ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 1 (2021). С. 17-30.

УДК 517.968.4

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ В КОМПЛЕКСНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С.Н. АСХАБОВ

Аннотация. Изучаются различные классы нелинейных интегральных уравнений типа свертки, возникающих в теории следящих систем, моделях популяционной генетики и других. Методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решений рассматриваемых уравнений в комплексных пространствах Лебега $L_p(\mathbb{R})$ при достаточно легко обозримых ограничениях на нелинейности. При этом, в зависимости от рассматриваемого класса уравнений, предполагается, что либо $p \in (1,2]$, либо $p \in [2,\infty)$. Условия, накладываемые на нелинейности, являются необходимыми и достаточными для того, чтобы порождаемые ими операторы суперпозиции действовали из пространства $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, в сопряженное с ним пространство $L_q(\mathbb{R})$, $q = p/(p-1)$, и были монотонными. В случае пространства $L_2(\mathbb{R})$, комбинированием метода монотонных операторов и принципа сжимающих отображений, показано, что решения могут быть найдены методом последовательных приближений пикаровского типа и приведены оценки скорости их сходимости. Доказательства существенно используют установленные в работе критерий положительности (по Бохнеру) линейного интегрального оператора свертки в комплексном пространстве Лебега $L_p(\mathbb{R})$ при $1 < p \leqslant 2$ и коэрцитивность оператора, обратного к нелинейному оператору Немыцкого. Полученные результаты в рамках пространства $L_2(\mathbb{R})$ охватывают, в частности, линейные интегральные уравнения типа свертки.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения, оператор свертки, критерий положительности, монотонный оператор, коэрцитивный оператор.

Mathematics Subject Classification: 45G10, 47J05

1. Введение

Решение многих задач современной математики, физики, механики и биологии приводят к нелинейным интегральным уравнениям типа свертки (см. монографии [1], [2] и приведенную в них библиографию). Например, общий класс нелинейных сервомеханизмов (следящих систем) описывается рассматриваемым в данной работе нелинейным интегральным уравнением типа свертки вида [3]:

$$u(x) + \int_{-\infty}^{\infty} h(x-t) F[t, u(t)]\, dt = f(x), \tag{1.1}$$

которое возникает также в теории электрических сетей (сигнальной трансмиссии через общую электрическую сеть), содержащих нелинейные элементы (нелинейный резистор) [4].

S.N. Askhabov, Nonlinear convolution type integral equations in complex spaces.

© Асхабов С.Н. 2021.

Работа поддержана РФФИ (грант 18-41-200001) и публикуется в рамках выполнения государственного задания в соответствии с Дополнительным соглашением от 07.07.2020 № 075-03-2020-239/2 реестр № 248 КБК 01104730290059611 (проект «Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи»).

Поступила 29 ноября 2020 г.

При $f(x) = 0$ уравнение вида (1.1) описывает детерменистические модели пространственного распространения эпидемии, а также используется как математическая модель некоторых инфекционных заболеваний или как уравнение роста некоторых видов популяции [5], [6].

Известно, что теория линейных интегральных уравнений типа свертки в настоящее время достаточно хорошо разработана и ее основные результаты приведены, например, в монографии [7]. Что касается теории нелинейных интегральных уравнений типа свертки, то она находится в стадии развития и отличается от соответствующей линейной теории не только по методам исследования, но и по характеру получаемых результатов (подробнее, см. [1], [2]).

В последние десятилетия при исследовании нелинейных уравнений с *положительными* операторами широко используется метод *монотонных* операторов. К сожалению, как отмечено в монографии [8, глава 8, п. 8.3] оба термина «положительный» и «монотонный» используются в функциональном анализе в нескольких различных смыслах. Так, в работах М.А. Красносельского, И.А. Бахтина и других (см., например, [9]) развита глобальная теория *положительных* решений нелинейных уравнений с монотонными (по Красносельскому) операторами в банаховых пространствах с конусами, а в работах Г. Минти, Ф. Браудера, Р.И. Качуровского, М.М. Вайнберга и других (см., например, [10], [11]) построена теория решений (произвольного знака) нелинейных уравнений с монотонными (по Браудеру-Минти) операторами в рефлексивных пространствах. К настоящему времени опубликовано значительно больше работ, посвященных исследованию нелинейных интегральных уравнений типа свертки с монотонными по Красносельскому операторами, чем с монотонными по Браудеру-Минти операторами.

В данной работе методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решений для трех различных классов нелинейных интегральных уравнений типа свертки в комплексных пространствах Лебега $L_p(\mathbb{R})$. При $p = 2$ показано, что решения могут быть найдены методом последовательных приближений пикаровского типа и приведены оценки скорости их сходимости. Доказательства существенно используют установленный в работе критерий положительности (по Бохнеру) интегрального оператора свертки. Полученные результаты в рамках пространства $L_2(\mathbb{R})$ охватывают, в частности, линейные интегральные уравнения типа свертки.

Следует отметить, что в работе [12] изучены различные классы нелинейных интегральных уравнений типа свертки в вещественных пространствах Лебега 2π-периодических функций $L_p(-\pi, \pi)$ при любых значениях $p \in (1, \infty)$. Исследование этих уравнений в случае комплексных пространств Лебега $L_p(\mathbb{R})$ вызывает дополнительные трудности, связанные, в частности, с тем, что, в отличие от пространств $L_p(-\pi, \pi)$, они не являются вложенными друг в друга в зависимости от значений p, а также нахождением условий положительности оператора свертки и условий монотонности и коэрцитивности оператора суперпозиции. Оказалось, что эти условия существенно отличаются от известных в случае вещественных пространств $L_p(-\pi, \pi)$. Эти отличия приводят к тому, что, в зависимости от рассматриваемого класса нелинейных интегральных уравнений типа свертки, в случае комплексных пространств $L_p(\mathbb{R})$ приходится предполагать, что либо $p \in (1, 2]$, либо $p \in [2, \infty)$.

2. Критерий положительности интегрального оператора свертки в комплексных пространствах Лебега

Как известно [13, глава 9], теория *непрерывных* положительно-определенных (по Бохнеру) функций в настоящее время достаточно разработана и может рассматриваться как одно из исходных орудий построения гармонического анализа, играя, в частности, важную роль в теории локально-компактных групп. С понятием положительно-определенной функции тесно связано понятие положительного оператора, нашедшее многочисленные применения при исследовании как линейных, так и нелинейных интегральных и дискретных уравнений в банаховых пространствах [1], [14], [15], [16].

В монографии [1, § 10] доказано, что для положительности в вещественном пространстве Лебега $L_p(\mathbb{R})$, где $1 < p \leqslant 2$, интегрального оператора свертки $Hu = h * u$ необходимо и достаточно, чтобы косинус-преобразование Фурье $\widehat{h}_c(x)$ его ядра $h \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_{p/[2(p-1)]}(\mathbb{R})$ было неотрицательной функцией на положительной полуоси $[0, \infty)$.

В данном пункте установлено, что интегральный оператор свертки H является положительным в комплексном пространстве Лебега $L_p(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда реальная часть преобразования Фурье его ядра является неотрицательной функцией на всей числовой оси $\mathbb{R}$.

Итак, рассмотрим в комплексном пространстве Лебега $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, интегральный оператор свертки

$$(Hu)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)u(t)\,dt = (h * u)(x),$$

где ядро $h \in L_1(\mathbb{R})$. Для $u \in L_p(\mathbb{R})$ и $v \in L_q(\mathbb{R})$, $q = p/(p-1)$, введем обозначения:

$$\|u\|_p = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^p dx\right)^{1/p} \quad \text{и} \quad \langle u, v\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x)\cdot\overline{v(x)}\,dx.$$

Если $p = q = 2$, то $\langle u, v\rangle = (u, v)$ есть обычное скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Обозначим через $\widehat{u}(x)$ преобразование Фурье функции $u \in L_2(\mathbb{R})$ (приводимые ниже сведения из теории преобразования Фурье см., например, в [17, глава VIII]):

$$\widehat{u}(x) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int\limits_{-N}^{N} u(t)e^{-ixt}dt, \tag{2.1}$$

где символ $\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}$ означает предел в среднем с показателем $p = 2$ (т.е. в среднем квадратичном).

Известно, что $\widehat{u} \in L_2(\mathbb{R})$, если $u \in L_2(\mathbb{R})$ и для любых $u, v \in L_2(\mathbb{R})$ справедливо обобщенное равенство Парсеваля $(u, v) = (\widehat{u}, \widehat{v})$, т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x)\cdot\overline{v(x)}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(x)\cdot\overline{\widehat{v}(x)}\,dx, \tag{2.2}$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение. Кроме того, если ядро $h \in L_1(\mathbb{R})$, а $u \in L_2(\mathbb{R})$, то для преобразования Фурье свертки справедливо равенство:

$$\widehat{(h * u)}(x) = \sqrt{2\,\pi}\,\widehat{h}(x)\cdot\widehat{u}(x), \tag{2.3}$$

где $\widehat{h}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-ixt}dt$ (поскольку $h(x) \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение (2.1) упрощается).

Лемма 2.1. *Пусть* $1 < p \leqslant 2$ *и ядро* $h \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_{q/2}(\mathbb{R})$, *где* $q = p/(p-1)$. *Для того, чтобы оператор свертки* H *(действующий непрерывно из* $L_p(\mathbb{R})$ *в* $L_q(\mathbb{R})$*) был положительным, т.е. выполнялось неравенство:*

$$\operatorname{Re}\langle Hu, u\rangle = \operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)u(t)\,dt\right)\overline{u(x)}dx \geqslant 0, \quad \forall u \in L_p(\mathbb{R}), \tag{2.4}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\operatorname{Re}\widehat{h}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-ixt}dt \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Достаточность. Так как $h \in L_{q/2}(\mathbb{R})$, то из неравенства Юнга (см., например, [1, теорема 4.4]) непосредственно вытекает оценка

$$\|Hu\|_q \leqslant \|h\|_{q/2}\|u\|_p, \quad \forall u \in L_p(\mathbb{R}). \tag{2.6}$$

Значит, оператор свертки H действует непрерывно из $L_p(\mathbb{R})$ в $L_q(\mathbb{R})$.

Докажем положительность оператора свертки H. Для этого рассмотрим отдельно два случая: $p = 2$ и $1 < p < 2$.

1). Пусть $p = 2$. Тогда $q = 2$ и, по условию леммы 2.1, $h \in L_1(\mathbb{R})$. Значит, в силу неравенства (2.6), оператор свертки H действует непрерывно из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$. Используя равенства (2.2) и (2.3), имеем

$$\begin{aligned}(Hu, u) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)u(t)\,dt\right)\overline{u(x)}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(h*u)(x)\cdot\overline{u(x)}\,dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{(h*u)}(x)\cdot\overline{\widehat{u}(x)}\,dx = \sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{h}(x)\cdot\widehat{u}(x)\cdot\overline{\widehat{u}(x)}\,dx = \sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{h}(x)\cdot|\widehat{u}(x)|^2\,dx.\end{aligned}$$

Значит,

$$\operatorname{Re}(Hu, u) = \sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Re}\widehat{h}(x)\cdot|\widehat{u}(x)|^2\,dx. \tag{2.7}$$

Из равенства (2.7) следует, что $\operatorname{Re}(Hu, u) \geqslant 0$ для любого $u \in L_2(\mathbb{R})$, если $\operatorname{Re}\widehat{h}(x) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$. Так как, по теореме Римана-Лебега, $\widehat{h}(x)$ есть непрерывная на всей оси $\mathbb{R}$ функция, то условие, что $\operatorname{Re}\widehat{h}(x) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$ равносильно условию, что $\operatorname{Re}\widehat{h}(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Таким образом, если $h \in L_1(\mathbb{R})$ и $\operatorname{Re}\widehat{h}(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то

$$\operatorname{Re}(Hu, u) \geqslant 0, \quad \forall\ u \in L_2(\mathbb{R}). \tag{2.8}$$

2). Пусть теперь $1 < p < 2$, $h(x) \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_{q/2}(\mathbb{R})$ и выполняется условие (2.5). Так как $h(x) \in L_1(\mathbb{R})$, то на основании неравенства (2.8), имеем

$$\operatorname{Re}\langle Hu, u\rangle \geqslant 0, \quad \forall\ u(x) \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R}). \tag{2.9}$$

С другой стороны, в силу неравенства Гельдера и неравенства Юнга (2.6), для любого $u \in L_p(\mathbb{R})$ имеем:

$$\big|\langle Hu, u\rangle\big| \leqslant \|Hu\|_q\|u\|_p \leqslant \|h\|_{q/2}\|u\|_p^2,$$

т.е. функционал $\langle Hu, u\rangle$ непрерывен в $L_p(\mathbb{R})$. Поскольку множество $L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R})$ всюду плотно в классе $L_p(\mathbb{R})$ и $\langle Hu, u\rangle$ есть непрерывный функционал, то неравенство $\operatorname{Re}\langle Hu, u\rangle \geqslant 0$, т.е. неравенство (2.9), выполняется для любого $u \in L_p(\mathbb{R})$.

Необходимость. Докажем теперь, что условие (2.5) так же и необходимо для положительности оператора H. Пусть неравенство (2.4) выполнено. Нужно доказать, что тогда $\operatorname{Re}\widehat{h}(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, т.е. выполнено условие (2.5). Допустим противное, что условие (2.5) не выполняется, т.е. существует точка $x_0 \in \mathbb{R}$ такая, что $\operatorname{Re}\widehat{h}(x_0) < 0$. Поскольку, по теореме Римана-Лебега, $\operatorname{Re}\widehat{h}(x)$ есть непрерывная на всей оси $\mathbb{R}$ функция, то найдется достаточно малая ε-окрестность $U_\varepsilon(x_0) = \{x : \ |x - x_0| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, точки x_0 такая, что будет выполняться неравенство

$$\operatorname{Re}\widehat{h}(x) < 0, \quad \forall\, x \in U_\varepsilon(x_0).$$

Выберем целую функцию u такую, что $u_{|\mathbb{R}} \in L_p(\mathbb{R})$, $\widehat{u}(x) = 0$ для $x \notin U_\varepsilon(x_0)$ и $\widehat{u}(x) \neq 0$, если $x \in U_\varepsilon(x_0)$. Тогда, учитывая, что $\forall x \in U_\varepsilon(x_0)$ выполняются строгие неравенства $\operatorname{Re}\widehat{h}(x) < 0$ и $|\widehat{u}(x)| > 0$, по формуле (2.7) для так выбранной функции $u(x)$ получим

$$\operatorname{Re}\langle Hu, u\rangle = \sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}\widehat{h}(x)\cdot|\widehat{u}(x)|^2\,dx = \sqrt{2\pi}\int\limits_{U_\varepsilon(x_0)} \operatorname{Re}\widehat{h}(x)\cdot|\widehat{u}(x)|^2\,dx < 0,$$

что противоречит неравенству (2.4), которое по предположению выполнено для любого $u \in L_p(\mathbb{R})$. □

При исследовании нелинейных интегральных уравнений типа свертки вида (1.1) нам понадобится также следующая лемма, двойственная лемме 2.1.

Лемма 2.2. *Пусть $p \geqslant 2$ и ядро $h \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_{p/2}(\mathbb{R})$. Для того, чтобы оператор свертки H (действующий непрерывно из $L_q(\mathbb{R})$ в $L_p(\mathbb{R})$) был положительным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2.5).*

Доказательство леммы 2.2 проводится точно так же, как и доказательство леммы 2.1.

3. Теоремы существования и единственности решения в $L_p(\mathbb{R})$

Приведем определения, обозначения и некоторые результаты из теории монотонных (по Браудеру-Минти) операторов, используемые в данной статье.

Пусть X – комплексное банахово пространство и X^* – сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle y, x\rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$, а через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ нормы в X и X^*, соответственно. В частности, если X есть гильбертово пространство H, то $\langle y, x\rangle$ совпадает со скалярным произведением (y, x), где $x, y \in H$.

Определение 3.1. *Пусть $u, v \in X$ – произвольные элементы. Оператор $A : X \to X^*$ (т.е. действующий из X в X^*) называется:*

монотонным, если $\operatorname{Re}\langle Au - Av, u - v\rangle \geqslant 0$*;*

строго монотонным, если $\operatorname{Re}\langle Au - Av, u - v\rangle > 0$ *при* $u \neq v$*;*

сильно монотонным, если $\operatorname{Re}\langle Au - Av, u - v\rangle \geqslant m\cdot\|u - v\|^2$, $m > 0$*;*

коэрцитивным, если

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle}{\|u\|} = \infty;$$

липшиц-непрерывным, если $\|Au - Av\|_* \leqslant M\cdot\|u - v\|$, $M > 0$*;*

хеминепрерывным, если функция $s \to \langle A(u + s\cdot v), w\rangle$ *непрерывна на* $[0, 1]$ *при любых фиксированных* $u, v, w \in X$*;*

деминепрерывным, если из сильной сходимости $u_n \to u$ *в* X *следует слабая сходимость* $Au_n \to Au$ *в* X^*.

Если A – *линейный* оператор, то определение монотонного, строго монотонного и сильно монотонного оператора совпадает, соответственно, с определением *положительного, строго положительного* и *сильно положительного* (*положительно определенного*) оператора [10, § 1].

Известно [11, Замечание 1.8, глава III], что для монотонных операторов понятия *хеминепрерывность* и *деминепрерывность*, являющиеся ослаблением обычного понятия непрерывности, совпадают.

Основной в теории монотонных операторов является следующая теорема Ф. Браудера и Г. Минти [11, § 2, глава III] (в случае комплексных пространств X она доказана в [10, § 18] и [18, Теорема 1.1, глава II]).

Теорема 3.1. *Пусть X есть рефлексивное банахово пространство и оператор $A : X \to X^*$ является хеминепрерывным, монотонным и коэрцитивным. Тогда уравнение $Au = f$ имеет решение $u^* \in X$ для любого $f \in X^*$. Это решение единственно в X, если A - строго монотонный оператор.*

Обозначим через $\mathbb{C}$ множество всех комплексных чисел, а через $L_p^+(\mathbb{R})$ – множество всех неотрицательных функций из $L_p(\mathbb{R})$. Введем в рассмотрение нелинейный оператор суперпозиции (часто называемый оператором Немыцкого [10]) $(Fu)(x) = F[x, u(x)]$, порожденный комплекснозначной функцией $F(x,z) : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющей известным условиям Каратеодори: она измерима по $x \in \mathbb{R}$ при каждом фиксированном $z \in \mathbb{C}$ и непрерывна по z почти для всех $x \in \mathbb{R}$.

Выпишем для удобства ссылок все ограничения на функцию $F(x,z)$, определяющую нелинейность исследуемых в этом пункте уравнений. Именно в зависимости от рассматриваемого класса нелинейных интегральных уравнений типа свертки, будем накладывать на нелинейность $F(x,z)$ либо условия 3.1)—3.3), либо условия 3.4)—3.6), где всюду $p \in (1, \infty)$:

3.1) *существуют $c \in L_q^+(\mathbb{R})$ и $d_1 > 0$ такие,что для почти всех $x \in \mathbb{R}$ и любого $z \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство*:

$$|F(x,z)| \leqslant c(x) + d_1 \cdot |z|^{p-1};$$

3.2) *для почти всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство*:

$$\operatorname{Re}\left\{[F(x,z_1) - F(x,z_2)] \cdot \overline{(z_1 - z_2)}\right\} \geqslant 0;$$

3.3) *существуют $D \in L_1^+(\mathbb{R})$ и $d_2 > 0$ такие, что для почти всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $z \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство*:

$$\operatorname{Re}\{F(x,z) \cdot \bar{z}\} \geqslant d_2 \cdot |z|^p - D(x);$$

3.4) *существуют $g \in L_p^+(\mathbb{R})$ и $d_3 > 0$ такие, что для почти всех $x \in \mathbb{R}$ и любого $z \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство*:

$$|F(x,z)| \leqslant g(x) + d_3 \cdot |z|^{1/(p-1)};$$

3.5) *для почти всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство*:

$$\operatorname{Re}\left\{[F(x,z_1) - F(x,z_2)] \cdot \overline{(z_1 - z_2)}\right\} > 0;$$

3.6) *существуют $D \in L_1^+(\mathbb{R})$ и $d_4 > 0$ такие, что для почти всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $z \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство*:

$$\operatorname{Re}\{F(x,z) \cdot \bar{z}\} \geqslant d_4 \cdot |z|^{p/(p-1)} - D(x).$$

Заметим, что если выполнены условия 3.1)—3.3), то оператор Немыцкого F, порожденный функцией $F(x,z)$, действует из $L_p(\mathbb{R})$ в $L_q(\mathbb{R})$ и является непрерывным, монотонным и коэрцитивным оператором. Если же выполнены условия 3.4)—3.6), то оператор F действует наоборот из $L_q(\mathbb{R})$ в $L_p(\mathbb{R})$ и является непрерывным, строго монотонным и коэрцитивным оператором (см., например, [1, § 2]).

Простейшим примером функции $F(x,z)$, удовлетворяющей условиям 3.1)–3.3), может служить $F(x,z) = z\cdot|z|^{p-2}$, где $p \geqslant 2$ есть любое число. В самом деле, выполнение условий 3.1) и 3.3) для такой функции очевидно, при этом $\|Fu\|_q = \|u\|_p^{p-1}$, $\mathrm{Re}\,\langle Fu,u\rangle = \|u\|_p^p$. Проверим выполнимость условия 3.2) при $p > 2$ (выполнение этого условия при $p = 2$ очевидно). Для любых $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i\,y_2$, имеем:

$$[F(x,z_1) - F(x,z_2)]\cdot\overline{[z_1 - z_2]} = |z_1|^p - |z_1|^{p-2}z_1\,\overline{z_2} - |z_2|^{p-2}z_2\,\overline{z_1} + |z_2|^p.$$

Так как

$$\mathrm{Re}\,(z_1\,\overline{z_2}) = \mathrm{Re}\,(z_2\,\overline{z_1}) = x_1x_2 + y_1y_2 \leqslant \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) = \frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2),$$

то

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\Big\{[F(x,z_1) - F(x,z_2)]\cdot\overline{[z_1 - z_2]}\Big\} &= |z_1|^p + |z_2|^p - (x_1x_2 + y_1y_2)(|z_1|^{p-2} + |z_2|^{p-2})\\ &\geqslant |z_1|^p + |z_2|^p - \frac{1}{2}\,(|z_1|^2 + |z_2|^2)(|z_1|^{p-2} + |z_2|^{p-2})\\ &= \frac{1}{2}\,(|z_1|^{p-2} - |z_2|^{p-2})(|z_1|^2 - |z_2|^2) \geqslant 0\,,\end{aligned}$$

т.е. выполнено условие 3.2).

Рассмотрим сначала наиболее простое для исследования методом монотонных операторов уравнение, в которое нелинейный оператор суперпозиции и линейный оператор свертки входят как слагаемые.

Теорема 3.2. *Пусть $1 < p \leqslant 2$, ядро $h \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_{q/2}(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию (2.5). Если нелинейность $F(x,z)$ удовлетворяет условиям 3.1)—3.3), то уравнение*

$$F[x,u(x)] + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)u(t)\,dt = f(x) \tag{3.1}$$

имеет решение $u^* \in L_p(\mathbb{R})$ при любом $f \in L_q(\mathbb{R})$. Это решение единственно, если вместо условия 3.2) выполнено условие 3.5). При этом, если условие 3.3) выполнено с $D(x) = 0$, справедлива оценка:

$$\|u^*\|_p \leqslant \left(d_2^{-1}\cdot\|f\|_q\right)^{1/(p-1)}.$$

Доказательство. Запишем уравнение (3.1) в операторном виде: $Au = f$, где $A = F + H$. Из условий 3.1)—3.3) вытекает, что оператор суперпозиции F, порожденный функцией $F(x,z)$, действует из $L_p(\mathbb{R})$ в $L_q(\mathbb{R})$ и является непрерывным, монотонным и коэрцитивным оператором, причем он является строго монотонным оператором, если выполнено условие 3.5). Из леммы 2.1 вытекает, что оператор свертки H также действует из $L_p(\mathbb{R})$ в $L_q(\mathbb{R})$ и является непрерывным и положительным (или, что то же самое, монотонным, в силу его линейности) оператором. Значит, оператор A действует непрерывно (а значит и хеминепрерывно) из рефлексивного пространства $L_p(\mathbb{R})$ в сопряженное с ним пространство $L_q(\mathbb{R})$ и является монотонным и коэрцитивным оператором, причем он является строго монотонным оператором, если выполнено условие 3.5). Поэтому, в силу теоремы 3.1 (Браудера-Минти), уравнение $Au = f$, а значит и уравнение (3.1), имеет решение $u^* \in L_p(\mathbb{R})$ и это решение единственно, если выполнено условие 3.5).

Осталось доказать оценку нормы решения. Пусть $u^* \in L_p(\mathbb{R})$ есть решение уравнения (3.1), т.е. $Au^* = f$. Используя сначала условие 3.3) при $D(x) = 0$, а затем положительность оператора свертки H, равенство $Au^* = f$ и неравенство Гельдера, имеем

$$d_2 \cdot \|u^*\|_p^p \leqslant \operatorname{Re}\langle Fu^*, u^*\rangle \leqslant \operatorname{Re}\langle Fu^*, u^*\rangle + \operatorname{Re}\langle Hu^*, u^*\rangle =$$
$$= \operatorname{Re}\langle Au^*, u^*\rangle = \operatorname{Re}\langle f, u^*\rangle \leqslant \|f\|_q \cdot \|u^*\|_p,$$

откуда непосредственно вытекает доказываемая оценка. □

Следует отметить, что оператор Немыцкого F является одним из немногих нелинейных операторов, для которых известны критерии их поведения. Так, например, условие 3.1) необходимо и достаточно для того, чтобы оператор F действовал из $L_p(\mathbb{R})$ в сопряженное с ним пространство $L_q(\mathbb{R})$, $q = p/(p-1)$, и был непрерывным, а условие 3.2) необходимо и достаточно для того, чтобы этот оператор был монотонным (ср. [10]). Благодаря этим критериям, при выполнении условий 3.1), 3.2) и 3.5), удается доказать существование, хеминепрерывность, строгую монотонность и, что особенно важно для доказательства следующих двух теорем, корцитивность обратного оператора F^{-1}.

Приступим теперь к исследованию уравнения вида (1.1), относящемуся к известному классу нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна. Следует отметить, что метод монотонных (по Браудеру-Минти) операторов применялся к нелинейным интегральным уравнениям вида (1.1) с общим ядром $k(x,t)$, вместо разностного ядра $h(x-t)$, во многих работах (см., например, [10], [19], [20]), однако в этих работах заведомо предполагается, что линейный интегральный оператор с ядром $k(x,t)$ действует из пространства Лебега в сопряженное с ним пространство и является положительным, но не приводятся условия, при которых этот оператор обладает такими свойствами. В случае разностного ядра $h(x-t)$ указанные условия представлены в следующей теореме.

Теорема 3.3. *Пусть $p \geqslant 2$, ядро $h \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_{p/2}(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию (2.5). Если нелинейность $F(x,z)$ удовлетворяет условиям 3.1), 3.3) и 3.5), то уравнение*

$$u(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)F[t, u(t)]\,dt = f(x) \tag{3.2}$$

имеет единственное решение $u^* \in L_p(\mathbb{R})$ при любом $f \in L_p(\mathbb{R})$. При этом, если условия 3.1) и 3.3) выполняются с $c(x) = 0$ и $D(x) = 0$, справедлива оценка:

$$\|u^*\|_p \leqslant \frac{d_1}{d_2} \cdot \|f\|_p.$$

Доказательство. Из условий 3.1), 3.3) и 3.5) вытекает, что оператор суперпозиции F отображает пространство $L_p(\mathbb{R})$ на все пространство $L_q(\mathbb{R})$, непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. В силу леммы 2.1 из [1], существует обратный оператор F^{-1}, отображающий $L_q(\mathbb{R})$ на $L_p(\mathbb{R})$, хеминепрерывный, строго монотонный и коэрцитивный. С учетом леммы 2.2 имеем, что оператор $A = F^{-1} + H$ действует из $L_q(\mathbb{R})$ в $L_p(\mathbb{R})$, хеминепрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, на основании теоремы 3.1 (Браудера-Минити), уравнение $Av = f$ имеет единственное решение $v^* \in L_q(\mathbb{R})$ при любом $f \in L_p(\mathbb{R})$. Но тогда $u^* = F^{-1}v^* \in L_p(\mathbb{R})$ является решением уравнения $u + HFu = f$, т.е. данного уравнения (3.2) и оно единственно, в силу условия 3.5).

Осталось доказать оценку нормы решения. Пусть $u^* \in L_p(\mathbb{R})$ есть решение уравнения (3.2), т.е. $u^* + HFu^* = f$. Используя сначала условие 3.3) при $D(x) = 0$, а затем положительность оператора свертки H, равенство $u^* + HFu^* = f$, неравенство Гельдера и условие

3.1) при $c(x) = 0$, имеем

$$d_2 \cdot \|u^*\|_p^p \leqslant \mathrm{Re}\,\langle u^*, Fu^*\rangle \leqslant \mathrm{Re}\,\langle u^*, Fu^*\rangle + \mathrm{Re}\,\langle HFu^*, Fu^*\rangle = \mathrm{Re}\,\langle u^* + HFu^*, Fu^*\rangle$$
$$= \mathrm{Re}\,\langle f, Fu^*\rangle \leqslant d_1 \cdot \|f\|_p \cdot \|Fu^*\|_q \leqslant d_1 \cdot \|f\|_p \cdot \|u^*\|_p^{p-1},$$

откуда непосредственно вытекает доказываемая оценка. □

Следующая теорема отличается от теорем 3.2 и 3.3 как по характеру ограничений накладываемых на нелинейность $F(x, z)$, так и по структуре доказательства.

Теорема 3.4. *Пусть $1 < p \leqslant 2$, ядро $h \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_{q/2}(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию (2.5). Если нелинейность $F(x, z)$ удовлетворяет условиям 3.4)–3.6), то уравнение*

$$u(x) + F\left[x, \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)u(t)\,dt\right] = f(x) \tag{3.3}$$

имеет единственное решение $u^* \in L_p(\mathbb{R})$ при любом $f \in L_p(\mathbb{R})$. При этом, если условия 3.4) и 3.6) выполняются с $g(x) = 0$ и $D(x) = 0$, справедлива оценка:

$$\|u^*\|_p \leqslant \left(\frac{d_3}{d_4} + 1\right) \cdot \|f\|_p.$$

Доказательство. Из условий 3.4)—3.6) вытекает, что оператор суперпозиции F отображает сопряженное пространство $L_q(\mathbb{R})$ на исходное пространство $L_p(\mathbb{R})$, в котором ищется решение уравнения (3.3), и является непрерывным, строго монотонным и коэрцитивным оператором. В силу леммы 2.1 из [1], существует обратный оператор F^{-1}, отображающий $L_p(\mathbb{R})$ на $L_q(\mathbb{R})$, хеминепрерывный, строго монотонный и коэрцитивный. С учетом доказанной выше леммы 2.1 имеем, что оператор $A = F^{-1} + H$ действует из $L_p(\mathbb{R})$ в $L_q(\mathbb{R})$, хеминепрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, на основании теоремы 3.1 (Браудера-Минити), уравнение $Au = Hf$, где $Hf \in L_q(\mathbb{R})$, согласно лемме 2.1, имеет единственное решение $v^* \in L_p(\mathbb{R})$ при любом $f \in L_p(\mathbb{R})$. Но тогда $u^* = f - v^*$ является решением уравнения $u + FHu = f$, т.е. данного уравнения (3.3), и это решение единственно, в силу условия 3.5).

Осталось доказать оценку нормы решения. Пусть $u^* \in L_p(\mathbb{R})$ есть решение уравнения (3.3), т.е. $u^* + FHu^* = f$. Используя условие 3.4) при $g(x) = 0$, имеем

$$\|u^* - f\|_p = \|FHu^*\|_p \leqslant d_3 \cdot \|Hu^*\|_q^{q-1}. \tag{3.4}$$

Далее, так как $\langle u^* + FHu^*, Hu^*\rangle = \langle f, Hu^*\rangle$, то в силу положительности оператора свертки H получаем

$$\mathrm{Re}\,\langle FHu^*, Hu^*\rangle \leqslant \mathrm{Re}\,\langle u^* + FHu^*, Hu^*\rangle = \mathrm{Re}\,\langle f, Hu^*\rangle \leqslant \|f\|_p \cdot \|Hu^*\|_q. \tag{3.5}$$

С другой стороны, используя условие 3.6) при $D(x) = 0$, имеем

$$\mathrm{Re}\,\langle FHu^*, Hu^*\rangle \geqslant d_4 \cdot \|Hu^*\|_q^q. \tag{3.6}$$

Сравнивая неравенства (3.5) и (3.6), получаем оценку $\|Hu^*\|_q^{q-1} \leqslant d_4^{-1} \cdot \|f\|_p$. Но тогда из неравенства (3.4) следует, что $\|u^* - f\|_p \leqslant d_3 \cdot d_4^{-1} \cdot \|f\|_p$. Поскольку $\|u^*\|_p - \|f\|_p \leqslant \|u^* - f\|_p$, то из последнего неравенства непосредственно вытекает доказываемая оценка. □

Заметим, что при $p = 2$ теоремы 3.2–3.4 охватывают, в частности, и случай линейных интегральных уравнений типа свертки. Кроме того, из полученных в теоремах 3.2–3.4 оценок для норм решений непосредственно вытекает, что при $f(x) \equiv 0$ уравнения (3.1)–(3.3) имеют в $L_p(\mathbb{R})$ лишь тривиальное решение $u^*(x) = 0$.

4. Приближенное решение уравнений в $L_2(\mathbb{R})$

В предыдущем пункте доказаны теоремы 3.2–3.4 о существовании, единственности и оценках решений уравнений (3.1)–(3.3). Однако эти теоремы не содержат информации о том, как можно найти решения указанных уравнений. В данном пункте, комбинируя метод монотонных (по Браудеру-Минти) операторов и принцип сжимающих отображений (ср. [11, глава III, теорема 3.4]), доказывается, что решения нелинейных интегральных уравнений типа свертки (3.1)–(3.3) могут быть найдены методом последовательных приближений пикаровского типа в комплексных пространствах $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 4.1. *Пусть ядро $h \in L_1(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию (2.5). Если нелинейность $F(x,z)$ удовлетворяет условиям:*

4.1) *существует число $M > 0$ такое, что для почти всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство:*

$$|F(x,z_1) - F(x,z_2)| \leqslant M \cdot |z_1 - z_2|;$$

4.2) *существует число $m > 0$ такое, что для почти всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство:*

$$\operatorname{Re}\left\{[F(x,z_1) - F(x,z_2)] \cdot \overline{(z_1 - z_2)}\right\} \geqslant m \cdot |z_1 - z_2|^2,$$

то уравнение (3.1) имеет единственное решение $u^* \in L_2(\mathbb{R})$ при любом $f \in L_2(\mathbb{R})$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле:

$$u_n = u_{n-1} - \mu_1 \cdot (Fu_{n-1} + Hu_{n-1} - f), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.1}$$

причем справедлива оценка скорости их сходимости:

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \mu_1 \cdot \frac{\alpha_1^n}{1-\alpha_1} \cdot \|Fu_0 + Hu_0 - f\|_2, \tag{4.2}$$

где $\mu_1 = m \cdot (M + \|h\|_1)^{-2}$, $\alpha_1 = \sqrt{1 - m \cdot \mu_1}$, $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$ – произвольная функция.

Доказательство. Запишем уравнение (3.1) в операторном виде: $Au = f$, где $A = F + H$. Из условий 4.1)—4.2) вытекает, что оператор суперпозиции F, порожденный функцией $F(x,z)$, действует из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$ и является липшиц-непрерывным и сильно монотонным оператором, причем $\forall u, v \in L_2(\mathbb{R})$ выполняются неравенства:

$$\|Au - Av\|_2 \leqslant (M + \|h\|_1) \cdot \|u - v\|_2, \quad \operatorname{Re}(Au - Av, u - v) \geqslant m \cdot \|u - v\|_2^2.$$

Поскольку сильная монотонность оператора влечет за собой его строгую монотонность и коэрцитивность, то по теореме 3.1 (Браудера-Минти) уравнение $Au = f$, т.е. данное уравнение (3.1), имеет единственное решение $u^* \in L_2(\mathbb{R})$.

Осталось доказать, что это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле (4.1) с оценкой скорости их сходимости (4.2). Для этого заменим уравнение $Au = f$ на эквивалентное уравнение $u = \Phi u$, где $\Phi u = u - \mu \cdot (Au - f)$ и $\mu > 0$ любое (пока) число. Очевидно, что оператор Φ действует из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$ и

$$\begin{aligned}\|\Phi u - \Phi v\|_2^2 &= \big(u - v - \mu \cdot (Au - Av), u - v - \mu \cdot (Au - Av)\big)\\ &= \|u - v\|_2^2 - 2\mu \cdot \operatorname{Re}(Au - Av, u - v) + \mu^2 \cdot \|Au - Av\|_2^2\\ &\leqslant \Big(1 - 2\mu \cdot m + \mu^2 \cdot (M + \|h\|_1)^2\Big) \cdot \|u - v\|_2^2.\end{aligned}$$

Легко проверить, что выражение $1 - 2\mu \cdot m + \mu^2 \cdot (M + \|h\|_1)^2$ принимает наименьшее значение, равное $1 - m^2 \cdot (M + \|h\|_1)^{-2}$, при $\mu = \mu_1$. Выбрав указанное μ, получаем

$$\|\Phi u - \Phi v\|_2 \leqslant \alpha_1 \cdot \|u - v\|_2,$$

где $\alpha_1 = \sqrt{1 - m \cdot \mu_1} \in (0, 1)$.

Следовательно, оператор Φ является сжимающим и поэтому формула (4.1) и оценка (4.2) непосредственно вытекают из принципа сжимающих отображений Банаха. $\square$

Доказательство теорем, подобных теореме 4.1, для уравнений (3.2) и (3.3) вызывают дополнительные трудности, которые приводят к тому, что последовательные приближения и оценки скорости их сходимости содержат оператор F^{-1}, обратный оператору F. А именно, справедливы следующие две теоремы.

Теорема 4.2. *Пусть ядро $h \in L_1(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию (2.5). Если нелинейность $F(x,z)$ удовлетворяет условиям 4.1) и 4.2), то уравнение (3.2) имеет единственное решение $u^* \in L_2(\mathbb{R})$ при любом $f \in L_2(\mathbb{R})$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле:*

$$u_n = F^{-1}v_n,\ v_n = v_{n-1} - \mu_2 \cdot (F^{-1}v_{n-1} + Hv_{n-1} - f), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.3}$$

где $\mu_2 = m/[M \cdot (m^{-1} + \|h\|_1)]^2$, F^{-1} есть оператор, обратный к F. При этом справедлива оценка скорости сходимости последовательных приближений:

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \frac{\mu_2}{m} \cdot \frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2} \cdot \|F^{-1}v_0 + Hv_0 - f\|_2, \tag{4.4}$$

где $\alpha_2 = \sqrt{1 - m \cdot \mu_2/M^2}$, $v_0(x) \in L_2(\mathbb{R})$ – произвольная функция.

Доказательство. Из условий 4.1) и 4.2) вытекает, что оператор суперпозиции F действует из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$ и является строго монотонным, хеминепрерывным, коэрцитивным и ограниченным оператором, т.е. удовлетворяет всем требованиям теоремы 1.9 [1]. Значит, существует обратный оператор F^{-1}, действующий из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$, причем (ср. [11, глава III, следствие 2.3]) $\forall u, v \in L_2(\mathbb{R})$ выполняются неравенства:

$$\|F^{-1}u - F^{-1}v\|_2 \leqslant \frac{1}{m} \cdot \|u - v\|_2, \tag{4.5}$$

$$\mathrm{Re}\,(F^{-1}u - F^{-1}v, u - v) \geqslant \frac{m}{M^2} \cdot \|u - v\|_2^2. \tag{4.6}$$

Запишем данное уравнение (3.2) в операторном виде:

$$u + HFu = f. \tag{4.7}$$

В силу теоремы 3.3 оно имеет единственное решение $u^* \in L_2(\mathbb{R})$. Осталось доказать, что последовательность (4.3) сходится к u^* и справедлива оценка (4.4). Для этого наряду с уравнением (4.7) рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\Phi v = f, \quad \text{и} \quad \Phi = F^{-1} + H. \tag{4.8}$$

Очевидно, что если $v \in L_2(\mathbb{R})$ является решением уравнения (4.8), то $u^* = F^{-1}v^* \in L_2(\mathbb{R})$ является решением уравнения (4.7). Поэтому достаточно доказать, что уравнение (4.8) имеет единственное решение $v^* \in L_2(\mathbb{R})$, причем его можно найти по формуле (4.3) и справедлива оценка (4.4). Используя неравенство $\|Hu\|_2 \leqslant \|h\|_1 \cdot \|u\|_2$, являющееся следствием неравенства Юнга (2.6), лемму 2.1 и оценки (4.5) и (4.6), $\forall u, v \in L_2(\mathbb{R})$ имеем

$$\|\Phi u - \Phi v\|_2 \leqslant \left(m^{-1} + \|h\|_1\right) \cdot \|u - v\|_2, \tag{4.9}$$

$$\mathrm{Re}\,(\Phi u - \Phi v, u - v) \geqslant \frac{m}{M^2} \cdot \|u - v\|_2^2. \tag{4.10}$$

Далее, заменяя уравнение (4.8) на эквивалентное уравнение

$$v = \Psi v, \quad \text{где} \quad \Psi v = v - \mu \cdot (\Phi v - f), \quad \mu > 0,$$

как и при доказательстве теоремы 4.1, используя оценки (4.9) и (4.10), получим

$$\begin{aligned}\|\Psi u-\Psi v\|_2^2 =&\Big(u-v-\mu\cdot(\Phi u-\Phi v), u-v-\mu\cdot(\Phi u-\Phi v)\Big)\\ =&\|u-v\|_2^2-2\mu\cdot\mathrm{Re}\,(\Phi u-\Phi v, u-v)+\mu^2\cdot\|\Phi u-\Phi v\|_2^2\\ \leqslant&\Big(1-2\mu\cdot\frac{m}{M^2}+\mu^2\cdot(m^{-1}+\|h\|_1)^2\Big)\cdot\|u-v\|_2^2.\end{aligned}$$

Из условий 4.1) и 4.2) вытекает, что $m\leqslant M$. Так как $-1/m\leqslant -m/M^2$, то

$$0\leqslant 1-2\mu\cdot\frac{1}{m}+\mu^2\cdot\frac{1}{m^2}\leqslant 1-2\mu\cdot\frac{m}{M^2}+\mu^2\cdot(m^{-1}+\|h\|_1)^2<1,$$

если

$$\mu^2\cdot(m^{-1}+\|h\|_1)^2<2\mu\cdot\frac{m}{M^2},\quad \text{т.е.}\quad \mu<2\frac{m}{M^2}\cdot\frac{1}{(m^{-1}+\|h\|_1)^2}.$$

Поэтому, выбрав $\mu=\mu_2$, получим

$$1-2\mu\cdot\frac{m}{M^2}+\mu^2\cdot(m^{-1}+\|h\|_1)^2=1-m\cdot\mu_2/M^2.$$

В результате, при указанном μ имеем:

$$\|\Psi u-\Psi v\|_2\leqslant\alpha_2\cdot\|u-v\|_2,$$

где $\alpha_2=\sqrt{1-m\mu_2/M^2}\in(0,1)$.

Следовательно, на основании принципа сжимающих отображений, уравнение $v=\Psi v$, а значит, и уравнение (4.8), имеет единственное решение $v^*(x)\in L_2(\mathbb{R})$, причем последовательность

$$v_n=\Psi v_{n-1}=v_{n-1}-\mu_2\cdot(Hv_{n-1}+F^{-1}v_{n-1}-f),$$

т.е. последовательность (4.3), сходится к $v^*(x)$ и

$$\|v_n-v^*\|_2\leqslant\frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2}\cdot\|\Psi v_0-v_0\|_2=\mu_2\cdot\frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2}\cdot\|Hv_0+F^{-1}v_0-f\|_2. \tag{4.11}$$

Наконец, замечая, что $v^*=Fu^*$, и используя неравенства (4.5), (4.6), для решения $u^*=F^{-1}v^*\in L_2(\mathbb{R})$ уравнения (3.2) получаем

$$\begin{aligned}\|u_n-u^*\|_2=&\|F^{-1}v_n-F^{-1}v^*\|_2\leqslant\frac{1}{m}\cdot\|v_n-v^*\|_2\\ \leqslant&\frac{\mu_2}{m}\cdot\frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2}\cdot\|Hv_0+F^{-1}v_0-f\|_2,\end{aligned}$$

т.е. справедливо неравенство (4.4). □

Теорема 4.3. *Пусть ядро $h\in L_1(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию (2.5). Если нелинейность $F(x,z)$ удовлетворяет условиям 4.1) и 4.2), то уравнение (3.3) имеет единственное решение $u^*\in L_2(\mathbb{R})$ при любом $f\in L_2(\mathbb{R})$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле:*

$$u_n=u_{n-1}+\mu_2\cdot\big(F^{-1}(f-u_{n-1})-Hu_{n-1}\big),\quad n\in\mathbb{N}, \tag{4.12}$$

где $\mu_2=m/[M\cdot(m^{-1}+\|h\|_1)]^2$, F^{-1} есть оператор, обратный к F. При этом справедлива оценка скорости сходимости последовательных приближений:

$$\|u_n-u^*\|_2\leqslant\mu_2\cdot\frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2}\cdot\|F^{-1}(f-u_0)-Hu_0\|_2, \tag{4.13}$$

где $\alpha_2=\sqrt{1-m\cdot\mu_2/M^2}$, $u_0\in L_2(\mathbb{R})$ – произвольная функция.

Доказательство. Запишем уравнение (3.3) в операторном виде

$$u + FHu = f. \tag{4.14}$$

В силу теоремы 3.4 оно имеет единственное решение $u^* \in L_2(\mathbb{R})$. Осталось доказать, что последовательность (4.12) сходится к u^* и справедлива оценка (4.13). Для этого обозначим $f - u = v$. Тогда уравнение (4.14) примет вид $FH(f - v) = v$. Применив к обеим частям последнего уравнения оператор F^{-1}, существование которого установлено в доказательстве теоремы 4.2, приходим к уравнению

$$\Phi v = Hf, \quad \text{где} \quad \Phi v = F^{-1}v + Hv. \tag{4.15}$$

т.е. к уравнению вида (4.8).

Далее, заменив уравнение (4.15) на эквивалентное

$$v = Bv, \quad \text{где} \quad Bv = v - \mu \cdot (\Phi v - Hf), \quad \mu > 0,$$

точно так же, как и при доказательстве теоремы 4.2, выбрав $\mu = \mu_2$, получим

$$\|Bu - Bv\|_2 \leqslant \alpha_2 \cdot \|u - v\|_2.$$

Следовательно, на основании принципа сжимающих отображений, уравнение $v = Bv$, а значит, и уравнение (4.5), имеет единственное решение $v^* = f - u^* \in L_2(\mathbb{R})$, причем последовательность

$$v_n = v_{n-1} - \mu_2 \cdot (\Phi v_{n-1} - Hf) = v_{n-1} - \mu_2 \cdot \big(F^{-1}v_{n-1} + Hv_{n-1} - Hf\big) \tag{4.16}$$

сходится к v^* и

$$\|v_n - v^*\|_2 \leqslant \mu_2 \cdot \frac{\alpha_2^n}{1 - \alpha_2} \cdot \|F^{-1}v_0 + Hv_0 - Hf\|_2. \tag{4.17}$$

Но тогда $u^* = f - v^* \in L_2(\mathbb{R})$ является (единственным) решением уравнения (4.14) и, в силу связи $v_n = f - u_n$, из (4.16) и (4.17) получаем

$$f - u_n = f - u_{n-1} - \mu_2 \cdot \big(F^{-1}(f - u_{n-1}) - Hu_{n-1}\big),$$

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \mu_2 \cdot \frac{\alpha_2^n}{1 - \alpha_2} \cdot \|F^{-1}(f - u_0) - Hu_0\|_2,$$

т.е. справедливы утверждения (4.12) и (4.13). □

В заключение отметим, что аналогичные результаты можно получить (см. введение) в случае вещественных пространств $L_p(-\pi, \pi)$ без ограничений на $p \in (1, \infty)$, в отличие от теорем 3.2–3.4, а также для соответствующих нелинейных дискретных уравнений типа свертки как в вещественных, так и комплексных пространствах числовых последовательностей l_p (см., соответственно, [21] и [22]). При этом важную роль играют условия положительности операторов свертки, приведенные в [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.Н. Асхабов. *Нелинейные уравнения типа свертки.* М.: Физматлит. 2009.
2. H. Brunner. *Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications.* Cambridge: Cambr. Univ. Press. 2017.
3. V.E. Beneš. *A nonlinear integral equation from the theory of servo-mechanisms* // Bell. System. Techn. J. **40**:5, 1309–1321 (1961).
4. V.E. Beneš. *A nonlinear integral equation in the Marcinkiewicz space M_2* // J. Math. Phys. **44**:1, 24–35 (1965).
5. O. Diekman. *Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection* // J. Math. Biol. **6**:2, 109–130 (1978).
6. O. Diekman, H.G. Kaper. *On the bounded solutions of nonlinear convolutions equation* // Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl. **2**:6, 721–737 (1978).

7. Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский. *Уравнения типа свертки.* М.: Наука. 1978.
8. В. Хатсон, Дж. Пим. *Приложения функционального анализа и теории операторов.* М.: Мир. 1983.
9. М.А. Красносельский. *Положительные решения операторных уравнений.* М.: Физматлит. 1962.
10. М.М. Вайнберг. *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.* М.: Наука. 1972.
11. Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М.: Мир. 1978.
12. С.Н. Асхабов. *Периодические решения уравнений типа свертки с монотонной нелинейностью* // Уфимский матем. журнал. **8**:1, 22–37 (2016).
13. Р. Эдвардс. *Ряды Фурье в современном изложении. Том 1.* М.: Мир, 1985.
14. А.М. Нахушев. *Дробное исчисление и его применение* М.: Физматлит. 2003.
15. D. Porter, D. Stirling. *Integral equations. A practical treatment, from spectral theory to applications.* Cambridge: Cambr. Univ. Press. 1990.
16. S.N. Askhabov. *Positivity Conditions for Operators with Difference Kernels in Reflexive Spaces* // Journal of Math. Sciences. **250**:5, 717—727 (2020).
17. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Физматлит. 2004. 572 с.
18. Ю.А. Дубинский. *Нелинейные эллиптические и параболические уравнения* // Современные проблемы математики. Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. **9**, 5–130 (1976).
19. H. Brezis, F.E. Browder. *Some new results about Hammerstein equations* // Bull. Amer. Math. Soc. **80**:3, 567–572. (1974).
20. H. Brezis, F.E. Browder. *Nonlinear integral equations and systems of Hammerstein type* // Advances in Math. **18**, 567–572 (1975).
21. С.Н. Асхабов, Н.К. Карапетянц. *Дискретные уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью* // Дифференц. уравнения. **25**:10, 1777—1784 (1989).
22. S.N. Askhabov, N.K. Karapetian. *Convolution Type Discrete Equations with Monotonous Nonlinearity in Complex Spaces* // J. Integral Equat. Math. Phys. **1**:1, 44–66 (1992).

Султан Нажмудинович Асхабов,
Чеченский государственный университет,
ул. Шерипова, 32,
364024, г. Грозный, Россия

Чеченский государственный педагогический университет,
пр. Исаева, 62,
364068, г. Грозный, Россия
E-mail: askhabov@yandex.ru