda + F_N[u_0]. \tag{2.3}$$

Рассмотрим на $D(N)$ бесконечно малое преобразование, определяемое формулой

$$\overline{u} = u + \varepsilon S(u). \tag{2.4}$$

Оператор S называется генератором преобразования.

Определение 2.2 ([19]). *Функционал (2.2) называется инвариантным относительно преобразования (2.4), если*

$$F_N[u + \varepsilon S(u)] = F_N[u] + r(u, \varepsilon S(u)) \qquad \forall\ u \in D(N), \tag{2.5}$$

причем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{r(u, \varepsilon S(u))}{\varepsilon} = 0.$$

Отметим, что в этом случае преобразование (2.4) называется симметрией функционала (2.2), а оператор S – генератором симметрии. Симметрии функционалов называются также вариационными симметриями.

Определение 2.3 ([19]). *Оператор $N : D(N) \subset U \to V$ называется квази-B_u-потенциальным на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$, если существуют линейный оператор $B_u : D(B_u) \subset V \to V$, дифференцируемый по Гато функционал $F : D(F) = D(N) \to \mathbb{R}$ и плотность не-B_u-потенциальной силы $\Lambda(u)$ такие, что*

$$\delta F[u, h] + \Phi(\Lambda(u), B_u h) = \Phi(N(u), B_u h) \qquad \forall\ u \in D(N), \quad \forall\ h \in D(N'_u, B_u).$$

Пусть оператор N уравнения

$$N(u) = 0 \tag{2.6}$$

является квази-B_u-потенциальным на $D(N)$ относительно непрерывной невырожденной билинейной формы $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$.

Это означает, что оператор $\tilde{N} = N - \Lambda$ является B_u-потенциальным на $D(N)$ относительно Φ.

Тогда соответствующий функционал имеет вид

$$F[u] = \int_0^1 \Phi(\tilde{N}(\tilde{u}(\lambda)), B_{\tilde{u}(\lambda)}(u - u_0))\, d\lambda + F[u_0]. \tag{2.7}$$

Теорема 2.2 ([19]). *Преобразование (2.4) является симметрией функционала (2.7) на $D(N)$ тогда и только тогда, когда*

$$\Phi(\tilde{N}(u), B_u S(u)) = 0 \qquad \forall\ u \in D(N). \tag{2.8}$$

Следуя [6], обозначим через $A(U)$ линейное пространство операторов (с обычным определением операций сложения операторов и умножения на число из поля $\mathbb{R}$), отображающих U в U, и определим $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведение двух операторов

$$(S_1, S_2)(u) = S'_{1u} \mathcal{S}_u S_2(u) - S'_{2u} \mathcal{T}_u S_1(u), \tag{2.9}$$

$\mathcal{G}$-коммутатор

$$[S_1, S_2]_{\mathcal{G}}(u) = S'_{1u} \mathcal{G}_u S_2(u) - S'_{2u} \mathcal{G}_u S_1(u) \tag{2.10}$$

и коммутатор

$$[S_1, S_2](u) = S'_{1u} S_2(u) - S'_{2u} S_1(u). \tag{2.11}$$

В [6] доказано, что линейное пространство $A(U)$ является алгеброй над полем $\mathbb{R}$ относительно $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведения. Эта алгебра обозначена через $\langle A(U); (\mathcal{S}, \mathcal{T}) \rangle$.

Теорема 2.3 ([6]). *Если линейные операторы* $\mathcal{S}_u : U \to U$ *и* $\mathcal{T}_u : U \to U$ *такие, что выполняется условие*

$$\tilde{\mathcal{G}}'_u(v; \tilde{\mathcal{G}}_u h) = \tilde{\mathcal{G}}'_u(h; \tilde{\mathcal{G}}_u v) \qquad \forall\ h, u, v \in U,$$

где $\tilde{\mathcal{G}}_u \equiv \mathcal{S}_u + \mathcal{T}_u$, *то алгебра* $\langle A(U); (\mathcal{S}, \mathcal{T})\rangle$ *является Ли-допустимой алгеброй.*

3. Вариационные симметрии и Ли-допустимые алгебры

Теорема 3.1. *Если* S_1, S_2 *– генераторы симметрий функционала (2.7), существуют операторы* $\mathcal{S}_u, \mathcal{T}_u : D(N'_u, B_u) \to D(N'_u, B_u)$ *такие, что* $\forall\ u \in D(N)$, $\forall\ h, v \in D(N'_u, B_u)$ *выполнено условие*

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{S}_u h, B_u v) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(v; \mathcal{S}_u h)) = \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{T}_u v, B_u h) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(h; \mathcal{T}_u v)), \tag{3.1}$$

то $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$*-произведение (2.9) также является генератором симметрии этого функционала.*

Доказательство. Имеем

$$\Phi(\tilde{N}(u + \varepsilon \mathcal{T}_u S_1(u)), B_{u+\varepsilon \mathcal{T}_u S_1(u)} S_2(u + \varepsilon \mathcal{T}_u S_1(u))) = 0 \qquad \forall\ u \in D(N),$$

или

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{T}_u S_1(u), B_u S_2(u)) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(S_2(u); \mathcal{T}_u S_1(u))) + \Phi(\tilde{N}(u), B_u S'_{2u} \mathcal{T}_u S_1(u)) = 0.$$

Аналогично

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{S}_u S_2(u), B_u S_1(u)) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(S_1(u); \mathcal{S}_u S_2(u))) + \Phi(\tilde{N}(u), B_u S'_{1u} \mathcal{S}_u S_2(u)) = 0.$$

Вычитая из второго равенства первое и учитывая условие (3.1), получаем

$$\Phi(\tilde{N}(u), B_u(S_1, S_2)(u)) = 0.$$

Таким образом, $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведение (2.9) также является генератором симметрии функционала (2.7) (см. теорему 2.2). □

Теорема 3.2. *Если* S_1, S_2 *– генераторы симметрий функционала (2.7), существуют операторы* $\mathcal{S}_u, \mathcal{T}_u : D(N'_u, B_u) \to D(N'_u, B_u)$ *такие, что* $\forall\ u \in D(N)$, $\forall\ h, v \in D(N'_u, B_u)$ *выполнены условия*

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{S}_u h, B_u v) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(v; \mathcal{S}_u h)) = \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{T}_u v, B_u h) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(h; \mathcal{T}_u v)), \tag{3.2}$$

$$\tilde{\mathcal{G}}'_u(v; \tilde{\mathcal{G}}_u h) = \tilde{\mathcal{G}}'_u(h; \tilde{\mathcal{G}}_u v), \tag{3.3}$$

где $\tilde{\mathcal{G}}_u \equiv \mathcal{S}_u + \mathcal{T}_u$, *то генераторы симметрий функционала (2.7) образуют Ли-допустимую алгебру относительно* $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$*-произведения (2.9).*

Доказательство. Это следует из теорем 3.1 и 2.3. □

Пусть $B_u \equiv I$ – тождественный оператор. В этом случае функционал (2.7) принимает вид

$$F[u] = \int_0^1 \Phi(\tilde{N}(\tilde{u}(\lambda)), u - u_0)\, d\lambda + F[u_0], \tag{3.4}$$

а теоремы 3.1 и 3.2 формулируются следующим образом.

Теорема 3.3. *Если S_1, S_2 – генераторы симметрий функционала (3.4), существуют операторы $\mathcal{S}_u, \mathcal{T}_u : D(N'_u) \to D(N'_u)$ такие, что $\forall\ u \in D(N)$, $\forall\ h, v \in D(N'_u)$ выполнено условие*

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{S}_u h, v) = \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{T}_u v, h), \tag{3.5}$$

то $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведение (2.9) также является генератором симметрии этого функционала.

Теорема 3.4. *Если S_1, S_2 – генераторы симметрий функционала (3.4), существуют операторы $\mathcal{S}_u, \mathcal{T}_u : D(N'_u) \to D(N'_u)$ такие, что $\forall\ u \in D(N)$, $\forall\ h, v \in D(N'_u)$ выполнены условия*

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{S}_u h, v) = \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{T}_u v, h), \tag{3.6}$$

$$\tilde{\mathcal{G}}'_u(v; \tilde{\mathcal{G}}_u h) = \tilde{\mathcal{G}}'_u(h; \tilde{\mathcal{G}}_u v), \tag{3.7}$$

где $\tilde{\mathcal{G}}_u \equiv \mathcal{S}_u + \mathcal{T}_u$, то генераторы симметрий функционала (3.4) образуют Ли-допустимую алгебру относительно $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведения (2.9).

4. Вариационные симметрии и алгебры Ли

Теорема 4.1. *Если S_1, S_2 – генераторы симметрий функционала (2.7), существует оператор $\mathcal{G}_u : D(N'_u, B_u) \to D(N'_u, B_u)$ такой, что $\forall\ u \in D(N)$, $\forall\ h, v \in D(N'_u, B_u)$ выполнено условие*

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u h, B_u v) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(v; \mathcal{G}_u h)) = \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u v, B_u h) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(h; \mathcal{G}_u v)), \tag{4.1}$$

то $\mathcal{G}$-коммутатор (2.10) также является генератором симметрии этого функционала.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1 при $\mathcal{G}_u \equiv \mathcal{S}_u = \mathcal{T}_u$.

Теорема 4.2. *Если S_1, S_2 – генераторы симметрий функционала (2.7), существует оператор $\mathcal{G}_u : D(N'_u, B_u) \to D(N'_u, B_u)$ такой, что $\forall\ u \in D(N)$, $\forall\ h, v \in D(N'_u, B_u)$ выполнены условия*

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u h, B_u v) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(v; \mathcal{G}_u h)) = \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u v, B_u h) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_u(h; \mathcal{G}_u v)), \tag{4.2}$$

$$\mathcal{G}'_u(v; \mathcal{G}_u h) = \mathcal{G}'_u(h; \mathcal{G}_u v), \tag{4.3}$$

то генераторы симметрий функционала (2.7) образуют алгебру Ли относительно $\mathcal{G}$-коммутатора (2.10).

Доказательство. Это следует из теорем 4.1 и 2.3. □

Теорема 4.3. *Если оператор N уравнения (2.6) является квази-B_{iu}-потенциальным $(i = 1, 2)$ на $D(N)$ относительно непрерывной невырожденной билинейной формы $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$, то есть оператор $\tilde{N} = N - \Lambda$ является бипотенциальным, S_1, S_2 – генераторы симметрий функционала (2.7) при $B_u = B_{1u}$, $\exists\ B_{1u}^{-1}$ и $\forall\ u \in D(N)$, $\forall\ h, v \in D(N'_u, B_{1u}, B_{2u})$ выполняется условие*

$$\Phi(\tilde{N}(u), B_{1u}\mathcal{G}'_u(v; h) - B_{1u}\mathcal{G}'_u(h; v)) = 0, \tag{4.4}$$

где $\mathcal{G}_u = B_{1u}^{-1} B_{2u}$, то $\mathcal{G}$-коммутатор (2.10) также является генератором симметрии функционала (2.7). Если, кроме того, $\forall\ u \in D(N)$, $\forall\ h, v \in D(N'_u, B_{1u}, B_{2u})$

$$\mathcal{G}'_u(v; \mathcal{G}_u h) = \mathcal{G}'_u(h; \mathcal{G}_u v), \tag{4.5}$$

то генераторы симметрий функционала (2.7) образуют алгебру Ли относительно $\mathcal{G}$-коммутатора (2.10).

Доказательство. По формуле (2.1) получаем

$$\begin{aligned}
\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u h, B_{1u} v) + \Phi(\tilde{N}(u), & B'_{1u}(v; \mathcal{G}_u h)) = \Phi(\tilde{N}'_u v, B_{1u}\mathcal{G}_u h) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(\mathcal{G}_u h; v)) \\
&= \Phi(\tilde{N}'_u v, B_{2u} h) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(\mathcal{G}_u h; v)) \\
&= \Phi(\tilde{N}'_u h, B_{2u} v) - \Phi(\tilde{N}(u), B'_{2u}(h; v)) \\
&\quad + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{2u}(v; h)) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(\mathcal{G}_u h; v)) \\
&= \Phi(\tilde{N}'_u h, B_{1u}\mathcal{G}_u v) - \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(\mathcal{G}_u h; v)) \\
&\quad - \Phi(\tilde{N}(u), B_{1u}\mathcal{G}'_u(h; v)) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(\mathcal{G}_u v; h)) \\
&\quad + \Phi(\tilde{N}(u), B_{1u}\mathcal{G}'_u(v; h)) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(\mathcal{G}_u h; v)) \\
&= \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u v, B_{1u} h) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(h; \mathcal{G}_u v)) \\
&\quad - \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(\mathcal{G}_u v; h)) - \Phi(\tilde{N}(u), B_{1u}\mathcal{G}'_u(h; v)) \\
&\quad + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(\mathcal{G}_u v; h)) + \Phi(\tilde{N}(u), B_{1u}\mathcal{G}'_u(v; h)) \\
&= \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u v, B_{1u} h) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(h; \mathcal{G}_u v)) \\
&\quad + \Phi(\tilde{N}(u), B_{1u}\mathcal{G}'_u(v; h)) - \Phi(\tilde{N}(u), B_{1u}\mathcal{G}'_u(h; v)).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

С учетом условия (4.4) равенство (4.6) примет вид

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u h, B_{1u} v) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(v; \mathcal{G}_u h)) = \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u v, B_{1u} h) + \Phi(\tilde{N}(u), B'_{1u}(h; \mathcal{G}_u v)).$$

Следовательно, условие (4.1) выполнено, поэтому по теореме 4.1 $\mathcal{G}$-коммутатор (2.10) является генератором симметрии функционала (2.7). Если, кроме того, выполнено условие (4.5), то по теореме 4.2 генераторы симметрий функционала (2.7) образуют алгебру Ли относительно $\mathcal{G}$-коммутатора (2.10). □

Теорема 4.4. *Если S_1, S_2 – генераторы симметрий функционала (2.7), то их коммутатор (2.11) также является генератором симметрии этого функционала.*

Доказательство. Это следует из теоремы 4.1. Отметим, что $\mathcal{G}_u \equiv I$, где I – тождественный оператор, поэтому условие (4.1) выполняется, так как в данном случае оно является условием квази-B_u-потенциальности оператора N уравнения (2.6). □

Теорема 4.5. *Генераторы симметрий функционала (2.7) образуют алгебру Ли относительно операции (2.11).*

Доказательство. Это следует из теорем 4.2 и 4.4. В данном случае $\mathcal{G}'_u$ есть нулевой оператор, поэтому условие (4.3) выполняется тождественно. □

Таким образом, в определенных случаях теоремы 3.1, 4.1 и 4.4 могут быть использованы для построения симметрий функционала (2.7) по известным хотя бы двум генераторам симметрий.

Пусть $B_u \equiv I$ – тождественный оператор. В этом случае функционал (2.7) принимает вид (3.4), а теоремы 4.1, 4.2, 4.4, 4.5 формулируются следующим образом.

Теорема 4.6. *Если S_1, S_2 – генераторы симметрий функционала (3.4), существует оператор $\mathcal{G}_u : D(N'_u) \to D(N'_u)$ такой, что $\forall\ u \in D(N)$, $\forall\ h, v \in D(N'_u)$ выполнено условие*

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u h, v) = \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u v, h), \tag{4.7}$$

то $\mathcal{G}$-коммутатор (2.10) также является генератором симметрии этого функционала.

Теорема 4.7. *Если S_1, S_2 – генераторы симметрий функционала (3.4), существует оператор $\mathcal{G}_u : D(N'_u) \to D(N'_u)$ такой, что $\forall\, u \in D(N)$, $\forall\, h, v \in D(N'_u)$ выполнены условия*

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u h, v) = \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{G}_u v, h), \tag{4.8}$$

$$\mathcal{G}'_u(v; \mathcal{G}_u h) = \mathcal{G}'_u(h; \mathcal{G}_u v), \tag{4.9}$$

то генераторы симметрий функционала (3.4) образуют алгебру Ли относительно $\mathcal{G}$-коммутатора (2.10).

Теорема 4.8. *Если S_1, S_2 – генераторы симметрий функционала (3.4), то их коммутатор (2.11) также является генератором симметрии этого функционала.*

Теорема 4.9. *Генераторы симметрий функционала (3.4) образуют алгебру Ли относительно операции (2.11).*

5. Примеры

1. Рассмотрим уравнение

$$N(u) \equiv u_{tt} - u_{xx} + u_x = 0, \qquad (x,t) \in \mathcal{Q} = (a,b) \times (t_0, t_1). \tag{5.1}$$

Положим

$$\begin{aligned} D(N) = \big\{ u \in U = C^\infty(\overline{\mathcal{Q}}) : \quad & u|_{t=t_0} = \varphi_1(x), \quad u|_{t=t_1} = \varphi_2(x) \qquad (x \in (a,b)), \\ u|_{x=a} = \psi_1(t), \quad & u|_{x=b} = \psi_2(t) \qquad (t \in (t_0, t_1)) \big\}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где $\varphi_i \in C[a,b]$, $\psi_i \in C[t_0, t_1]$, $i = 1, 2$. Отметим, что оператор N из (5.1) является квазипотенциальным на множестве $D(N)$ (5.2) относительно классической билинейной формы

$$\Phi(v, g) = \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b v(x,t) g(x,t)\, dx dt.$$

В данном случае

$$\tilde{N}(u) = u_{tt} - u_{xx}, \qquad \Lambda(u) = u_x.$$

Соответствующий функционал имеет вид

$$F[u] = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \left(u_t^2 - u_x^2 \right) dx dt. \tag{5.3}$$

Будем предполагать, что $u_x \in D(N'_u)$ и $u_t \in D(N'_u)$.

Операторы $S_1 = D_x$ и $S_2 = D_t$ являются генераторами симметрий функционала (5.3). Это следует из теоремы 2.2 при $B_u \equiv I$ – тождественный оператор, так как

$$\begin{aligned} \Phi(\tilde{N}(u), S_1(u)) &= \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b (u_{tt} - u_{xx})\, u_x dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \left(-u_t u_{tx} - \frac{1}{2} D_x \left(u_x^2 \right) \right) dx dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \left(-\frac{1}{2} D_x \left(u_t^2 \right) - \frac{1}{2} D_x \left(u_x^2 \right) \right) dx dt = 0 \end{aligned}$$

и

$$\Phi(\tilde{N}(u), S_2(u)) = \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b (u_{tt} - u_{xx})\, u_t dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \left(\frac{1}{2} D_t \left(u_t^2 \right) + u_x u_{tx} \right) dx dt$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_a^b \left(\frac{1}{2} D_t \left(u_t^2 \right) + \frac{1}{2} D_t \left(u_x^2 \right) \right) dx dt = 0.$$

Предположим также, что

$$\frac{\partial^{i+1} u}{\partial t \partial x^i} \in D(N'_u), \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Условие (3.5) выполняется при $\mathcal{S}_u \equiv \mathcal{S} = D_x$ и $\mathcal{T}_u \equiv \mathcal{T} = -D_x$. Действительно,

$$\Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{S} h, v) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_a^b \left(D_{tt} - D_{xx} \right) h_x \cdot v dx dt$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_a^b \left(h_{ttx} - h_{xxx} \right) v dx dt = - \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_a^b \left(v_{ttx} - v_{xxx} \right) h dx dt$$

$$= - \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_a^b \left(D_{tt} - D_{xx} \right) v_x \cdot h dx dt = \Phi(\tilde{N}'_u \mathcal{T} v, h).$$

Тогда по теореме 3.3 $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведение генераторов S_1 и S_2

$$(S_1, S_2)(u) = S'_{1u} \mathcal{S} S_2(u) - S'_{2u} \mathcal{T} S_1(u) = D_x D_x u_t - D_t(-D_x) u_x = 2 u_{txx}$$

является генератором симметрии функционала (5.3).

В данном случае $\tilde{\mathcal{G}}_u \equiv \mathcal{S} + \mathcal{T} = D_x - D_x = 0$, поэтому условие (3.7) также выполнено. По теореме 3.4 генераторы симметрий функционала (5.3) образуют Ли-допустимую алгебру относительно $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-произведения

$$(S_1, S_2)(u) = S'_{1u} D_x S_2(u) + S'_{2u} D_x S_1(u).$$

2. Рассмотрим уравнение

$$N(u) \equiv u_t + u u_{xx} + u_x^2 = 0, \qquad (x, t) \in \mathcal{Q} = (a, b) \times (t_0, t_1). \tag{5.4}$$

Положим

$$\begin{aligned} D(N) = \big\{ u \in U = C^\infty(\overline{\mathcal{Q}}) : \quad & u|_{t=t_0} = \varphi_1(x), \quad u|_{t=t_1} = \varphi_2(x) \qquad (x \in (a, b)), \\ u|_{x=a} = 0, \quad u|_{x=b} = 0 \big\}, & \end{aligned} \tag{5.5}$$

где $\varphi_i \in C[a, b], \quad i = 1, 2.$

Отметим, что оператор N вида (5.4) является квази-B_{1u}-потенциальным на множестве $D(N)$ (5.5) относительно классической билинейной формы

$$\Phi(v, g) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_a^b v(x, t) g(x, t) dx dt. \tag{5.6}$$

В данном случае

$$\tilde{N}(u) = u u_{xx} + u_x^2, \qquad \Lambda(u) = u_t, \qquad B_{1u} \equiv B_1 = D_x^{-1} D_x^{-1}, \tag{5.7}$$

где

$$D_x^{-1} v(x, t) = \int\limits_a^x v(y, t) dy.$$

Соответствующий функционал имеет вид

$$F[u] = \frac{1}{6} \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b u^3 dxdt. \tag{5.8}$$

Оператор $\tilde{N}$ вида (5.7) является B_{2u}-потенциальным на множестве $D(N)$ (5.5) относительно билинейной формы (5.6), где $B_{2u} = uI$, I – тождественный оператор. Таким образом, оператор N (5.4) является квази-B_{iu}-потенциальным $(i = 1, 2)$ на $D(N)$ (5.5) относительно билинейной формы (5.6).

Операторы $S_1 = D_x$ и $S_2(u) = uu_x$ являются генераторами симметрий функционала (5.8). Это следует из теоремы 2.2, так как

$$\begin{aligned}\Phi(\tilde{N}(u), B_1 S_1(u)) = &\int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \left(uu_{xx} + u_x^2\right) D_x^{-1} D_x^{-1} u_x dxdt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b D_{xx} u^2 \cdot D_x^{-1} D_x^{-1} u_x dxdt \\ =&\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b u^2 u_x dxdt = \frac{1}{6} \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b D_x u^3 dxdt = 0\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\Phi(\tilde{N}(u), B_1 S_2(u)) = &\int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \left(uu_{xx} + u_x^2\right) D_x^{-1} D_x^{-1} \left(uu_x\right) dxdt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b D_{xx} u^2 \cdot D_x^{-1} D_x^{-1} \left(uu_x\right) dxdt \\ =&\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b u^3 u_x dxdt = \frac{1}{8} \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b D_x u^4 dxdt = 0.\end{aligned}$$

Условие (4.4) выполняется, так как

$$\mathcal{G}_u v = D_{xx}\left(uv\right), \qquad \mathcal{G}'_u(v; h) = D_{xx}\left(vh\right)$$

и

$$B_{1u} \mathcal{G}'_u(v; h) - B_{1u} \mathcal{G}'_u(h; v) = D_x^{-1} D_x^{-1} \left(D_{xx}\left(vh\right)\right) - D_x^{-1} D_x^{-1} \left(D_{xx}\left(hv\right)\right) = vh - hv = 0.$$

Тогда по теореме 4.3 $\mathcal{G}$-коммутатор

$$\begin{aligned}[S_1, S_2]_{\mathcal{G}}(u) =&S'_{1u} \mathcal{G}_u S_2(u) - S'_{2u} \mathcal{G}_u S_1(u) \\ =&D_x D_{xx}\left(u^2 u_x\right) - \left(u_x I + u D_x\right) D_{xx}\left(uu_x\right) \\ =&9u_{xx} u_x^2 + 3uu_x u_{xxx} + 3uu_{xx}^2\end{aligned}$$

является генератором симметрии функционала (5.8).

Заметим, что условие (4.5) в данном случае не выполняется, так как

$$\mathcal{G}'_u(v; \mathcal{G}_u h) = D_{xx}\left(v D_{xx}\left(uh\right)\right), \qquad \mathcal{G}'_u(h; \mathcal{G}_u v) = D_{xx}\left(h D_{xx}\left(uv\right)\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э. Нетер. *Инвариантные вариационные задачи.* Вариационные принципы механики, под ред. Полака Л.С. М.: Физматгиз. 1959.
2. Л.В. Овсянников. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука. 1978.
3. Н.Х. Ибрагимов. *Группы преобразований в математической физике.* М.: Наука. 1983.
4. E. Tonti. *A general solution of the inverse problem of the calculus of variations* // Hadronic Journal. **5**, 1404–1450 (1982).

5. В.М. Филиппов, В.М. Савчин, С.Г. Шорохов. *Вариационные принципы для непотенциальных операторов* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. **40**. М.: ВИНИТИ, 3–176 (1992).
6. В.М. Савчин. *Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем.* М.: Изд-во УДН. 1991.
7. V.M. Savchin. *An operator approach to Birkhoff's equations* // Вестник РУДН. Сер. Математика. **2**:2, 111–123 (1995).
8. А.М. Попов. *Условия потенциальности дифференциально-разностных уравнений* // Дифференц. уравнения. **34**:3, 422–424 (1998).
9. А.М. Попов. *Условия потенциальности Гельмгольца для систем дифференциально-разностных уравнений* // Матем. заметки. **64**:3, 437–442 (1998).
10. В.М. Филиппов, В.М. Савчин, С.А. Будочкина. *О существовании вариационных принципов для эволюционных дифференциально-разностных уравнений* // Тр. МИАН. **283**, 25–39 (2013).
11. M.I. Tleubergenov, D.T. Azhymbaev. *Stochastical problem of Helmholtz for Birkhoff systems* // Вестник Карагандинского университета. Серия «Математика». **93**:1, 78–87 (2019).
12. M.I. Tleubergenov, G.T. Ibraeva. *On the solvability of the main inverse problem for stochastic differential systems* // Ukr. Math. J. **71**:1, 157–165 (2019).
13. В.М. Савчин, С.А. Будочкина. *Симметрии и первые интегралы в механике бесконечномерных систем* // Доклады Академии наук. **425**:2, 169–171 (2009).
14. С.А. Будочкина, В.М. Савчин. *Вариационные симметрии эйлеровых и неэйлеровых функционалов* // Дифференц. уравнения. **47**:6, 811–818 (2011).
15. В.М. Савчин, С.А. Будочкина. *Об одной прямой задаче механики бесконечномерных диссипативных систем* // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». **3**, 22–30 (2008).
16. S.A. Budochkina. *Symmetries and first integrals of a second order evolutionary operator equation* // Eurasian Math. J. **3**:1, 18–28 (2012).
17. P.J. Olver. *Applications of Lie groups to differential equations.* Springer, New York (2000).
18. В.М. Савчин, С.А. Будочкина. *О взаимосвязи симметрий функционалов и уравнений* // Доклады Академии наук. **458**:2, 148–149 (2014).
19. В.М. Савчин, С.А. Будочкина. *Об инвариантности функционалов и соответствующих им уравнений Эйлера-Лагранжа* // Изв. вузов. Матем. **2**, 58–64 (2017).
20. А.В. Борисов, И.С. Мамаев. *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике.* Ижевск: Удмуртский университет: Редакция журнала «Регулярная и хаотическая динамика». 1999.
21. В.В. Козлов. *Общая теория вихрей*, 2-е изд., испр. и доп. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2013.
22. В.М. Савчин. *Об одной структуре Ли-допустимой алгебры в пространстве дифференцируемых по Гато операторов* // Матем. заметки. **55**:1, 152–153 (1994).
23. R.M. Santilli. *Introduction to the Lie-admissible treatment of non-potential interactions in Newtonian, statistical and particle mechanics* // Hadronic Journal. **5**, 264–359 (1982).
24. В.М. Савчин, С.А. Будочкина. *Ли-допустимые алгебры, связанные с динамическими системами* // Сиб. матем. журн. **60**:3, 655–663 (2019).

Светлана Александровна Будочкина,
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, 6,
117198, г. Москва, Россия
E-mail: `budochkina-sa@rudn.ru`