ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 1 (2021). С. 86-98.

УДК 517.2; 519.64

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Э.Г. ХАЛИЛОВ, М.Н. БАХШАЛЫЕВА

Аннотация. Одним из методов решения внешних краевых задач является ее приведение к интегральному уравнению. Основное преимущество применения метода интегральных уравнений к исследованию внешних краевых задач заключается в том, что подобный подход позволяет свести задачу, поставленную для неограниченной области, к задаче для ограниченной области меньшей размерности. В работе исследуется приближенное решение интегрального уравнения, к которому сводится смешанная краевая задача для уравнения Лапласа. Разыскивая решение смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в виде комбинации логарифмических потенциалов простого и двойного слоев, смешанная краевая задача для уравнения Лапласа приводится интегральному уравнению, зависящему не только от операторов, порожденных логарифмическими потенциалами, но и от композиции таких операторов. Доказывается, что полученное интегральное уравнение имеет единственное решение в пространстве непрерывных функций.

Так как интегральные уравнения в замкнутом виде решаются лишь в очень редких случаях, первостепенное значение приобретает разработка приближенных методов решения интегральных уравнений с соответствующим теоретическим обоснованием. Поэтому, разбивая кривую на элементарные части, в определенно выбранных опорных точках построены квадратурные формулы для одного класса криволинейных интегралов и для композиции интегралов, порожденных логарифмическими потенциалами, а также оценены погрешности этих квадратурных формул. Пользуясь этими квадратурными формулами, полученное интегральное уравнение заменяется системой алгебраических уравнений. Затем с помощью теоремы Г.М. Вайникко о сходимости для линейных операторных уравнений устанавливается существование и единственность решения этой системы. Доказывается сходимость решения полученной системы алгебраических уравнений к значению в опорных точках точного решения интегрального уравнения. Кроме того, в работе указывается скорость сходимости метода. В результате, построена последовательность, сходящаяся к решению смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа с известной скоростью сходимости.

Ключевые слова: криволинейный интеграл, метод интегральных уравнений, метод коллокации, смешанная краевая задача, уравнение Лапласа.

Mathematics Subject Classification: 45E05, 31B10

1. Введение и постановка задачи

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей L.

E.H. Khalilov, M.N. Bakhshaliyeva, Study of approximate solution to integral equation associated with mixed boundary value problem for Laplace equation.

Поступила 6 мая 2020 г.

Рассмотрим смешанную краевую задачу для уравнения Лапласа: найти функцию $u \in C^{(2)}\left(\mathbb{R}^2 \backslash \bar{D}\right) \bigcap C\left(\mathbb{R}^2 \backslash D\right)$, обладающую нормальной производной в смысле равномерной сходимости, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в $\mathbb{R}^2 \backslash \bar{D}$, условию излучения Зоммерфельда

$$\left(\frac{x}{|x|}, \operatorname{grad} u\left(x\right)\right) = o\left(\frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}}\right), \quad x \to \infty,$$

равномерно по всем направлениям $x/|x|$ и граничному условию

$$\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial \vec{n}\left(x\right)} + \lambda u\left(x\right) = f\left(x\right) \quad \text{на} \quad L,$$

где $\vec{n}\left(x\right)$ – единичная внешняя нормаль в точке $x \in L$, λ – заданное число, а f – заданная непрерывная функция на L. Одним из методов решения смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа является ее приведение к интегральному уравнению. Известно, что основное преимущество применения метода интегральных уравнений к исследованию внешних краевых задач заключается в том, что подобный подход позволяет свести задачу, поставленную для неограниченной области, к задаче для ограниченной области меньшей размерности.

Пусть $\Phi(x, y)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа, $v\left(x, \rho\right)$ – логарифмический потенциал простого слоя, а $w\left(x, \rho\right)$ – логарифмический потенциал двойного слоя, т.е.

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}, \qquad x, y \in \mathbb{R}^2, \qquad x \neq y,$$

$$v\left(x, \rho\right) = \int_L \Phi\left(x, y\right) \rho\left(y\right) dL_y, \qquad w\left(x, \rho\right) = \int_L \frac{\partial \Phi\left(x, y\right)}{\partial \vec{n}\left(y\right)} \rho\left(y\right) \, dL_y.$$

Очевидно, что при этом

$$w\left(x, v\right) = \int_L \frac{\partial \Phi\left(x, y\right)}{\partial \vec{n}\left(y\right)} \left(\int_L \Phi\left(y, t\right) \rho\left(t\right) dL_t\right) dL_y, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Принимая во внимание предельные значения логарифмических потенциалов и поступая точно также, как и в работе [1], нетрудно показать, что функция

$$u\left(x\right) = v\left(x, \rho\right) + i\mu w\left(x, v\right), \qquad x \in \mathbb{R}^2 \backslash \bar{D},$$

где $\mu \neq 0$ – произвольное действительное число, является решением смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа, если плотность ρ является решением однозначно разрешимого интегрального уравнения

$$\rho + A\rho = \varphi, \tag{1.1}$$

где

$$A = -\left(2 + i\mu\right)^{-1} \left(2\tilde{K} + 4i\mu R + \lambda\left(2 + i\mu\right) S + 4i\lambda\mu Q\right),$$

$$\varphi = -4\left(2 + i\mu\right)^{-1} f,$$

$$\left(S\rho\right)\left(x\right) = 2 \int_L \Phi\left(x, y\right) \rho\left(y\right) \, dL_y, \qquad x \in L,$$

$$(\tilde{K}\rho)\left(x\right) = 2 \int_L \frac{\partial \Phi\left(x, y\right)}{\partial \vec{n}\left(x\right)} \rho\left(y\right) \, dL_y, \qquad x \in L,$$

$$\left(Q\rho\right)\left(x\right) = \int_L \frac{\partial \Phi\left(x, y\right)}{\partial \vec{n}\left(y\right)} \left(\int_L \Phi\left(y, t\right) \rho\left(t\right) dL_t\right) dL_y, \qquad x \in L,$$

$$(R\rho)(x) = \int_L \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\vec{n}(x)} \left(\int_L \frac{\partial\Phi(y,t)}{\partial\vec{n}(y)} \rho(t)\, dL_t \right) dL_y, \qquad x \in L.$$

Так как интегральные уравнения в замкнутом виде решаются лишь в очень редких случаях, первостепенное значение приобретает разработка приближенных методов решения интегральных уравнений с соответствующим теоретическим обоснованием. Отметим, что целый ряд работ [2]–[5] посвящен исследованию приближенных решений интегральных уравнений различных краевых задач. Однако, до сих пор не исследовано приближенное решение интегрального уравнения (1.1), к которому сводится смешанная краевая задача для уравнения Лапласа, чему и посвящена настоящая заметка.

2. Построение квадратурной формулы

Предположим, что кривая L задана параметрическим уравнением $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in [a,b]$. Разобьем промежуток $[a,b]$ на

$$n > 2M_1 \frac{b-a}{d}$$

равных частей:

$$t_k = a + \frac{(b-a)\,k}{n}, \qquad k = \overline{0,n},$$

где

$$M_1 = \max_{t\in[a,b]} \sqrt{\left(x_1'(t)\right)^2 + \left(x_2'(t)\right)^2} < +\infty$$

[6, Гл. VI] и d – стандартный радиус [6, Гл. I], [7, Гл. V]. В качестве опорных точек возьмем $x(\tau_k)$, $k = \overline{1,n}$, где

$$\tau_k = a + \frac{(b-a)(2k-1)}{2n}.$$

Тогда кривая L разбивается на элементарные части: $L = \bigcup_{l=1}^{n} L_l$, где

$$L_k = \{x(t) : \quad t_{k-1} \le t \le t_k\}.$$

Известно, что [8]

(1) для любого $k \in \{1,2,\dots,n\}$ имеет место $r_k(n) \sim R_k(n)^1$, где

$$r_k(n) = \min\{|x(\tau_k) - x(t_{k-1})|, |x(t_k) - x(\tau_k)|\},$$
$$R_k(n) = \max\{|x(\tau_k) - x(t_{k-1})|, |x(t_k) - x(\tau_k)|\};$$

(2) для любого $k \in \{1,2,\dots,n\}$ выполняется $R_k(n) \le \frac{d}{2}$;

(3) для любых $k, j \in \{1,2,\dots,n\}$ имеет место $r_j(n) \sim r_k(n)$;

(4) $r(n) \sim R(n) \sim \frac{1}{n}$, где

$$R(n) = \max_{k=\overline{1,n}} R_k(n), \; r(n) = \min_{k=\overline{1,n}} r_k(n).$$

Лемма 2.1. [3],[9]. *Существуют такие постоянные $C_0' > 0$ и $C_1' > 0$, независящие от n, для которых при любых $k, j \in \{1,2,\dots,n\}$, $j \ne k$ и $y \in L_j$ справедливо следующее неравенство:*

$$C_0' |y - x(\tau_k)| \le |x(\tau_j) - x(\tau_k)| \le C_1' |y - x(\tau_k)|.$$

[1] $a(n) \sim b(n)$ означает, что $C_1 \le \frac{a(n)}{b(n)} \le C_2$, где C_1 и C_2 положительные постоянные, не зависящие от n.

Для функции $\varphi(x) \in C(L)$ вводим модуль непрерывности вида

$$\omega(\varphi,\delta) = \delta \sup_{\tau\geq\delta} \frac{\bar{\omega}(\varphi,\tau)}{\tau}, \quad \delta > 0,$$

где

$$\bar{\omega}(\varphi,\tau) = \max_{\substack{|x-y|\leq\tau \\ x,y\in L}} |\varphi(x) - \varphi(y)|.$$

Рассмотрим матрицу $A^n = (a_{lj})_{l,j=1}^n$ с элементами

$$a_{lj} = -(2+i\mu)^{-1}\left(2b_{ij} + 4i\mu\sum_{m=1}^{n} b_{lm}b_{mj} + \lambda(2+i\mu)c_{lj} + 4i\lambda\mu\sum_{m=1}^{n} e_{lm}c_{mj}\right),$$

где

$$b_{ll} = c_{ll} = e_{ll} = 0 \qquad \text{при} \qquad l = \overline{1,n},$$

$$b_{lj} = \frac{(b-a)}{n}\frac{\partial\Phi(x(\tau_l), x(\tau_j))}{\partial\vec{n}(x(\tau_l))}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2} \qquad \text{при} \quad l,j=\overline{1,n} \quad \text{и} \quad l\neq j,$$

$$c_{lj} = \frac{(b-a)}{n}\Phi(x(\tau_l), x(\tau_j))\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2} \qquad \text{при} \quad l,j=\overline{1,n} \quad \text{и} \quad l\neq j,$$

$$e_{lj} = \frac{(b-a)}{n}\frac{\partial\Phi(x(\tau_l), x(\tau_j))}{\partial\vec{n}(x(\tau_j))}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2} \qquad \text{при} \quad l,j=\overline{1,n} \quad \text{и} \quad l\neq j.$$

Всюду далее через M будем обозначать несущественные положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

Теорема 2.1. *Выражение*

$$(A\rho)^n(x(\tau_l)) = \sum_{j=1}^{n} a_{lj}\rho(x(\tau_j)), \tag{2.1}$$

построенное с помощью опорных точек $x(\tau_l)$, $l=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для $(A\rho)(x)$, причем справедлива следующая оценка:

$$\max_{l=\overline{1,n}} |(A\rho)(x(\tau_l)) - (A\rho)^n(x(\tau_l))| \leq M\left[\omega\left(\rho,\frac{1}{n}\right) + \|\rho\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right],$$

где $\|\rho\|_\infty = \max_{x\in L}|\rho(x)|$.

Доказательство. В работе [8] доказано, что выражения

$$S_n(x(\tau_k)) = \frac{2(b-a)}{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \Phi(x(\tau_k), x(\tau_j))\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2}\rho(x(\tau_j))$$

и

$$\tilde{K}_n(x(\tau_k)) = \frac{2(b-a)}{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{\partial\Phi(x(\tau_k), x(\tau_j))}{\partial\vec{n}(x(\tau_k))}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2}\rho(x(\tau_j)),$$

построенные с помощью опорных точек $x(\tau_k)$, $k=\overline{1,n}$, являются квадратурными формулами для интегралов $(S\rho)(x)$ и $\left(\tilde{K}\rho\right)(x)$, соответственно, причем

$$\max_{k=\overline{1,n}} |(S\rho)(x(\tau_k)) - S_n(x(\tau_k))| \leq M\left(\omega\left(\rho,\frac{1}{n}\right) + \|\rho\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right),$$

$$\max_{k=\overline{1,n}}\left|\left(\tilde{K}\rho\right)\left(x\left(\tau_k\right)\right)-\tilde{K}_n\left(x\left(\tau_k\right)\right)\right|\le M\left(\omega\left(\rho,\frac{1}{n}\right)+\|\rho\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right).$$

Теперь построим квадратурную формулу для интеграла $(Q\rho)(x)$. Выражение

$$(Q\rho)^n\left(x\left(\tau_l\right)\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n}e_{lm}c_{mj}\right)\rho\left(x\left(\tau_j\right)\right), \tag{2.2}$$

построенное с помощью опорных точек $x\left(\tau_l\right)$, $l=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла $(Q\rho)(x)$. Оценим погрешность квадратурной формулы (2.2). Очевидно, что

$$(Q\rho)\left(x\left(\tau_l\right)\right)-(Q\rho)^n\left(x\left(\tau_l\right)\right)=(Q\rho)\left(x\left(\tau_l\right)\right)-\sum_{j=1}^{n}\left(e_{lj}\sum_{m=1}^{n}c_{jm}\rho\left(x\left(\tau_m\right)\right)\right)$$

$$=\int_L\frac{\partial\Phi\left(x\left(\tau_l\right),y\right)}{\partial\vec{n}\left(y\right)}\left(\int_L\Phi\left(y,t\right)\rho\left(t\right)dL_t\right)dL_y-\frac{b-a}{n}$$

$$\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\left(\frac{\partial\Phi\left(x(\tau_l),x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial\vec{n}\left(x(\tau_j)\right)}\mathrm{mes}L_j\sum_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{n}\Phi\left(x(\tau_j),x(\tau_m)\right)\sqrt{\left(x_1'(\tau_m)\right)^2+\left(x_2'(\tau_m)\right)^2}\rho\left(x(\tau_m)\right)\right)$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\left(\frac{\partial\Phi\left(x\left(\tau_l\right),x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial\vec{n}\left(x\left(\tau_j\right)\right)}\left(\mathrm{mes}L_j-\frac{b-a}{n}\sqrt{\left(x_1'\left(\tau_j\right)\right)^2+\left(x_2'\left(\tau_j\right)\right)^2}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{n}\Phi\left(x\left(\tau_j\right),x\left(\tau_m\right)\right)\sqrt{\left(x_1'\left(\tau_m\right)\right)^2+\left(x_2'\left(\tau_m\right)\right)^2}\rho\left(x\left(\tau_m\right)\right)\right)$$

$$=\int_{L_l}\frac{\partial\Phi\left(x\left(\tau_l\right),y\right)}{\partial\vec{n}\left(y\right)}\left(\int_L\Phi\left(y,t\right)\rho\left(t\right)\,dL_t\right)dL_y$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\int_{L_j}\frac{\partial\Phi\left(x\left(\tau_l\right),y\right)}{\partial\vec{n}\left(y\right)}\left(\int_L\Phi\left(y,t\right)\rho\left(t\right)\,dL_t-\int_L\Phi\left(x\left(\tau_j\right),t\right)\rho\left(t\right)\,dL_t\right)dL_y$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\left[\int_{L_j}\left(\frac{\partial\Phi\left(x\left(\tau_l\right),y\right)}{\partial\vec{n}\left(y\right)}-\frac{\partial\Phi\left(x\left(\tau_l\right),x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial\vec{n}\left(x\left(\tau_j\right)\right)}\right)\int_L\Phi\left(x\left(\tau_j\right),t\right)\rho\left(t\right)\,dL_t\right]dL_y$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\frac{\partial\Phi\left(x\left(\tau_l\right),x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial\vec{n}\left(x\left(\tau_j\right)\right)}\left(\int_L\Phi\left(x\left(\tau_j\right),t\right)\rho\left(t\right)\,dS_t\right.$$

$$\left.-\frac{b-a}{n}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{n}\Phi\left(x\left(\tau_j\right),x\left(\tau_m\right)\right)\sqrt{\left(x_1'\left(\tau_m\right)\right)^2+\left(x_2'\left(\tau_m\right)\right)^2}\rho\left(x\left(\tau_m\right)\right)\right)\mathrm{mes}L_j$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\left(\frac{\partial\Phi\left(x\left(\tau_l\right),x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial\vec{n}\left(x\left(\tau_j\right)\right)}\left(\mathrm{mes}L_j-\frac{b-a}{n}\sqrt{\left(x_1'\left(\tau_j\right)\right)^2+\left(x_2'\left(\tau_j\right)\right)^2}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{n}\Phi\left(x\left(\tau_j\right),x\left(\tau_m\right)\right)\sqrt{\left(x_1'\left(\tau_m\right)\right)^2+\left(x_2'\left(\tau_m\right)\right)^2}\rho\left(x\left(\tau_m\right)\right)\right).$$

Слагаемые в правой части последнего равенства обозначим через $Q_1(n)$, $Q_2(n)$, $Q_3(n)$, $Q_4(n)$ и $Q_5(n)$, соответственно.

Принимая во внимание, что кривая L дважды непрерывно дифференцируема, имеем (см.[7, Гл. V]):

$$|(x-y,\vec{n}(y))| = |x-y|\,|\cos\alpha(x-y,\vec{n}(y))| \le M|x-y|^2, \quad x,y\in L, \tag{2.3}$$

где через $\alpha(x-y,\vec{n}(y))$ обозначен угол между векторами $x-y$ и $\vec{n}(y)$. Тогда

$$\left|\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}\right| = \frac{1}{2\pi}\frac{|(x-y,\vec{n}(y))|}{|x-y|^2} \le M, \quad x,y\in L, \quad x\ne y. \tag{2.4}$$

Так как оператор S ограниченно действует из пространства $C(L)$ в пространство $C(L)$, то

$$|Q_1(n)| \le \left\|\int_L \Phi(y,t)\rho(t)\,dL_t\right\|_\infty \int_{L_l}\left|\frac{\partial\Phi(x(\tau_l),y)}{\partial\vec{n}(y)}\right| dL_y \le M\|\rho\|_\infty \int_{L_l} dL_y \le M\|\rho\|_\infty R(n).$$

Кроме того, учитывая неравенство (см. [10, Теорема 2.12])

$$\omega(S\rho,h) \le M\|\rho\|_\infty h|\ln h|,$$

получаем, что для любого $y\in L_j$

$$\left|\int_L \Phi(y,t)\rho(t)\,dL_t - \int_L \Phi(x(\tau_j),t)\rho(t)\,dL_t\right| \le M\|\rho\|_\infty R(n)|\ln R(n)|,$$

следовательно,

$$|Q_2(n)| \le M\|\rho\|_\infty R(n)|\ln R(n)| \int_L\left|\frac{\partial\Phi(x(\tau_l),y)}{\partial\vec{n}(y)}\right| dL_y \le M\|\rho\|_\infty R(n)|\ln R(n)|.$$

Принимая во внимание лемму 2.1, получаем, что для любого $y\in L_j$ и для любых $\forall\, l,j\in\{1,2,\ldots,n\}, \quad j\ne l$,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial\Phi(x(\tau_l),y)}{\partial\vec{n}(y)} - \frac{\partial\Phi(x(\tau_l),x(\tau_j))}{\partial\vec{n}(x(\tau_j))}\right| \\
&= \left|\frac{(x(\tau_l)-y,\vec{n}(y))\left(|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2-|x(\tau_l)-y|^2\right)}{|x(\tau_l)-y|^2|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2}\right. \\
&\left.-\frac{(x(\tau_l)-y,\vec{n}(y)-\vec{n}(x(\tau_j)))+(x(\tau_j)-y,\vec{n}(x(\tau_j)))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2}\right| \le M\frac{|x(\tau_j)-y|}{|x(\tau_l)-y|}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
|Q_3(n)| &\le M\left\|\int_L \Phi(x,t)\rho(t)\,dL_t\right\|_\infty \sum_{\substack{j=1\\ j\ne l}}^n \int_{L_j}\left|\frac{\partial\Phi(x(\tau_l),y)}{\partial\vec{n}(y)} - \frac{\partial\Phi(x(\tau_l),x(\tau_j))}{\partial\vec{n}(x(\tau_j))}\right| dL_y \\
&\le M\|\rho\|_\infty R(n)\int_{L\setminus L_l}\frac{dL_y}{|x(\tau_l)-y|} \le M\|\rho\|_\infty R(n)|\ln R(n)|.
\end{aligned}$$

Учитывая неравенство (2.4) и оценку погрешности квадратурной формулы для логарифмического потенциала простого слоя, имеем

$$|Q_4(n)| \le M\left[\|\rho\|_\infty R(n)|\ln R(n)| + \omega(\rho,R(n))\right].$$

Учитывая неравенство

$$\left|\sqrt{(x_1'(t))^2+(x_2'(t))^2} - \sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\right| \le MR(n), \quad t\in[t_{j-1},t_j],$$

получаем:

$$\left|1-\frac{\frac{b-a}{n}\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2+\left(x_2'(\tau_j)\right)^2}}{\mathrm{mes}L_j}\right|=\frac{\left|\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\sqrt{\left(x_1'(t)\right)^2+\left(x_2'(t)\right)^2}-\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2+\left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\right)dt\right|}{\int_{t_{j-1}}^{t_j}\sqrt{\left(x_1'(t)\right)^2+\left(x_2'\left(t\right)\right)^2}dt}$$

$$\le M\frac{\frac{b-a}{n}R\left(n\right)}{\frac{b-a}{n}m_1}\le MR\left(n\right),$$

где $m_1=\min\limits_{t\in[a,b]}\sqrt{\left(x_1'\left(t\right)\right)^2+\left(x_2'\left(t\right)\right)^2}>0$ [6, Гл. VI]. Кроме того, очевидно, что

$$\frac{\frac{b-a}{n}\sqrt{\left(x_1'\left(\tau_j\right)\right)^2+\left(x_2'\left(\tau_j\right)\right)^2}}{\mathrm{mes}L_j}\le M.$$

Тогда, принимая во внимание лемму 2.1, получаем:

$$\left|Q_5\left(n\right)\right|=\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\left(\frac{\partial\Phi\left(x\left(\tau_l\right),x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial\vec{n}\left(x\left(\tau_j\right)\right)}\mathrm{mes}L_j\left(1-\frac{\frac{b-a}{n}\sqrt{\left(x_1'\left(\tau_j\right)\right)^2+\left(x_2'\left(\tau_j\right)\right)^2}}{\mathrm{mes}L_j}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\sum_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{n}\Phi\left(x\left(\tau_j\right),x\left(\tau_m\right)\right)\mathrm{mes}L_m\frac{\frac{b-a}{n}\sqrt{\left(x_1'\left(\tau_m\right)\right)^2+\left(x_2'\left(\tau_m\right)\right)^2}}{\mathrm{mes}L_m}\rho\left(x\left(\tau_m\right)\right)\right)\right|$$

$$\le MR\left(n\right)\left\|\rho\right\|_\infty\int_{L\setminus L_l}\left|\frac{\partial\Phi\left(x\left(\tau_l\right),y\right)}{\partial\vec{n}\left(y\right)}\right|dy\int_{L\setminus L_j}\left|\Phi\left(x\left(\tau_j\right),t\right)\right|dt\le MR\left(n\right)\left\|\rho\right\|_\infty.$$

Итак, суммируя полученные оценки для выражений $Q_1\left(n\right)$, $Q_2\left(n\right)$, $Q_3\left(n\right)$, $Q_4\left(n\right)$ и $Q_5\left(n\right)$, имеем

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|\left(Q\rho\right)\left(x\left(\tau_l\right)\right)-\left(Q\rho\right)^n\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right|\le M\left[\left\|\rho\right\|_\infty R\left(n\right)\left|\ln R\left(n\right)\right|+\omega\left(\rho,R\left(n\right)\right)\right].$$

Аналогичным образом можно показать, что выражение

$$\left(R\rho\right)^n\left(x\left(\tau_l\right)\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n}b_{lm}b_{mj}\right)\rho\left(x\left(\tau_j\right)\right),$$

построенное с помощью опорных точек $x\left(\tau_l\right),l=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла $\left(R\rho\right)\left(x\right)$, причем

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|\left(R\rho\right)\left(x\left(\tau_l\right)\right)-\left(R\rho\right)^n\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right|\le M\left[\left\|\rho\right\|_\infty R\left(n\right)\left|\ln R\left(n\right)\right|+\omega\left(\rho,R\left(n\right)\right)\right].$$

В результате, принимая во внимание построенные квадратурные формулы для интегралов $\left(S\rho\right)\left(x\right)$, $\left(\tilde{K}\rho\right)\left(x\right)$, $\left(Q\rho\right)\left(x\right)$, $\left(R\rho\right)\left(x\right)$ и их оценки погрешности, получаем, что выражение (2.1), построенное с помощью опорных точек $x\left(\tau_l\right)$, $l=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для $\left(A\rho\right)\left(x\right)$, причем

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|\left(A\rho\right)\left(x\left(\tau_l\right)\right)-\left(A\rho\right)^n\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right|\le M\left[\left\|\rho\right\|_\infty R\left(n\right)\left|\ln R\left(n\right)\right|+\omega\left(\rho,R\left(n\right)\right)\right].$$

Тогда, учитывая соотношение $R\left(n\right)\sim\frac{1}{n}$, получаем доказательство теоремы. □

3. Обоснование метода коллокации

Пусть $\mathbb{C}^n$ – пространство n–мерных векторов $z^n = (z_1^n, z_2^n, \ldots, z_n^n)^{\mathrm{T}}$, $z_l^n \in \mathbb{C}$, $l = \overline{1,n}$, с нормой $\|z^n\| = \max\limits_{l=\overline{1,n}} |z_l^n|$, где запись «$a^{\mathrm{T}}$» означает транспонировку вектора a. Используя квадратурную формулу (2.1), интегральное уравнение (1.1), заменяем системой алгебраических уравнений относительно z_l^n – приближенных значений $\rho\left(x\left(\tau_l\right)\right)$, $l = \overline{1,n}$, которую запишем в виде

$$\left(I^n + A^n\right) z^n = \varphi^n, \tag{3.1}$$

где I^n – единичный оператор на пространстве $\mathbb{C}^n$,

$$\varphi^n = -4\left(2 + i\mu\right)^{-1} p^n f,$$

а $p^n : C\left(L\right) \to \mathbb{C}^n$ – линейный ограниченный оператор, определяемый формулой

$$p^n f = \left(f\left(x\left(\tau_1\right)\right), f\left(x\left(\tau_2\right)\right), \ldots, f\left(x\left(\tau_n\right)\right)\right)^{\mathrm{T}}$$

и называемый оператором простого сноса.

Обоснование метода коллокации получим из теоремы Г.М. Вайникко о сходимости для линейных операторных уравнений [11]. Для ее формулировки приведем в обозначениях работы [11] необходимые определения и утверждения.

Определение 3.1. [11]. *Пусть E и E_n – банаховы пространства. Систему $Q = \{q^n\}$ операторов $q^n : E \to E_n$ будем называть связывающей для E и E_n, если для любых $\varphi, \varphi' \in E$ и $a, a' \in \mathbb{C}$*

$$\|q^n \varphi\| \to \|\varphi\|_\infty \quad \textit{при} \quad n \to \infty;$$
$$\|q^n\left(a\varphi + a'\varphi'\right) - \left(aq^n\varphi + a'q^n\varphi'\right)\| \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Определение 3.2. [11, Опр. 1.1]. *Последовательность $\{\varphi_n\}$ элементов $\varphi_n \in E_n$ Q – сходится к $\varphi \in E$, если $\|\varphi_n - q^n\varphi\| \to 0$ при $n \to \infty$. При этом будем писать $\varphi_n \xrightarrow{Q} \varphi$.*

Определение 3.3. [11, Опр. 1.2]. *Последовательность $\{\varphi_n\}$ элементов $\varphi_n \in E_n$ Q – компактна, если любая ее подпоследовательность $\{\varphi_{n_m}\}$ содержит Q – сходящуюся подпоследовательность $\left\{\varphi_{n_{m_k}}\right\}$.*

Предложение 3.1. [11, Пред. 1.1]. *Пусть система $Q = \{q^n\}$ линейных и ограниченных операторов $q^n : E \to E_n$ является связывающей для E и E_n. Тогда следующие условия равносильны:*

1. *последовательность $\{\varphi_n\}$ Q – компактна и множество ее Q – предельных точек компактно в E;*
2. *существует относительно компактная последовательность $\left\{\varphi^{(n)}\right\} \subset E$ такая, что $\left\|\varphi_n - q^n\varphi^{(n)}\right\| \to 0$ при $n \to \infty$.*

Определение 3.4. [11, Опр. 2.1]. *Последовательность операторов $A^n : E_n \to E_n$ QQ – сходится к оператору $A : E \to E$, если для любой Q – сходящейся последовательности $\{\varphi_n\}$ имеем $\varphi_n \xrightarrow{Q} \varphi \Rightarrow A^n\varphi_n \xrightarrow{Q} A\varphi$. При этом будем писать $A^n \xrightarrow{QQ} A$.*

Определение 3.5. [11, Опр. 3.3]. *Последовательность операторов $A^n \in L\left(E_n, E_n\right)$ компактно сходится к оператору $A \in L\left(E, E\right)$, если $A^n \xrightarrow{QQ} A$ и выполнено следующее условие компактности:*

$$\varphi_n \in E_n, \qquad \|\varphi_n\| \le M \qquad \Rightarrow \{A^n\varphi_n\} \qquad Q - \textit{компактна}.$$

Теорема 3.1. [11, Теорема 4.2]. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. $\mathrm{Ker}\,(I+A)=\{0\}$, *где* I *– единичный оператор в пространстве* E*;*
2. *операторы* I^n+A^n *фредгольмовы с нулевым индексом;*
3. $\psi_n \xrightarrow{Q} \psi, \quad \psi_n \in E_n,\ \psi \in E$*;*
4. $A^n \to A$ *компактно.*

Тогда уравнение $(I+A)\,\varphi = \psi$ *имеет единственное решение* $\tilde{\varphi} \in E$*, уравнение* $(I^n+A^n)\,\varphi_n=\psi_n$ *имеет единственное решение* $\tilde{\varphi}_n \in E_n$*, и* $\tilde{\varphi}_n \xrightarrow{Q} \tilde{\varphi}$ *с оценками*

$$c_1\left\|(I^n+A^n)\,q^n\tilde{\varphi}-\psi_n\right\| \le \left\|\tilde{\varphi}_n-q^n\tilde{\varphi}\right\| \le c_2\left\|(I^n+A^n)\,q^n\tilde{\varphi}-\psi_n\right\|,$$

где

$$c_1=\frac{1}{\sup\limits_n\|I^n+A^n\|}>0, \qquad c_2=\sup_n\left\|(I^n+A^n)^{-1}\right\|<+\infty.$$

Теорема 3.2. *Уравнения* (1.1) *и* (3.1) *имеют единственные решения* $\rho_* \in C\,(S)$ *и* $z_*^n \in \mathbb{C}^n$*, соответственно, причем* $\|z_*^n - p^n\rho_*\| \to 0$ *при* $n\to\infty$ *с оценкой*

$$\|z_*^n - p^n\rho_*\| \le\ M\left[\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)+\|f\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right].$$

Доказательство. Так как уравнение (1.1) однозначно разрешимо, то $\mathrm{Ker}\,(I+A)=\{0\}$. Очевидно, что операторы I^n+A^n фредгольмовы с нулевым индексом и операторы $p^n : C\,(L) \to \mathbb{C}^n$ линейны и ограничены. Принимая во внимание способ разбиения кривой L на элементарные части, получаем, что для любого $g \in C\,(L)$

$$\lim_{n\to\infty}\|p^n g\| = \lim_{n\to\infty}\max_{l=\overline{1,n}}|g\,(x\,(\tau_l))| = \max_{x\in L}|g\,(x)| = \|g\|_\infty.$$

Следовательно, система операторов простого сноса $P=\{p^n\}$ является связывающей для пространств $C\,(L)$ и $\mathbb{C}^n$. Тогда $\varphi^n \xrightarrow{P} \varphi$ и в силу теоремы 2.1 получаем, что $I^n+A^n \xrightarrow{PP} I+A$. По определению 3.5 осталось проверить условие компактности, которое в виду предложения 3.1 равносильно условию: для любого $\{z^n\}$, $z^n\in\mathbb{C}^n$, $\|z^n\|\le M$, существует относительно компактная последовательность $\{A_n z^n\} \subset C\,(L)$ такая, что

$$\|A^n z^n - p^n\,(A_n z^n)\| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

В качестве $\{A_n z^n\}$ выберем последовательность

$$\begin{aligned}(A_n z^n)\,(x) = &-(2+i\mu)^{-1}\left(2\left(\tilde{K}_n z^n\right)(x)+4i\mu\,(R_n z^n)\,(x)\right.\\ &\left.+\,\lambda\,(2+i\mu)\,(S_n z^n)\,(x)+4i\lambda\mu\,(Q_n z^n)\,(x)\right),\end{aligned}$$

где

$$(S_n z^n)\,(x) = 2\sum_{j=1}^n z_j^n\int_{L_j}\Phi\,(x,y)\;dL_y, \qquad x\in L,$$

$$(\tilde{K}_n z^n)\,(x) = 2\sum_{j=1}^n z_j^n\int_{L_j}\frac{\partial\Phi\,(x,y)}{\partial\vec{n}\,(x)}dL_y, \qquad x\in L,$$

$$(R_n z^n)\,(x) = \sum_{j=1}^n z_j^n\int_L\frac{\partial\Phi\,(x,y)}{\partial\vec{n}\,(x)}\left(\int_{L_j}\frac{\partial\Phi\,(y,t)}{\partial\vec{n}\,(y)}dL_t\right)dL_y, \qquad x\in L,$$

$$(Q_n z^n)\,(x) = \sum_{j=1}^n z_j^n\int_L\frac{\partial\Phi\,(x,y)}{\partial\vec{n}\,(y)}\left(\int_{L_j}\Phi\,(y,t)\;dL_t\right)dL_y, \qquad x\in L.$$

Пусть $L_d(x) = \{y \in L: \ |y-x| < d\}$. Возьмем любые точки $x', \ x'' \in L$ такие, что

$$|x'-x''| = \delta < \frac{\min\{1,d\}}{2}.$$

Так как

$$\left| \sum_{j=1}^{n} z_j^n \int_{L_j} \Phi(y,t) \, dL_t \right| \le \|z^n\| \int_L |\Phi(y,t)| \, dL_t \le M \|z^n\|,$$

то

$$\begin{aligned}
&|\left(Q_n z^n\right)(x') - \left(Q_n z^n\right)(x'')| \\
&\quad\le M \|z^n\| \int_L \left| \frac{\partial \Phi(x',y)}{\partial \vec{n}(y)} - \frac{\partial \Phi(x'',y)}{\partial \vec{n}(y)} \right| dL_y \\
&\quad\le M \|z^n\| \int_{L_{\frac{\delta}{2}}(x')} \left| \frac{\partial \Phi(x',y)}{\partial \vec{n}(y)} \right| dL_y + M \|z^n\| \int_{L_{\frac{\delta}{2}}(x'')} \left| \frac{\partial \Phi(x'',y)}{\partial \vec{n}(y)} \right| dL_y \\
&\qquad + M \|z^n\| \int_{L_{\frac{\delta}{2}}(x')} \left| \frac{\partial \Phi(x'',y)}{\partial \vec{n}(y)} \right| dL_y + M \|z^n\| \int_{L_{\frac{\delta}{2}}(x'')} \left| \frac{\partial \Phi(x',y)}{\partial \vec{n}(y)} \right| dL_y \\
&\qquad + M \|z^n\| \int_{L_d(x') \setminus \left(L_{\frac{\delta}{2}}(x') \bigcup L_{\frac{\delta}{2}}(x'') \right)} \left| \frac{\partial \Phi(x',y)}{\partial \vec{n}(y)} - \frac{\partial \Phi(x'',y)}{\partial \vec{n}(y)} \right| dL_y \\
&\qquad + M \|z^n\| \int_{L \setminus L_d(x')} \left| \frac{\partial \Phi(x',y)}{\partial \vec{n}(y)} - \frac{\partial \Phi(x'',y)}{\partial \vec{n}(y)} \right| dL_y.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание неравенство (2.4), имеем:

$$\int_{L_{\frac{\delta}{2}}(x')} \left| \frac{\partial \Phi(x',y)}{\partial \vec{n}(y)} \right| dL_y = \frac{1}{2\pi} \int_{L_{\frac{\delta}{2}}(x')} \frac{|(x'-y, \vec{n}(y))|}{|x'-y|^2} dL_y \le M \int_{L_{\frac{\delta}{2}}(x')} dL_y \le M\delta,$$

$$\int_{L_{\frac{\delta}{2}}(x'')} \left| \frac{\partial \Phi(x'',y)}{\partial \vec{n}(y)} \right| dL_y \le M\delta,$$

$$\int_{L_{\frac{\delta}{2}}(x')} \left| \frac{\partial \Phi(x'',y)}{\partial \vec{n}(y)} \right| dL_y = \frac{1}{2\pi} \int_{L_{\frac{\delta}{2}}(x')} \frac{|(x''-y, \vec{n}(y))|}{|x''-y|^2} dL_y \le M \int_{L_{\frac{\delta}{2}}(x')} dL_y \le M\delta$$

и

$$\int_{L_{\frac{\delta}{2}}(x'')} \left| \frac{\partial \Phi(x',y)}{\partial \vec{n}(y)} \right| dL_y \le M\delta.$$

Так как

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi(x',y)}{\partial \vec{n}(y)} - \frac{\partial \Phi(x'',y)}{\partial \vec{n}(y)} &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{(x'-y, \vec{n}(y))}{|x'-y|^2} - \frac{(x''-y, \vec{n}(y))}{|x''-y|^2} \right) \\
&= \frac{(x'-y, \vec{n}(y)) \left(|x''-y| - |x'-y|\right) \left(|x''-y| + |x'-y|\right)}{2\pi |x'-y|^2 |x''-y|^2} \\
&\quad + \frac{(x'-x'', \vec{n}(y))}{2\pi |x''-y|^2}
\end{aligned}$$

и для любого $y \in L_d(x') \setminus (L_{\frac{\delta}{2}}(x') \bigcup L_{\frac{\delta}{2}}(x''))$

$$|x'-y| \le |x'-x''| + |x''-y| \le 3|x''-y|, \qquad |x''-y| \le 3|x'-y|,$$

то, учитывая неравенство (2.3), находим:

$$\left|\frac{\partial\Phi\left(x',y\right)}{\partial\vec{n}\left(y\right)}-\frac{\partial\Phi\left(x'',y\right)}{\partial\vec{n}\left(y\right)}\right|\leq\frac{M\delta}{\left|x'-y\right|},\qquad y\in L_d(x')\backslash(L_{\frac{\delta}{2}}(x')\bigcup L_{\frac{\delta}{2}}(x'')),$$

а значит,

$$\int_{L_d(x')\backslash\left(L_{\frac{\delta}{2}}(x')\bigcup L_{\frac{\delta}{2}}(x'')\right)}\left|\frac{\partial\Phi\left(x',y\right)}{\partial\vec{n}\left(y\right)}-\frac{\partial\Phi\left(x'',y\right)}{\partial\vec{n}\left(y\right)}\right|dL_y$$
$$\leq M\delta\int_{L_d(x')\backslash\left(L_{\frac{\delta}{2}}(x')\bigcup L_{\frac{\delta}{2}}(x'')\right)}\frac{dL_y}{\left|x'-y\right|}$$
$$\leq M\delta\int_{\delta}^{d}\frac{dt}{t}\leq M\delta\left|\ln\delta\right|.$$

Кроме того, очевидно, что

$$\int_{L\backslash L_d(x')}\left|\frac{\partial\Phi\left(x',y\right)}{\partial\vec{n}\left(y\right)}-\frac{\partial\Phi\left(x'',y\right)}{\partial\vec{n}\left(y\right)}\right|dL_y\leq M\delta.$$

Суммируя полученные выше оценки, находим

$$\left|\left(Q_nz^n\right)\left(x'\right)-\left(Q_nz^n\right)\left(x''\right)\right|\leq M\left\|z^n\right\|\delta\left|\ln\delta\right|. \tag{3.2}$$

Таким же образом можно доказать эту оценку для последовательностей $\{S_nz^n\}$, $\left\{\tilde{K}_nz^n\right\}$ и $\{R_nz^n\}$. Тогда

$$\left|\left(A_nz^n\right)\left(x'\right)-\left(A_nz^n\right)\left(x''\right)\right|\leq M\left\|z^n\right\|\delta\left|\ln\delta\right|, \tag{3.3}$$

а, значит, $\{A_nz^n\}\subset C\left(L\right)$.

Из условия $\|z^n\|\leq M$ получаем равномерную ограниченность последовательности $\{A_nz^n\}$, а из оценки (3.3) получаем равностепенную непрерывность этой последовательности. Тогда из теоремы Арцеля получаем относительную компактность последовательности $\{A_nz^n\}$. Принимая во внимание способ разбиения кривой L на элементарные части и лемму 2.1, нетрудно показать, что

$$\left\|A^nz^n-p^n\left(A_nz^n\right)\right\|\to 0\quad\text{при}\qquad n\to\infty.$$

Тогда, применяя теорему 3.1, получаем, что уравнения (1.1) и (3.1) имеют единственные решения $\rho_*\in C\left(S\right)$ и $z_*^n\in\mathbb{C}^n$, соответственно, причем

$$c_1\delta_n\leq\left\|z_*^n-p^n\rho_*\right\|\leq c_2\delta_n,$$

где

$$c_1=\frac{1}{\sup\limits_n\left\|I^n+A^n\right\|}>0,\qquad c_2=\sup_n\left\|\left(I^n+A^n\right)^{-1}\right\|<\infty,$$
$$\delta_n=\left\|\left(I^n+A^n\right)\left(p^n\rho_*\right)-\varphi^n\right\|.$$

Применяя теорему 2.1, имеем:

$$\delta_n=\left\|p^n\rho_*+A^n\left(p^n\rho_*\right)-p^n\left(\rho_*+A\rho_*\right)\right\|=\left\|A^n\left(p^n\rho_*\right)-p^n\left(A\rho_*\right)\right\|$$
$$=\max_{l=\overline{1,n}}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{lj}\rho_*\left(x\left(\tau_j\right)\right)-\left(A\rho_*\right)\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right|\leq M\left[\left\|\rho\right\|_\infty\frac{\ln n}{n}+\omega\left(\rho,\frac{1}{n}\right)\right].$$

Так как оператор A является слабо сингулярным интегральным оператором, тогда и является компактным оператором в $C\left(L\right)$ [10, Теорема 2.6]. Кроме того, из однозначной разрешимости интегрального уравнения (1.1), очевидно, что оператор $I+A$ инъективен, а значит, обратный оператор $(I+A)^{-1}$ ограничен [10, Теорема 1.16]. Тогда

$$\|\rho_*\|_\infty = \left\|(I+A)^{-1}\varphi\right\|_\infty \leq \left\|(I+A)^{-1}\right\| \|\varphi\|_\infty \leq M \|f\|_\infty .$$

Кроме того, поступая точно так, как и в доказательстве неравенства (3.2), можно показать, что

$$\omega\left(R\rho_*, h\right) \leq M \|\rho_*\|_\infty h \left|\ln h\right|$$

и

$$\omega\left(Q\rho_*, h\right) \leq M \|\rho_*\|_\infty h \left|\ln h\right| .$$

Тогда, учитывая неравенства (см. [10, Теорема 2.12], [10, Теорема 2.16])

$$\omega\left(S\rho_*, h\right) \leq M \|\rho_*\|_\infty h \left|\ln h\right|$$

и

$$\omega\left(K\rho_*, h\right) \leq M \|\rho_*\|_\infty h \left|\ln h\right| ,$$

находим:

$$\omega\left(A\rho_*, \frac{1}{n}\right) \leq M \|\rho_*\|_\infty \frac{\ln n}{n} \leq M \|f\|_\infty \frac{\ln n}{n}.$$

Значит,

$$\begin{aligned}\omega\left(\rho_*, \frac{1}{n}\right) &= \omega\left(\varphi - A\rho_*, \frac{1}{n}\right) \leq \omega\left(\varphi, \frac{1}{n}\right) + \omega\left(A\rho_*, \frac{1}{n}\right)\\ &\leq \omega\left(\varphi, \frac{1}{n}\right) + M \|f\|_\infty \frac{\ln n}{n} \leq M\left[\omega\left(f, \frac{1}{n}\right) + \|f\|_\infty \frac{\ln n}{n}\right].\end{aligned}$$

В результате, принимая во внимание полученные выше оценки, имеем:

$$\delta_n \leq M\left(\omega\left(f, \frac{1}{n}\right) + \|f\|_\infty \frac{\ln n}{n}\right).$$

Теорема доказана. □

Непосредственно из теоремы 3.2 вытекает

Следствие 3.1. *Пусть* $x_0 \in \mathbb{R}^2 \backslash \bar{D}$ *и* $z_*^n = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*)^{\mathrm{T}}$ *является решением системы алгебраических уравнений* (3.1). *Тогда последовательность*

$$\begin{aligned}u_n(x_0) =& \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} \Phi\left(x_0, x\left(\tau_j\right)\right)\sqrt{\left(x_1'\left(\tau_j\right)\right)^2 + \left(x_2'\left(\tau_j\right)\right)^2} z_j^* + i\mu\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\Phi\left(x_0, x\left(\tau_j\right)\right)}{\partial\vec{n}\left(x\left(\tau_j\right)\right)}\\ &\cdot\left(\sum_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{n} \Phi\left(x\left(\tau_j\right), x\left(\tau_m\right)\right)\sqrt{\left(x_1'\left(\tau_m\right)\right)^2 + \left(x_2'\left(\tau_m\right)\right)^2} z_m^*\right)\sqrt{\left(x_1'\left(\tau_j\right)\right)^2 + \left(x_2'\left(\tau_j\right)\right)^2}\end{aligned}$$

сходится к значению $u\left(x_0\right)$ *решения* $u\left(x\right)$ *смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в точке* x_0, *причем*

$$\left|u_n\left(x_0\right) - u\left(x_0\right)\right| \leq M\left(\omega\left(f, \frac{1}{n}\right) + \|f\|_\infty \frac{\ln n}{n}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R.J. Heydarov. *On solvability of an external problem with impedance boundary condition for Helmholtz equation by integral equations method* // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan. **42**:1, 3–9 (2016).
2. Э.Г. Халилов. *Конструктивный метод решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным условием* // Дифференциальные уравнения. **54**:4, 544–555 (2018).
3. Э.Г. Халилов. *Обоснование метода коллокации для одного класса поверхностных интегральных уравнений* // Математические заметки. **107**:4, 604 – 622 (2020).
4. E.H. Khalilov. *On approximate solution of external Dirichlet boundary value problem for Laplace equation by collocation method* // Azerbaijan Journal of Mathematics. **5**:2, 13-20 (2015).
5. R. Kress. *Boundary integral equations in time-harmonic acoustic scattering* // Mathematical and Computer Modeling. **15**: 3–5, 229–243 (1991).
6. Н.И. Мусхелешвили. *Сингулярные интегральные уравнения.* М.: Физ. – мат. литература. 1962.
7. B.C. Владимиров. *Уравнения математической физики.* М.: Наука. 1976.
8. E.H. Khalilov, M.N. Bakhshaliyeva. *Quadrature formulas for simple and double layer logarithmic potentials* // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan. **45**:1, 155–162 (2019).
9. Ю.А. Кустов, Б.И. Мусаев *Кубатурная формула для двумерного сингулярного интеграла и ее приложения* // Деп. в ВИНИТИ. 4281–81, 60 с. (1981).
10. Д. Колтон, Р. Кресс. *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.* М.: Мир. 1987.
11. Г.М. Вайникко. *Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений* // Итоги науки и техники. Математический анализ. **16**, 5–53 (1979).

Халилов Эльнур Гасан оглы,
Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности,
пр. Азадлыг, 20,
AZ 1010, г. Баку, Азербайджан
E-mail: elnurkhalil@mail.ru

Бахшалыева Мехпара Нусрат кызы,
Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности,
пр. Азадлыг, 20,
AZ 1010, г. Баку, Азербайджан
E-mail: mehpara.bakhshalieva@mail.ru