ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 1 (2021). С. 3-16.

УДК 512.98

О ВОЗМУЩЕНИЯХ РАНГА ОДИН ПОЛУГРУППЫ СДВИГОВ НА ПОЛУПРЯМОЙ

Г.Г. АМОСОВ, Е.Л. БАЙТЕНОВ

Аннотация. Изучается частный случай возмущений полугруппы сдвигов на полупрямой, меняющих область определения ее генератора. Рассматривается возмущение генератора ранга один, определяемое экспонентой. Показано, что такое возмущение генератора всегда приводит к генератору некоторой C_0-полугруппы, действие которой получено в явном виде. Получен критерий изометричности и сжимаемости возмущенной полугруппы. Для сжимающего случая показано, что рассматриваемое возмущение генератора приводит к возмущению ранга один когенератора. Изученный частный случай служит для построения модели возмущения полугруппы сдвигов, определяемой интегральным уравнением относительно некоторой операторнозначной меры. В ситуации, когда область определения генератора не меняется, такое интегральное уравнение сводится к известному уравнению теории возмущений, где интегрирование ведется по обычной мере Лебега. В работе доказано, что если область определения генератора меняется, возмущение никогда не будет удовлетворять уравнению, где интегрирование ведется по мере Лебега. При меняющейся области определения возмущение будет уже удовлетворять интегральному уравнению с нетривиальной мерой, не имеющей плотности относительно меры Лебега. Полностью исследован вопрос о построении операторнозначной меры, определяющей интегральное уравнение, связывающее возмущенную полугруппу с исходной. Мера, когда она существует, получена в явном виде. Показано, что она определена неоднозначно. Изучен вопрос о возможности выбрать операторнозначную меру со значениями в множестве самосопряженных и положительных операторов.

Ключевые слова: полугруппа сдвигов, возмущения ранга один генератора, возмущения генератора, меняющие область определения.

Mathematics Subject Classification: 47B06, 46L51

1. Введение

Полугруппа сдвигов на полупрямой, действующая в пространстве $H = L^2(\mathbb{R}_+)$ по формуле

$$(S_t f)(x) = \begin{cases} f(x-t), & x > t, \\ 0, & 0 \leqslant x \leqslant t, \end{cases} \tag{1.1}$$

играет важнейшую роль в функциональном анализе [8]. Недавно, вдохновившись работой [4], авторы стали изучать возмущения полугруппы сдвигов $\{S_t,\ t \geqslant 0\}$, меняющие область определения ее генератора d, определенного известной формулой

$$(df)(x) = -f'(x),\ \ f \in D(d) = \{g:\ g' \in H,\ g(0) = 0\}. \tag{1.2}$$

G.G. Amosov, E.L. Baitenov, On rank one perturbations of the semigroup of shifts on the half axis.

Поступила 21 сентября 2020 г.

В предлагаемой работе мы используем дираковское скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle \equiv \langle\cdot|\cdot\rangle$, линейное по второму аргументу, а также следующие «дираковские» обозначения: вектор «кет» $|\xi\rangle$ отождествляется с элементом пространства $\xi \in H$; вектор «бра» $\langle\xi|$ отождествляется с функционалом из двойственного пространства, действующим по формуле $f \mapsto \langle\xi, f\rangle, f \in H$. Таким образом, если $\xi, \eta \in H$, а $A\colon H \to H$ — линейный оператор, то $\langle\xi|A|\eta\rangle = \langle\xi, Af\rangle$; в соответствии с этим, через $\langle\xi| A$ обозначается функционал на H, действующий как $f \mapsto \langle\xi, Af\rangle, f \in H$. Выражение $|\xi\rangle\langle\eta|,\ \xi,\eta \in H$, означает оператор ранга один, действующий по формуле

$$|\xi\rangle\langle\eta| f = \langle\eta, f\rangle \xi,\ f \in H.$$

В [2] был рассмотрен один очень частный случай возмущения, имеющий вид

$$\begin{aligned}\check{d}f =& d(f - \mu\langle\xi_0, f\rangle\eta), \quad \mu \geqslant 0,\\ f \in D(\check{d}) =& \{f:\ f' \in H,\ f(0) = \mu\langle\xi_0, f\rangle\eta(0)\},\end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\xi_0(x) = \sqrt{2}e^{-x}$, а вектор η такой, что $\eta' \in H$. В качестве мотивации выбора экспоненциального вектора ξ_0 для определения возмущения укажем, что он определяет дефектное подпространство генератора d, так что $d^*\xi_0 = -\xi_0$. Данное свойство и ранее использовалось при определении возмущения [3]. Как оказалось, если потребовать, чтобы $\check{d}$ был генератором полугруппы сжатий, получится, что η' и ξ_0 коллинеарны, если только $\mu \neq 0$. Таким образом, если постулировать вид (1.3), то имеет смысл рассматривать лишь возмущения вида

$$\begin{aligned}\check{d}f =& d(f - \mu\langle\xi_0, f\rangle\xi_0),\\ f \in D(\check{d}) =& \{f:\ f' \in H,\ f(0) = \sqrt{2}\mu\langle\xi_0, f\rangle\}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Более того, как оказалось, (1.4) является генератором полугруппы сжатий $\check{S} = \{\check{S}_t = e^{t\check{d}},\ t \geqslant 0\}$ только в том случае, когда $\mu = 0$ или $\mu \in (0,1]$. В этом случае $\check{S}$ будет состоять из изометрий.

В предлагаемой работе мы рассматриваем возмущения генератора полугруппы сдвигов вида

$$\begin{aligned}\check{d} =& d - \lambda|\xi_0\rangle\langle\xi_0|,\\ D(\check{d}) =& \{f \in H \mid f' \in H,\ f(0) = \sqrt{2}\mu\langle\xi_0, f\rangle\}.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Отметим, что возмущения полугрупп, меняющие область определения генератора, рассматривались и ранее. Здесь следует прежде всего отметить возмущения Desch–Schappacher ([5], ch. III). Рассматриваемое нами возмущение является очень частным случаем возмущения Деша–Шаппахера, определяемого для генератора произвольной C_0-полугруппы. Мы рассматриваем совершенно другой круг вопросов для нашего возмущения ранга один, определенного для генератора полугруппы сдвигов.

Нам удобно будет ввести дополнительный параметр

$$\alpha = \lambda - 2\mu + 1. \tag{1.6}$$

Показано, что для любого выбора комплексных параметров λ и μ (1.5) является генератором некоторой C_0-полугруппы. Действие полугруппы получено в явной форме отдельно для случаев $\alpha+1 \neq 0$ и $\alpha+1 = 0$. Установлено, когда такая полугруппа состоит из сжатий и изометрий.

Как известно [7], возмущение генератора C_0-полугруппы U ограниченным оператором A приводит к C_0-полугруппе V, удовлетворяющей интегральному уравнению:

$$V_t - \int_0^t U_s A V_{t-s}\, ds = U_t, \quad t \geqslant 0. \tag{1.7}$$

В работе [6] изучаются неограниченные возмущения динамических полугрупп, порождаемые операторнозначными мерами, связаными с эксцессивными отображениями, с помощью интегрального уравнения, обобщающего (1.7). В [1] рассматриваются возмущения, задаваемые тем же уравнением с абстрактными мерами. В обоих случаях меры принимают вполне положительные значения. Данные исследования служат мотивировкой для следующей задачи, решаемой в предлагаемой работе: поиск операторнозначных мер ν на полупрямой, по возможности положительных, со значениями в ограниченных операторах $\nu([t,s)) : H \to H$, для которых возмущенная полугруппа $\check{S}$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\check{S}_t\eta + \int\limits_0^t \langle \xi_0, \check{S}_{t-s}\eta\rangle\, \nu(ds)\xi_0 = S_t\eta,\ t \geqslant 0,\ \eta \in H. \tag{1.8}$$

Интегральное уравнение (1.8) является обобщением (1.7) для возмущения, меняющего область определения генератора.

2. Возмущения проектором на экспоненту

Мы построим полугруппу с генератором (1.5) при любых комплексных λ и μ. Начнем со случая $\alpha + 1 \neq 0$.

2.1. Случай $\alpha + 1 \neq 0$.

Положим

$$A = \frac{\lambda}{\alpha+1}, \quad B = \mu - \frac{\lambda}{\alpha+1}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ однопараметрическое семейство функций

$$v_t(x) = Ae^{-\alpha t}\xi_0(x) + B\begin{cases}\sqrt{2}e^{\alpha(x-t)}, & x \leqslant t,\\ \sqrt{2}e^{-x+t}, & x > t,\end{cases} \quad (t \geqslant 0, x \geqslant 0). \tag{2.2}$$

Установим некоторые свойства семейства v_t.

Предложение 2.1. *Семейство* (2.2) *сильно дифференцируемо по t, каждый член семейства обладает обобщенной производной из H, и справедливы равенства*

$$\begin{aligned}
\langle \xi_0, v_t\rangle =& Ae^{-\alpha t} + B\frac{(\alpha+1)e^{-t} - 2e^{-\alpha t}}{\alpha - 1} \quad (\alpha \neq 1), && (2.3)\\
\frac{d}{dt}\,|v_t\rangle =& -\alpha v_t + (\alpha+1)BS_t\xi_0, && (2.4)\\
\frac{\partial}{\partial x}v_t =& \alpha v_t - (1+\alpha)\left(Ae^{-\alpha t}\xi_0 + BS_t\xi_0\right), && (2.5)\\
S_\tau v_t =& v_{\tau+t} + \mu e^{-\alpha t}S_\tau\xi_0 - e^{-\alpha t}v_\tau, \quad \tau, t \geqslant 0. && (2.6)
\end{aligned}$$

Доказательство. Равенство (2.3) получается прямым вычислением.

Докажем сильную дифференцируемость. Будем считать, что t пробегает не полуось, а произвольный конечный отрезок $[0, T]$, на дифференцируемость это не влияет. Рассмотрим v_t как функцию неотрицательных переменных t и x. Частная производная по t равна

$$\dot{v}_t(x) = -\alpha Ae^{-\alpha t}\xi_0(x) + B\begin{cases}-\alpha\sqrt{2}e^{\alpha(x-t)}, & x \leqslant t,\\ \sqrt{2}e^{-x+t}, & x > t,\end{cases} \quad (t \geqslant 0, x \geqslant 0, x \neq t),$$

что при фиксированном t совпадает с правой частью (2.4) как функция от x (определенная всюду, кроме точки $x = t$). Тогда имеем $|\dot{v}_t(x)| \leqslant Ce^{-x}$, где C — некоторая константа, не зависящая от $t \in [0, T]$.

Фиксируем $t \in [0, T]$. При всех $x \neq t$ имеем

$$\lim_{\substack{\tau \to 0 \\ 0 \leqslant t+\tau \leqslant T}} \frac{v_{t+\tau}(x) - v_t(x)}{\tau} = \dot{v}_t(x).$$

С другой стороны, выражение $\frac{v_{t+\tau}(x)-v_t(x)}{\tau} - \dot{v}_t(x)$ ограничено по модулю величиной $2Ce^{-x}$. Тогда по теореме об ограниченной сходимости имеем

$$\lim_{\substack{\tau \to 0 \\ 0 \leqslant t+\tau \leqslant T}} \int_0^{+\infty} \left| \frac{v_{t+\tau}(x) - v_t(x)}{\tau} - \dot{v}_t(x) \right|^2 dx = 0,$$

что означает сильную дифференцируемость и равенство (2.4).

Докажем равенство (2.5). При всяком t функция $v_t(x)$ абсолютно непрерывна, ее производная равна

$$\frac{\partial}{\partial x} v_t(x) = -Ae^{-\alpha t}\xi_0(x) + B \begin{cases} \alpha\sqrt{2}e^{\alpha(x-t)}, & x \leqslant t, \\ -\sqrt{2}e^{-x+t}, & x > t, \end{cases} \quad (t \geqslant 0, x \geqslant 0, x \neq t),$$

что совпадает с (2.5).

Теперь докажем равенство (2.6). Левая часть равна

$$(S_\tau v_t)(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \tau, \\ B\sqrt{2}e^{\alpha(x-t-\tau)} + A\sqrt{2}e^{-\alpha t - x + \tau}, & \tau < x \leqslant t + \tau, \\ B\sqrt{2}e^{-x+t-\tau} + A\sqrt{2}e^{-\alpha t - x + \tau}, & x > t + \tau, \end{cases}$$

а правая —

$$\sqrt{2} \begin{cases} Ae^{-\alpha(t+\tau)-x} + Be^{\alpha(x-t-\tau)} - Ae^{-\alpha(t+\tau)-x} - Be^{-\alpha t + \alpha(x-\tau)}, & 0 \leqslant x \leqslant \tau, \\ Ae^{-\alpha(t+\tau)-x} + Be^{\alpha(x-t-\tau)} + \mu e^{-\alpha t - x + \tau} - Ae^{-\alpha(t+\tau)-x} - Be^{-\alpha t + \tau - x}, & \tau < x \leqslant t + \tau, \\ Ae^{-\alpha(t+\tau)-x} + Be^{-x+t+\tau} + \mu e^{-\alpha t - x + \tau} - Ae^{-\alpha(t+\tau)-x} - Be^{-\alpha t + \tau - x}, & x > t + \tau. \end{cases}$$

Используя (2.1), получаем равенство выписанных выражений. □

Рассмотрим теперь сильно непрерывное однопараметрическое семейство операторов

$$\check{S}_t = S_t - \mu S_t \left|\xi_0\right\rangle \left\langle\xi_0\right| + \left|v_t\right\rangle \left\langle\xi_0\right|, \quad t \geqslant 0. \tag{2.7}$$

Выясним, во-первых, как меняет $\check{S}_t$ проекцию на ξ_0.

Предложение 2.2. *Для всякого $f \in H$ имеем $\langle \xi_0, \check{S}_t f \rangle = \langle \xi_0, f \rangle e^{-\alpha t}$.*

Доказательство. Очевидно, что $\langle \xi_0 | S_t = e^{-t} \langle \xi_0 |$. При $\alpha \neq 1$ с учетом (2.3) имеем

$$\begin{aligned} \langle \xi_0 | \check{S}_t | f \rangle &= \langle \xi_0, f \rangle \left(e^{-t} \left(1 - \mu + \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} B \right) + e^{-\alpha t} \left(A - \frac{2B}{\alpha - 1} \right) \right) \\ &\overset{(2.1)}{=} \langle \xi_0, f \rangle e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

При $\alpha = 1$ имеем $\lambda = 2\mu$, $B = 0$, $v_t = \frac{\lambda}{2} e^{-t} \xi_0$ и тоже получаем

$$\begin{aligned} \langle \xi_0 | \check{S}_t | f \rangle &= \langle \xi_0 | S_t | f \rangle - \frac{\lambda}{2} \langle \xi_0 | S_t | \xi_0 \rangle \langle \xi_0, f \rangle + \frac{\lambda}{2} e^{-t} \langle \xi_0, \xi_0 \rangle \langle \xi_0, f \rangle \\ &= \langle \xi_0, f \rangle \left(e^{-t} - \frac{\lambda}{2} e^{-t} + \frac{\lambda}{2} e^{-t} \right) = \langle \xi_0, f \rangle e^{-t}. \end{aligned}$$

□

Теперь найдем, траектории каких векторов дифференцируемы при $t = 0$.

Предложение 2.3. *Для $f \in H$ функция $t \mapsto \check{S}_t f$ сильно дифференцируема в нуле тогда и только тогда, когда $f \in D(\check{d})$. При этом она оказывается сильно дифференцируемой при всех $t \geqslant 0$, причем*

$$\frac{d}{dt}\check{S}_t |f\rangle = \check{d}\check{S}_t |f\rangle = -\frac{\partial}{\partial x}\check{S}_t |f\rangle - \lambda |\xi_0\rangle \langle \xi_0|\check{S}_t|f\rangle . \tag{2.8}$$

Доказательство. Ясно, что третье слагаемое в (2.7) сильно дифференцируемо. Далее, первые два при действии на $f \in H$ дают

$$S_t \left(|f\rangle - \mu |\xi_0\rangle \langle \xi_0|f\rangle\right). \tag{2.9}$$

Как следует из свойств C_0-полугрупп и выражения (1.2), траектории полугруппы сдвигов S_t сильно дифференцируемы в нуле в точности на векторах из подпространства $D(d) = \{f \in H\colon f' \in H, f(0) = 0\}$, при этом сильная дифференцируемость в нуле распространяется на все $t \geqslant 0$, и производная $S_t |f\rangle$ по t равна $dS_t |f\rangle = -\frac{\partial}{\partial x} S_t |f\rangle$ $(f \in D(d))$. Значит, орбита (2.9) вектора $|f\rangle - \mu |\xi_0\rangle \langle \xi_0|f\rangle$ сильно дифференцируема в нуле (и следовательно для $t \geqslant 0$) тогда и только тогда, когда этот вектор лежит в $D(d)$, что равносильно условиям $f' \in H, f(0) = \sqrt{2}\mu \langle \xi_0, f\rangle$.

Дифференцируя $\check{S}_t |f\rangle$ для таких f, получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\check{S}_t |f\rangle &= -\frac{\partial}{\partial x}S_t \left(|f\rangle - \mu |\xi_0\rangle \langle \xi_0|f\rangle\right) + \frac{d}{dt} |v_t\rangle \langle \xi_0|f\rangle \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}S_t \left(|f\rangle - \mu |\xi_0\rangle \langle \xi_0|f\rangle\right) - \alpha |v_t\rangle + (\alpha+1)BS_t |\xi_0\rangle .\end{aligned} \tag{2.10}$$

Нам нужно показать, что (2.10) совпадает с правой частью (2.8).

С учетом предложения 2.2 правая часть (2.8) равна

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial x}S_t \left(|f\rangle - \mu |\xi_0\rangle \langle \xi_0|f\rangle\right) - \frac{\partial}{\partial x} |v_t\rangle \langle \xi_0|f\rangle - \lambda |\xi_0\rangle \langle \xi_0|f\rangle e^{-\alpha t} \\ &\overset{(2.5)}{=} -\frac{\partial}{\partial x}S_t \left(|f\rangle - \mu |\xi_0\rangle \langle \xi_0|f\rangle\right) - \Big(\alpha |v_t\rangle - (1+\alpha)\left(Ae^{-\alpha t} |\xi_0\rangle + BS_t |\xi_0\rangle\right)\Big) \langle \xi_0|f\rangle \\ &\quad - \lambda |\xi_0\rangle \langle \xi_0|f\rangle e^{-\alpha t}.\end{aligned}$$

Из определения (2.1) числа A следует, что

$$-\Big(-(1+\alpha)\left(Ae^{-\alpha t} |\xi_0\rangle\right)\Big) \langle \xi_0|f\rangle - \lambda |\xi_0\rangle \langle \xi_0|f\rangle e^{-\alpha t} = 0,$$

тогда с учетом равенства (2.10) получаем требуемое. □

Теперь мы готовы сформулировать главный результат о семействе (2.7).

Теорема 2.1. *Семейство* (2.7) *образует C_0-полугруппу с генератором* (1.5) *при условии $\alpha + 1 \neq 0$.*

Доказательство. Проверим полугрупповое свойство. Фиксируем $t_1, t_2 \geqslant 0$. Требуется убедиться, что $\check{S}_{t_1}\check{S}_{t_2} = \check{S}_{t_1+t_2}$. Из определения (2.7) видно, что это операторное равенство выполнено в ограничении на вектора, ортогональные ξ_0, поскольку на них семейство действует как полугруппа сдвигов. Остается проверить, что $\check{S}_{t_1}\check{S}_{t_2}\xi_0 = \check{S}_{t_1+t_2}\xi_0$. Имеем

$$\check{S}_{t_2}\xi_0 = (1-\mu)\, S_{t_2}\xi_0 + v_{t_2}.$$

Далее, по предложению 2.2 имеем $\langle \xi_0|\, \check{S}_{t_2} |\xi_0\rangle = e^{-\alpha t_2}$. Следовательно,

$$\check{S}_{t_1}\check{S}_{t_2}\xi_0 = S_{t_1}\left((1-\mu)\, S_{t_2}\xi_0 + v_{t_2}\right) - \mu S_{t_1}\xi_0 e^{-\alpha t_2} + v_{t_1}e^{-\alpha t_2}.$$

Преобразуя выражение $S_{t_1} |v_{t_2}\rangle$ с помощью (2.6), получаем

$$\begin{aligned}\check{S}_{t_1}\check{S}_{t_2}\xi_0 =& S_{t_1}(1-\mu)\, S_{t_2}\xi_0 + v_{t_1+t_2} + \mu e^{-\alpha t_2} S_{t_1}\xi_0 - e^{-\alpha t_2} v_{t_1} - \mu S_{t_1}\xi_0 e^{-\alpha t_2} + v_{t_1}e^{-\alpha t_2} \\ =& (1-\mu)\, S_{t_1+t_2}\xi_0 + v_{t_1+t_2},\end{aligned}$$

что совпадает с $\check{S}_{t_1+t_2}\xi_0$. Полугрупповое свойство доказано.

Семейство $\check{S}_t$ с очевидностью сильно непрерывно.

Генератор получившейся C_0-полугруппы совпадает с (1.5) вследствие предложения 2.3. $\square$

2.2. Случай $\alpha+1=0$**.** Следуя [2], обозначим $\xi_1(x)=\sqrt{2}(1-2x)e^{-x}$. Легко проверить, что $\xi_0\perp\xi_1$.

Рассмотрим семейство операторов

$$\check{S}_t = S_t + \left(e^t - S_t\right)\left|\xi_0 + \frac{\lambda}{2}\xi_1\right\rangle \langle\xi_0|\,, \quad t\geqslant 0. \tag{2.11}$$

Сформулируем легко проверяемое

Предложение 2.4. *Имеют место следующие свойства оператора* (2.11)*:*

$$\begin{aligned}\check{S}_t|\xi_0^\perp =& S_t|\xi_0^\perp,\\ \check{S}_t\left(\xi_0+\frac{\lambda}{2}\xi_1\right) =& e^t\left(\xi_0+\frac{\lambda}{2}\xi_1\right).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\check{S}_t$ — C_0-полугруппа: это прямая сумма C_0-полугрупп $S_t|\xi_0^\perp$ и $e^t|\operatorname{Span}\{\xi_0+\frac{\lambda}{2}\xi_1\}$. Оператор $\check{d}$ в нашем случае принимает вид

$$\check{d} = -\frac{d}{dx} - \lambda\,|\xi_0\rangle\langle\xi_0|\,,\quad D(\check{d}) = \left\{f\colon f'\in L^2(\mathbb{R}_+), f(0) = \frac{\lambda+2}{\sqrt{2}}\langle\xi_0|f\rangle\right\}.$$

Этот оператор действует на $\left|\xi_0+\frac{\lambda}{2}\xi_1\right\rangle$ умножением на 1. Также он действует на $\xi_0^\perp$ как генератор (1.2) невозмущенной полугруппы сдвигов. Далее, произвольный вектор лежит в $D(\check{d})$ тогда и только тогда, когда его проекция на $\xi_0^\perp$ вдоль $\left|\xi_0+\frac{\lambda}{2}\xi_1\right\rangle$ лежит в $D(\check{d})$. Тогда получаем следующий результат.

Теорема 2.2. *$\check{d}$ есть генератор полугруппы $\check{S}_t$ в случае $2+\lambda-2\mu=0$.*

Замечание 2.1. *В случае $\alpha=-1$ из равенства* (2.11) *следует, что для любого $f\in H$ верно $\langle\xi_0|\check{S}_t|f\rangle = e^t\langle\xi_0|f\rangle$. Таким образом, предложение 2.2 сохраняет силу. Далее мы будем ссылаться на него, не различая случаи $\alpha+1=0$ и $\alpha+1\neq 0$.*

2.3. Исследование на сжимаемость и изометричность. Выясним, когда полугруппа с генератором (1.5) является сжимающей или изометрической. Для начала исключим случай $\alpha+1=0$.

Теорема 2.3. *Если $\alpha+1=0$, то полугруппа с генератором* (1.5) *не является сжимающей.*

Доказательство. Вследствие предложения 2.4 действие операторов полугруппы (при $t>0$) на вектор $\xi_0+\frac{\lambda}{2}\xi_1$ увеличивает норму этого вектора. $\square$

Если A — генератор сжимающей C_0-полугруппы в гильбертовом пространстве, то можно построить когенератор $(A+I)(A-I)^{-1}$, оказывающийся всюду определенным и ограниченным оператором [8]. В частности, когенератор полугруппы сдвигов (1.1) имеет вид [8]

$$(T_S f)(x) = f(x) - 2\int\limits_0^x e^{t-x}f(t)\,dt. \tag{2.12}$$

В случае $\alpha+1\neq 0$ полугруппа с генератором $\check{d}$ (1.5), вообще говоря, не является сжимающей, однако оператор $\left(\check{d}+I\right)\left(\check{d}-I\right)^{-1}$ всегда существует.

Предложение 2.5. *Пусть оператор* $\check{d}$ *имеет вид* (1.5), *причем* $\alpha+1\neq 0$. *Тогда оператор* $T_{\check{S}}=\left(\check{d}+I\right)\left(\check{d}-I\right)^{-1}$ *существует и равен*

$$T_{\check{S}}=T_S+\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\left|\xi_0\right\rangle-\frac{\lambda}{\alpha+1}\left|\xi_1\right\rangle\right)\left\langle\xi_0\right|. \tag{2.13}$$

Доказательство. Пусть $f\in H$. Требуется показать, что уравнение

$$f=\left(\check{d}-I\right)g \tag{2.14}$$

имеет единственное решение $g\in H$ и вычислить

$$T_{\check{S}}f=\left(\check{d}+I\right)g=\left(\check{d}-I\right)g+2g=f+2g. \tag{2.15}$$

Из уравнения (2.14) следует

$$f=-g'-\lambda\left|\xi_0\right\rangle\left\langle\xi_0|g\right\rangle-g. \tag{2.16}$$

Поскольку g п. в. совпадает с интегралом от g', то ее можно считать абсолютно непрерывной на любом отрезке полуоси; тогда и функция $e^xg(x)$ абсолютно непрерывна на любом отрезке полуоси. Умножая (2.16) поточечно на e^x, получаем

$$e^xf(x)=-(e^xg(x))'-\sqrt{2}\lambda\left\langle\xi_0|g\right\rangle\quad(\text{для п. в. } x\geqslant 0).$$

Переходя к абсолютно непрерывным первообразным, получаем

$$e^xg(x)=-\int\limits_0^x e^tf(t)\,dt-\sqrt{2}\lambda\left\langle\xi_0|g\right\rangle x+a$$

для некоторого $a\in\mathbb{C}$, т.е.

$$g(x)=-e^{-x}\int\limits_0^x e^tf(t)\,dt-\sqrt{2}\lambda\left\langle\xi_0|g\right\rangle xe^{-x}+ae^{-x},$$

откуда с учетом $g\in D(\check{d})$ получаем $a=\sqrt{2}\mu\left\langle\xi_0|g\right\rangle$. Обозначим $\left\langle\xi_0|g\right\rangle=c$. Тогда (2.14) равносильно

$$\begin{cases} g(x)=-e^{-x}\int\limits_0^x e^tf(t)\,dt-\sqrt{2}\lambda cxe^{-x}+\sqrt{2}\mu ce^{-x},\\ c=\left\langle\xi_0|g\right\rangle. \end{cases} \tag{2.17}$$

Найдем c. (То, что c существует и единственно, будет означать существование и единственность g.) Имеем

$$c=\left\langle\xi_0|g\right\rangle=-\sqrt{2}\int\limits_0^{+\infty}e^{-2x}\int\limits_0^x e^tf(t)\,dt\,dx-\frac{1}{2}\lambda c+\mu c.$$

Преобразовав повторный интеграл с помощью теоремы Фубини, можно переписать последнее равенство в виде

$$c=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\infty e^{-t}f(t)\,dt-\frac{1}{2}\lambda c+\mu c=-\frac{1}{2}\left\langle\xi_0|f\right\rangle-\frac{1}{2}\lambda c+\mu c,$$

т.е.

$$c=-\frac{\left\langle\xi_0|f\right\rangle}{2+\lambda-2\mu}.$$

Тогда

$$f(x)+2g(x)=\left(T_Sf\right)(x)+2\left(-\sqrt{2}\lambda xe^{-x}+\sqrt{2}\mu e^{-x}\right)\left(-\frac{\left\langle\xi_0|f\right\rangle}{2+\lambda-2\mu}\right),$$

откуда сразу следует (2.13). □

В предыдущей статье мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2.4 ([2]). *Оператор $T_S + |f\rangle\langle\xi_0|$ является когенератором C_0-полугруппы сжатий тогда и только тогда, когда $f = c_0\xi_0 + c_1\xi_1$, где*

$$c_0, c_1 \in \mathbb{C}, \quad |c_0|^2 + |c_1+1|^2 \leqslant 1, \quad (c_0, c_1) \neq (1, -1). \tag{2.18}$$

При соблюдении этих условий, полугруппа состоит из изометрий тогда и только тогда, когда

$$|c_0|^2 + |c_1+1|^2 = 1. \tag{2.19}$$

Теорема 2.3 и предложение 2.5 вместе с теоремой 2.4 дают следующий критерий сжимаемости полугруппы с генератором (1.5).

Теорема 2.5. *Полугруппа с генератором $\check{d}$* (1.5) *является сжимающей тогда и только тогда, когда*

$$\alpha + 1 \neq 0, \quad \left|\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right|^2 + \left|\frac{2-2\mu}{\alpha+1}\right|^2 \leqslant 1. \tag{2.20}$$

При этом полугруппа оказывается изометрической тогда и только тогда, когда в (2.20) *достигается равенство.*

3. Операторнозначные меры

Отображение ν из алгебры ограниченных борелевских множеств на полупрямой $\mathbb{R}_+$ в алгебру всех ограниченных операторов $B(H)$ в гильбертовом пространстве H называется операторнозначной мерой, если ν слабо счетно-аддитивно на любом ограниченном борелевском множестве, т.е. для любой последовательности попарно непересекающихся борелевских множеств $A_1, A_2, \ldots$ с ограниченным объединением и любых векторов $\psi, \varphi \in H$ верно

$$\langle\psi|\,\nu(A_1)\,|\varphi\rangle + \langle\psi|\,\nu(A_2)\,|\varphi\rangle + \ldots = \langle\psi|\,\nu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots)\,|\varphi\rangle\,.$$

Для операторнозначной меры ν и векторов $\psi, \varphi \in H$ обозначим через $\nu_{\psi,\varphi}$ числовую функцию ограниченных борелевских множеств $\nu_{\psi,\varphi}\colon B \mapsto \langle\psi|\,\nu(B)\,|\varphi\rangle$. Очевидно, она задает счетно-аддитивную комплексную меру на любом отрезке полупрямой.

Уравнение (1.8) интересно изучать, поскольку оно обобщает известное соотношение (1.7) для возмущенной полугруппы, справедливое для неизменной области определения и принимающее в нашем случае вид

$$\check{S}_t\eta + \lambda\int\limits_0^t \langle\xi_0, \check{S}_{t-s}\eta\rangle\, S_s\xi_0 ds = S_t\eta,\ t \geqslant 0,\ \eta \in H. \tag{3.1}$$

Сначала покажем, что условие сохранения области определения генератора необходимо для выполнения равенства (3.1).

Предложение 3.1. *Если равенство* (3.1) *верно, то $\mu = 0$.*

Доказательство. Домножая (3.1) на $\langle\xi_0|$ слева, получаем

$$\langle\xi_0|\check{S}_t|\eta\rangle + \lambda\int\limits_0^t \langle\xi_0|S_s|\xi_0\rangle\,\langle\xi_0|\check{S}_{t-s}|\eta\rangle\, ds = \langle\xi_0|S_t|\eta\rangle\,. \tag{3.2}$$

Мы знаем, что $\langle\xi_0|S_t|\eta\rangle = e^{-t}\langle\xi_0|\eta\rangle$, $\langle\xi_0|\check{S}_t|\xi_0\rangle = e^{-\alpha t}\langle\xi_0|\eta\rangle$. Тогда (3.2) дает

$$e^{-\alpha t}\langle\xi_0|\eta\rangle + \lambda\,\langle\xi_0|\eta\rangle\int\limits_0^t e^{-s}e^{-\alpha(t-s)}ds = e^{-t}\langle\xi_0|\eta\rangle\,, \tag{3.3}$$

т.е., с учетом произвольности η,

$$\begin{cases} e^{-\alpha t} + \frac{\lambda\left(e^{-t}-e^{-\alpha t}\right)}{\alpha-1} = e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \left(e^{-\alpha t} - e^{-t}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha-1}\right) = 0, & \alpha \neq 1, \\ e^{-t}(1+t\lambda) = e^{-t}, & \alpha = 1, \end{cases}$$

откуда $\lambda = \alpha - 1$, т.е. $\mu = 0$. □

Теперь перейдем к построению меры ν для уравнения (1.8).

Возмущенная полугруппа $\check{S}_t$ обладает инвариантным подпространством $\xi_0^\perp$. Тогда равенство (1.8) автоматически выполняется для $\eta \perp \xi_0$. Из этого следует

Предложение 3.2. *Операторнозначная мера ν удовлетворяет уравнению* (1.8) *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет его частному случаю*

$$\check{S}_t\xi_0 + \int\limits_0^t \langle \xi_0, \check{S}_{t-s}\xi_0\rangle\, \nu(ds)\xi_0 = S_t\xi_0,\ t \geqslant 0. \tag{3.4}$$

С учетом предложения 2.2 равенство (3.4) переписывается в виде

$$\check{S}_t\xi_0 + e^{-\alpha t}\int\limits_0^t \nu(ds)\xi_0 e^{\alpha s} = S_t\xi_0,\ t \geqslant 0. \tag{3.5}$$

Теперь предъявим меру, удовлетворяющую (3.5).

Мы обозначаем индикаторную функцию множества $B \subset \mathbb{R}_+$ через $\chi_B(\cdot)$, а оператор умножения на функцию f — через $\mathbb{M}_{f(\cdot)}$ или просто $\mathbb{M}_f$.

Нам понадобится следующее техническое утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть f, g — непрерывные функции на $\mathbb{R}_+$. Тогда функция ν, заданная на ограниченных борелевских множествах как $\nu\colon B \mapsto \mathbb{M}_{\chi_B(\cdot)g(\cdot)}$ — корректно определенная операторнозначная мера. При этом для любого ограниченного борелевского множества B*

$$\mathbb{M}_{\chi_B(\cdot)f(\cdot)g(\cdot)} = \int_B f(s)\, d\nu(s). \tag{3.6}$$

Доказательство. Для ограниченного борелевского множества B функция $\chi_B g$ ограничена и измерима на $\mathbb{R}_+$. Значит, оператор умножения на такую функцию ограничен, т.е. операторнозначная функция ν корректно определена. Докажем, что ν слабо счетно-аддитивна. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — дизъюнктная последовательность ограниченных борелевских множеств с ограниченным объединением. Фиксируем $\psi, \varphi \in H$. Применяя свойства интеграла Лебега, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \langle\psi|\, \nu(A_n)\,|\varphi\rangle &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^{+\infty} \overline{\psi(x)} g(x)\chi_{A_n}(x)\varphi(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} \overline{\psi(x)} g(x)\varphi(x)\,dx \\ &= \int_{A_1\cup A_2\cup\ldots} \overline{\psi(x)} g(x)\varphi(x)\,dx = \nu(A_1\cup A_2\cup\ldots). \end{aligned}$$

Докажем равенство (3.6). Фиксируем снова $\psi, \varphi \in H$. Используем числовую меру $\nu_{\psi,\varphi}\colon B \mapsto \langle\psi|\,\mathbb{M}_{\chi_B(\cdot)g(\cdot)}\,|\varphi\rangle$. Имеем для ограниченного борелевского множества B

$$\nu_{\psi,\varphi}(B) = \int_0^\infty \overline{\psi(x)} g(x)\chi_B(x)\varphi(x)\,dx = \int_B \overline{\psi(x)} g(x)\varphi(x)\,dx,$$

т.е. $\nu_{\psi,\varphi}$ имеет производную Радона–Никодима $\overline{\psi(x)}g(x)\varphi(x)$ относительно меры Лебега.

Тогда получаем

$$\langle\psi|\left(\int_B f(s)\,d\nu(s)\right)|\varphi\rangle = \int_B f(s)\,d\nu_{\psi,\varphi}(s) = \int_B f(s)\overline{\psi(s)}g(s)\varphi(s)\,dx$$
$$= \int_0^\infty \overline{\psi(x)}f(x)g(x)\chi_B(x)\varphi(x)\,dx = \langle\psi|\,\mathbb{M}_{\chi_B(\cdot)f(\cdot)g(\cdot)}\,|\varphi\rangle\,.$$

□

Рассмотрим операторнозначные меры ν_1, ν_2, ν, определенные на ограниченном борелевском множестве B как

$$\nu_1(B) = \left(\int_B S_s\,|\xi_0\rangle\; ds\right)\langle\xi_0|\,,\ \nu_2(B) = \mathbb{M}_{\chi_B(\cdot)e^{(\cdot)}}, \tag{3.7}$$
$$\nu(B) = \lambda\nu_1(B) - \mu\nu_2(B). \tag{3.8}$$

Теорема 3.1. *Мера ν (3.8) и полугруппа*

$$\check{S}_t = \begin{cases} S_t - \mu S_t\,|\xi_0\rangle\,\langle\xi_0| + |v_t\rangle\,\langle\xi_0|\,, & \alpha\neq -1,\\ S_t + (e^t - S_t)\left|\xi_0 + \frac{\lambda}{2}\xi_1\right\rangle\langle\xi_0|\,, & \alpha = -1,\end{cases} \quad (t\geqslant 0)$$

удовлетворяют тождеству

$$\check{S}_t\eta + \int\limits_0^t \langle\xi_0, \check{S}_{t-s}\eta\rangle\,\nu(ds)\xi_0 = S_t\eta,\ \ t\geqslant 0,\ \ \eta\in H.$$

Доказательство. Начнем с первого слагаемого в (3.8). Для любого ψ имеем с учетом теоремы Фубини

$$\langle\psi|\int_0^t |\nu_1(ds)\xi_0\rangle\,e^{\alpha s} = \int_0^t \langle\psi|\,S_s\,|\xi_0\rangle\,e^{\alpha s}\,ds = \sqrt{2}\int_0^t e^{\alpha s}\int_s^{+\infty}\overline{\psi(x)}e^{s-x}\,dx\,ds$$
$$=\sqrt{2}\int_0^t\int_0^x \overline{\psi(x)}e^{(\alpha+1)s-x}\,ds\,dx + \sqrt{2}\int_t^{+\infty}\int_0^t\overline{\psi(x)}e^{(\alpha+1)s-x}\,ds\,dx$$
$$=\sqrt{2}\begin{cases}\left(\int_0^t\overline{\psi(x)}e^{-x}\frac{e^{(\alpha+1)x}-1}{\alpha+1}\,dx + \int_t^{+\infty}\overline{\psi(x)}e^{-x}\frac{e^{(\alpha+1)t}-1}{\alpha+1}\,dx\right), & \alpha\neq-1,\\ \left(\int_0^t\overline{\psi(x)}e^{-x}x\,dx + \int_t^{+\infty}\overline{\psi(x)}e^{-x}t\,dx\right), & \alpha=-1.\end{cases}$$

Таким образом, в случае $\alpha\neq-1$ получаем

$$\left(\int_0^t \nu_1(ds)\xi_0 e^{\alpha s}\right)(x) = \frac{\sqrt{2}e^{-x}}{\alpha+1}\begin{cases} e^{(\alpha+1)x}-1, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ e^{(\alpha+1)t}-1, & x>t,\end{cases} \tag{3.9}$$

а в случае $\alpha=-1$ —

$$\left(\int_0^t \nu_1(ds)\xi_0 e^{\alpha s}\right)(x) = \sqrt{2}e^{-x}\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ t, & x>t.\end{cases} \tag{3.10}$$

Перейдем ко второму слагаемому в (3.8).

Согласно лемме 3.1 имеем

$$\int_0^t e^{\alpha s}d\nu_2(s) = \mathbb{M}_{\chi_{[0,t]}e^{(\alpha+1)(\cdot)}}.$$

Следовательно,

$$\left(\int_0^t \nu_2(ds)\xi_0 e^{\alpha s}\right)(x) = \begin{cases}\sqrt{2}e^{\alpha x}, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ 0, & x>t.\end{cases} \tag{3.11}$$

Теперь рассмотрим величину $(S_t - \check{S}_t)\xi_0$.

Имеем в случае $\alpha \neq -1$

$$\begin{aligned}\left[(S_t - \check{S}_t)\xi_0\right](x) &\overset{(2.7)}{=} \left[\mu S_t \xi_0 - v_t\right](x) \\ &\overset{(2.2)}{=} \sqrt{2}\begin{cases} -Ae^{-\alpha t - x} - Be^{\alpha(x-t)}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \mu e^{-x+t} - Ae^{-\alpha t - x} - Be^{-x+t}, & x > t. \end{cases}\end{aligned}$$

Сравнивая это с (3.9) и (3.11), получаем требуемое равенство (3.5).

В случае же $\alpha = -1$ получаем

$$\begin{aligned}\left[(S_t - \check{S}_t)\xi_0\right](x) &\overset{(2.11)}{=} \left[\left(S_t - e^t\right)\left(\xi_0 + \frac{\lambda}{2}\xi_1\right)\right](x) \\ &= \sqrt{2}\begin{cases} -e^{t-x}\left(1 + \frac{\lambda}{2}(1-2x)\right), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ -e^{t-x}\left(1 + \frac{\lambda}{2}(1-2x)\right) + e^{t-x}\left(1 + \frac{\lambda}{2}(1-2x+2t)\right), & x > t, \end{cases} \\ &= \sqrt{2}\begin{cases} -e^{t-x}\left(1 + \frac{\lambda}{2}(1-2x)\right), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ e^{t-x}\lambda t, & x > t. \end{cases}\end{aligned}$$

С учетом того, что $\mu = \frac{\lambda}{2} + 1$ и применяя (3.10) и (3.11), получаем требуемое равенство (3.5). □

Замечание 3.1. *Вместо меры ν (3.8) можно выбрать любую другую операторнозначную меру, действующую на ξ_0 так же, как ν.*

Исследуем вопрос о возможности выбрать меру ν для равенства (1.8) положительной. Для начала выделим ситуацию, когда это гарантированно нельзя сделать.

Предложение 3.3. *Если $\alpha \notin [1, +\infty)$, то мера ν в равенстве* (1.8) *не может принимать значения только в положительных операторах.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что мера ν положительна. Тогда числовая мера ν_{ξ_0,ξ_0} неотрицательна.

Уравнение (1.8) влечет (по предложению 3.2) равенство (3.4) и следовательно (3.5). Действуя на обе части (3.5) функционалом $\langle\xi_0|$, получаем

$$\langle\xi_0|\check{S}_t|\xi_0\rangle + e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s} d\nu_{\xi_0,\xi_0} = \langle\xi_0|S_t|\xi_0\rangle\,,$$

что с учетом предложения 2.2 дает

$$\int_0^t e^{\alpha s} d\nu_{\xi_0,\xi_0} = e^{(\alpha-1)t} - 1. \tag{3.12}$$

Заметим, что интеграл в (3.12) не равен нулю при положительных t, т.к. $\alpha \neq 1$. При $t \to +0$ имеем $\max\limits_{s\in[0,t]} |e^{\alpha s} - 1| \to 0$, т.е., поскольку мера ν_{ξ_0,ξ_0} неотрицательна, получаем, что отношение мнимой и действительной частей интеграла стремится к нулю. Таким образом, аргумент интеграла стремится к нулю. С другой стороны, аргумент величины $e^{(\alpha-1)t} - 1$ стремится к аргументу числа $\alpha - 1$. Таким образом, получаем, что $\alpha - 1$ — действительное положительное число. Противоречие с $\alpha \notin [1, +\infty)$. □

Очевидно, случай $\lambda = \mu = 0$ влечет $\alpha = 1$ и допускает выбор положительной меры ν — нужно взять $\nu = 0$. Однако если возмущение нетривиально, то $\alpha = 1$ исключает возможность положительной меры ν.

Предложение 3.4. *Если $\alpha = 1$ и S_t не равно тождественно $\check{S}_t$, то мера ν в равенстве* (1.8) *не может принимать значения только в положительных операторах.*

Доказательство. Заметим, что при всех $t \geqslant 0$ операторы S_t и $\check{S}_t$ совпадают на ортогональном дополнении вектора ξ_0. Тогда из условия следует, что для некоторого $t_0 > 0$ верно $|f\rangle := (S_{t_0} - \check{S}_{t_0})\,|\xi_0\rangle \neq 0$. Тогда $\langle f|\,(S_{t_0} - \check{S}_{t_0})\,|\xi_0\rangle = \langle f|f\rangle > 0$. Действуя на обе части (3.5) при $t = t_0$ функционалом $\langle \xi_0|$, получаем

$$\langle \xi_0|\check{S}_{t_0}|\xi_0\rangle + e^{-t_0}\int_0^{t_0} e^s d\nu_{\xi_0,\xi_0} = \langle \xi_0|S_{t_0}|\xi_0\rangle \Rightarrow e^{-t_0} + e^{-t_0}\int_0^{t_0} e^s d\nu_{\xi_0,\xi_0} = e^{-t_0},$$

откуда

$$\int_0^{t_0} e^s d\nu_{\xi_0,\xi_0} = 0. \tag{3.13}$$

Действуя на обе части (3.5) при $t = t_0$ функционалом $\langle f|$, получаем

$$\langle f|\check{S}_{t_0}|\xi_0\rangle + e^{-t_0}\int_0^{t_0} e^s d\nu_{f,\xi_0} = \langle f|S_{t_0}|\xi_0\rangle\,,$$

откуда

$$\int_0^{t_0} e^s d\nu_{f,\xi_0} = e^{t_0}\,\langle f|S_{t_0} - \check{S}_{t_0}|\xi_0\rangle = e^{t_0}\,\langle f|f\rangle\,. \tag{3.14}$$

Предположим, что значения меры ν — положительные операторы. Тогда для произвольного действительного числа θ имеем с учетом (3.13) и (3.14)

$$\begin{aligned}0 \leqslant \int_0^t e^s d\nu_{\xi_0+\theta f,\xi_0+\theta f} &= \int_0^t e^s d\left(\nu_{\xi_0,\xi_0} + \theta\nu_{f,\xi_0} + \theta\nu_{\xi_0,f} + \theta^2\nu_{f,f}\right)\\ &= \theta\cdot 2e^{t_0}\,\langle f|f\rangle + \theta^2\int_0^{t_0} e^s d\nu_{f,f}.\end{aligned}$$

Последнее выражение должно быть неотрицательным при всех $\theta \in \mathbb{R}$. Противоречие. $\square$

Покажем теперь, что если препятствия из предложений 3.3 и 3.4 отсутствуют, то меру ν можно выбрать положительной.

Выясним, как мера ν, заданная формулой (3.8), действует на ξ_0.

Предложение 3.5. *Для любого ограниченного борелевского множества B и меры ν (3.8) верно*

$$\nu(B)\xi_0 = \lambda\int_B S_s\xi_0\,ds - \sqrt{2}\mu\chi_B, \tag{3.15}$$

$$\langle \xi_0|\,\nu(B)\,|\xi_0\rangle = (\alpha - 1)\int_B e^{-s}\,ds. \tag{3.16}$$

Доказательство. Равенство (3.15) непосредственно получается действием (3.8) на вектор ξ_0. Применяя к (3.15) функционал $\langle \xi_0|$, имеем

$$\begin{aligned}\langle \xi_0|\,\nu(B)\,|\xi_0\rangle &= \lambda\int_B \langle \xi_0|\,S_s\,|\xi_0\rangle\,ds - 2\mu\int_0^{+\infty} e^{-s}\chi_B(s)\,ds\\ &= \lambda\int_B e^{-s}\,ds - 2\mu\int_B e^{-s}\,ds \overset{(1.6)}{=} (\alpha - 1)\int_B e^{-s}\,ds.\end{aligned}$$

$\square$

Далее мы будем обозначать через $\mathcal{L}$ меру Лебега на $\mathbb{R}_+$, а через $\mathcal{L}_f$ – меру с производной Радона–Никодима f относительно $\mathcal{L}$. Обозначим также через $\pi = I - |\xi_0\rangle\,\langle\xi_0|$ проектор на ортогональное дополнение вектора ξ_0.

Рассмотрим операторнозначную меру, определенную на ограниченном борелевском множестве B как

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}(B) =& \nu(B)\,|\xi_0\rangle\,\langle\xi_0| + |\xi_0\rangle\,\langle\xi_0|\,\nu(B)^* - (\alpha-1)\mathcal{L}_{e^{-(\cdot)}}(B)\,|\xi_0\rangle\,\langle\xi_0| \\ &+ \frac{4\,|\mu|^2}{\alpha-1}\pi\mathbb{M}_{e^{(\cdot)}\chi_B}\pi + \frac{2\,|\lambda|^2}{\alpha-1}\mathcal{L}_{e^{(\cdot)}}(B)\pi. \end{aligned} \tag{3.17}$$

С учетом равенства (3.16) получаем

Предложение 3.6. *Если $\alpha\in\mathbb{R}$, то мера $\tilde{\nu}$ принимает значения в самосопряженных операторах и действия мер ν и $\tilde{\nu}$ на вектор ξ_0 совпадают.*

Установим положительность меры $\tilde{\nu}$ в случае $\alpha-1>0$.

Теорема 3.2. *Если $\alpha-1>0$, то оператор* (3.17) *положителен.*

Доказательство. Из соображений непрерывности достаточно проверить положительность на векторах, имеющих ненулевую проекцию на ξ_0. Такой вектор с точностью до умножения на число имеет вид $\xi_0+\eta$, $\eta\perp\xi_0$. Для любого ограниченного борелевского множества B мы должны проверить неотрицательность выражения

$$\tilde{\nu}_{\xi_0+\eta,\xi_0+\eta}(B) = \tilde{\nu}_{\xi_0,\xi_0}(B) + \tilde{\nu}_{\xi_0,\eta}(B) + \tilde{\nu}_{\eta,\xi_0}(B) + \tilde{\nu}_{\eta,\eta}(B). \tag{3.18}$$

По предложению 3.6 и равенству (3.16) получаем

$$\tilde{\nu}_{\xi_0,\xi_0}(B) = (\alpha-1)\mathcal{L}_{e^{-(\cdot)}}(B). \tag{3.19}$$

Далее, из равенства (3.17) и самосопряженности $\tilde{\nu}$

$$\tilde{\nu}_{\eta,\xi_0}(B) = \langle\eta|\,\nu(B)\,|\xi_0\rangle\,, \quad \tilde{\nu}_{\xi_0,\eta}(B) = \overline{\tilde{\nu}_{\eta,\xi_0}(B)} = \overline{\langle\eta|\,\nu(B)\,|\xi_0\rangle}, \tag{3.20}$$

откуда

$$\begin{aligned}|\tilde{\nu}_{\eta,\xi_0}(B)|\,,|\tilde{\nu}_{\xi_0,\eta}(B)| &\overset{(3.15)}{\leqslant} |\lambda|\cdot\left|\int_B \langle\eta|\,S_s\,|\xi_0\rangle\;ds\right| + \sqrt{2}\,|\mu|\cdot|\langle\eta|\chi_B\rangle| \\ &\leqslant\; |\lambda|\cdot\|\eta\|\cdot\mathcal{L}(B) + \sqrt{2}\,|\mu|\cdot|\langle\eta|\chi_B\rangle|\,. \end{aligned}\tag{3.21}$$

Также

$$\tilde{\nu}_{\eta,\eta}(B) = \frac{4\,|\mu|^2}{\alpha-1}\,\langle\eta|\,\mathbb{M}_{e^{(\cdot)}\chi_B}\,|\eta\rangle + \frac{2\,|\lambda|^2}{\alpha-1}\mathcal{L}_{e^{(\cdot)}}(B)\|\eta\|^2. \tag{3.22}$$

Применяя неравенство о средних, а также неравенство КБШ для интегралов, имеем

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_{\xi_0,\xi_0}(B)+\tilde{\nu}_{\eta,\eta}(B) =& \left(\frac{\alpha-1}{2}\mathcal{L}_{e^{-(\cdot)}}(B) + \frac{4\,|\mu|^2}{\alpha-1}\,\langle\eta|\,\mathbb{M}_{e^{(\cdot)}\chi_B}\,|\eta\rangle\right) \\ &+ \left(\frac{\alpha-1}{2}\mathcal{L}_{e^{-(\cdot)}}(B) + \frac{2\,|\lambda|^2}{\alpha-1}\mathcal{L}_{e^{(\cdot)}}(B)\|\eta\|^2\right) \\ \geqslant& 2\sqrt{\mathcal{L}_{e^{-(\cdot)}}(B)\cdot 2\,|\mu|^2\,\langle\eta|\,\mathbb{M}_{e^{(\cdot)}\chi_B}\,|\eta\rangle} + 2\sqrt{\mathcal{L}_{e^{-(\cdot)}}(B)\cdot|\lambda|^2\,\mathcal{L}_{e^{(\cdot)}}(B)\|\eta\|^2} \\ =& 2\sqrt{2}\,|\mu|\sqrt{\left(\int_B e^{-s}\,ds\right)\left(\int_B |\eta(s)|^2\,e^s\,ds\right)} \\ &+ 2\,|\lambda|\cdot\|\eta\|\cdot\sqrt{\left(\int_B e^{-s}\,ds\right)\left(\int_B e^s\,ds\right)} \\ \geqslant& 2\sqrt{2}\,|\mu|\int_B|\eta(s)|\;ds + 2\,|\lambda|\cdot\|\eta\|\cdot\mathcal{L}(B) \overset{(3.21)}{\geqslant} |\tilde{\nu}_{\eta,\xi_0}(B)| + |\tilde{\nu}_{\xi_0,\eta}(B)|\,, \end{aligned}$$

что влечет неотрицательность выражения (3.18). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G.G. Amosov. *On perturbations of dynamical semigroups defined by covariant completely positive measures on the semi-axis* // Anal. Math. Phys. **11**:1, 27 (2021).
2. G.G. Amosov, E.L. Baitenov. *On perturbations of the semigroup of shifts on the half-axis changing the domain of its generator* // Lobachevskii J. Math. **41**:12, 2303–2309 (2020).
3. W. Arveson. *The domain algebra of a CP-semigroup* // Pacific. J. Math. **203**:1, 67–77 (2002).
4. A.D. Baranov, D.V. Yakubovich. *One-dimensional perturbations of unbounded self-adjoint operators with empty spectrum* // J. Math. Anal. Appl. **424**:2, 1404–1424 (2015).
5. K.J. Engel, R. Naigel. *Semigroups for linear evolution equations.* Graduate texts in mathematics 194, Springer. 1995.
6. A.S. Holevo. *Excessive maps, "arrival times" and perturbation of dynamical semigroups* // Izv. Math. **59**:6, 1311–1325 (1995).
7. T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer. 1995.
8. B. Sz.-Nagy, C. Foias. *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space.* Akademia Kiado/North-Holland Publishing Company. 1970.

Григорий Геннадьевич Амосов,
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
ул. Губкина, 8,
119991, г. Москва, Россия

Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия

С. Петербургский государственный университет,
Университетская набережная, 7-9,
199034, г. С. Петербург, Россия

Московский физико-технический институт,
Институтский пер., 9,
141701, г. Долгопрудный, Россия
E-mail: gramos@mi-ras.ru

Егор Леонидович Байтенов,
Московский физико-технический институт,
Институтский пер., 9,
141701, г. Долгопрудный, Россия
E-mail: baiteneg@mail.ru