ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 4 (2020). С. 42-55.

УДК 517.988.63, 517.922, 515.124.4

О НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ В ОБОБЩЕННЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ В ИССЛЕДОВАНИИ НЕЯВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е.С. ЖУКОВСКИЙ, В. МЕРЧЕЛА

Аннотация. Пусть на множестве $X \neq \emptyset$ задана метрика $\rho_X : X \times X \to [0,\infty]$, а на $Y \neq \emptyset$ — расстояние $d_Y : Y \times Y \to [0,\infty]$, удовлетворяющее только аксиоме тождества. Для отображений $X \to Y$ определены понятия накрывания и липшицевости. Сформулированы условия существования решения $x \in X$ уравнений вида $F(x,x) = y$, $y \in Y$, с отображением $F : X \times X \to Y$, являющимся накрывающим по одному из аргументов и липшицевым по другому. Полученное утверждение применено для исследования разрешимости функционального уравнения с отклоняющимся аргументом и задачи Коши для неявного дифференциального уравнения. Для этого исследования на пространстве S измеримых по (Лебегу) функций $z : [0,1] \to \mathbb{R}$ определено расстояние

$$d(z_1, z_2) = \operatorname{vrai}\sup_{t\in[0,1]} \theta(z_1(t), z_2(t)), \ \ z_1, z_2 \in S,$$

где для непрерывной функции $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,\infty)$ выполнено $\theta(z_1, z_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $z_1 = z_2$.

Ключевые слова: накрывающее отображение, метрическое пространство, функциональное уравнение с отклоняющимся аргументом, обыкновенное дифференциальное уравнение, существование решения.

Mathematics Subject Classification: 34A09; 47J05; 54E40

1. Введение

Результаты об операторных уравнениях с отображениями, действующими в метрических пространствах, широко используются для исследования различных функциональных уравнений. В частности, результаты о накрывающих отображениях метрических пространств позволили рассмотреть некоторые классы интегральных уравнений (см. [1]), неявных дифференциальных уравнений (см. [2]), к которым не удавалось применить теоремы о неподвижной точке. Для неявных дифференциальных уравнений такими методами были получены условия существования, оценки, условия непрерывной зависимости от параметров решений задачи Коши (см. [3]), краевых задач (см. [4]) и задач управления (см. [5], [6]).

Результаты о накрывающих отображениях в недавних исследованиях (см. [7], [8]) были обобщены на пространства, в которых ослаблены "классические свойства" метрик. В работах [9], [10] было распространено понятие множества накрывания на отображения,

E.S. Zhukovskiy, W. Merchela, On covering mappings in generalized metric spaces in studying implicit differential equations.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-04-60524_вирусы). Теорема 3.1, предложение 4 и следствие 2 получены первым автором в Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-20131).

Поступила 23 марта 2020 г.

действующие из метрического пространства в множество, на котором определено расстояние, удовлетворяющее лишь аксиоме тождества, и с использованием этого множества получены условия разрешимости операторных уравнений. Здесь этот результат распространяется на случай, когда метрика и расстояние могут принимать значение ∞. Такое обобщение позволило применить результаты об операторном уравнении к исследованию функционального уравнения с отклоняющимся аргументом в пространстве измеримых по Лебегу функций, а также к неявному дифференциальному уравнению.

Изложение строится следующим образом. В следующем разделе 2 приведены необходимые в нашем исследовании сведения о пространствах с расстоянием, определены «ослабленные свойства» замкнутости, накрывания и липшицевости для отображений, действующих из пространства с ∞-метрикой в пространство с расстоянием, и сформулирована теорема 2.1 о существовании решения операторного уравнения. В разделе 3 мы определяем расстояние в пространстве измеримых по Лебегу функций, в этом пространстве исследуем «множества накрывания и липшицевости» оператора Немыцкого, затем применяем полученные результаты к исследованию функционального уравнения с отклоняющимся аргументом. В разделе 4 аналогичными методами получены условия существования решения задачи Коши для неявного дифференциального уравнения.

2. Основные понятия

Обозначим $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$. Пусть задано пространство $X = (X, \rho)$ с *∞-метрикой* $\rho : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (далее будем называть это отображение метрикой, а пространство X метрическим). Обозначим $B_X(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leqslant r\}$ — замкнутый шар в X с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r \in (0, \infty]$. Пусть также задано непустое множество Y, на котором определено *расстояние* — отображение $d : Y \times Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$, удовлетворяющее условию

$$\forall y_1, y_2 \in Y \quad d(y_1, y_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = y_2.$$

В пространстве Y определим понятие *сходимости* последовательности $\{y_i\} \subset Y$ к элементу $y \in Y$ при $i \to \infty$ соотношением

$$y_i \to y \quad \Leftrightarrow \quad d(y_i, y) \to 0.$$

Отметим, что при такой сходимости предел y не обязан быть единственным, а «симметричная» числовая последовательность $d(y, y_i)$ может не сходиться к 0.

Для отображений, действующих из X в Y, пользуемся следующими «обычными» определениями. Отображение $f : X \to Y$ называем *непрерывным в точке* $x \in X$, если для любой сходящейся к x последовательности $\{x_i\} \subset X$ выполнено $f(x_i) \to f(x)$. Отображение $f : X \to Y$ называем *замкнутым* в точке $x \in X$, если из сходимости к x последовательности $\{x_i\} \subset X$ и существования $y \in Y$ такого, что $f(x_i) \to y$ следует равенство $f(x) = y$. Отображение, непрерывное (замкнутое) во всех точках, называем *непрерывным* (*замкнутым*). Отметим, что в отличие от случая метрических пространств из непрерывности отображения, не следует его замкнутость.

Формально переносим на отображения рассматриваемых пространств следующие определения, известные для «обычных метрических'» пространств (см. [11]).

Определение 2.1. *Пусть $\alpha > 0$. Отображение $f : X \to Y$ называем α-накрывающим, если выполнено соотношение*

$$\forall x \in X \ \forall y \in Y \ \exists u \in X \quad f(u) = y, \ \rho_X(x, u) \leqslant \frac{1}{\alpha} d\big(f(x), y\big).$$

Определение 2.2. *Пусть $\beta \geqslant 0$. Отображение $f : X \to Y$ называем β-липшицевым на множестве $U \subset X$, если выполнено соотношение*

$$\forall x, u \in U \quad d\big(f(x), f(u)\big) \leqslant \beta \rho(x, u).$$

Если здесь $U = X$, то отображение $f : X \to Y$ называют β-липшицевым.

Определим “ослабленные свойства” замкнутости, накрывания и липшицевости отображения $f : X \to Y$. Пусть задано множество $U \subset X$. Определим множества:

$$\mathrm{Cl}[f;U]:= \big\{(x,y) \in X \times Y \mid \forall \{x_n\} \subset U\ x_n \to x,\ f(x_n) \to y \ \Rightarrow\ f(x) = y\big\};$$

$$\mathrm{Cov}_\alpha[f;U]:= \big\{(x,y) \in X \times Y \mid \exists u \in U\ f(u) = y,\ \rho(x,u) \leqslant \alpha^{-1} d(f(x),y),\ \ \rho(x,u) < \infty\big\};$$

$$\mathrm{Lip}_\beta[f;U]:= \big\{(x,y) \in X \times Y \mid \forall u \in U\ f(u) = y \ \Rightarrow\ d(f(x),y) \leqslant \beta\rho(x,u)\big\}.$$

В случае когда $U = X$, а метрика ρ и расстояние d имеют значения в $\mathbb{R}_+$, такие «множества замкнутости, накрывания и липшицевости» введены в [10].

Очевидно, соотношение $\mathrm{Cl}[f;X] = X \times Y$ равносильно тому, что отображение f замкнуто, соотношение $\mathrm{Cov}_\alpha[f;X] = X \times Y$ означает, что отображение f является α-накрывающим, а соотношение $\mathrm{Lip}_\beta[f;X] = X \times Y$ справедливо тогда и только тогда, когда f липшицево с коэффициентом β.

Пусть задано отображение $F : X \times X \to Y$ и элемент $\widehat{y} \in Y$. Определим отображение $G : X \to Y$ равенством $G(x) = F(x,x)$ и рассмотрим уравнение

$$G(x) = \widehat{y}, \tag{2.1}$$

относительно $x \in X$. Сформулируем необходимое для нашего исследования утверждение о разрешимости уравнения (2.1), аналогичное теореме 2 из [10].

Теорема 2.1. *Пусть метрическое пространство X полное и заданы $\alpha > \beta \geqslant 0$, $x_0 \in X$ такие, что $d\big(F(x_0,x_0),\widehat{y}\big) < \infty$. Определим*

$$R:= (\alpha-\beta)^{-1} d\big(F(x_0,x_0),\widehat{y}\big), \quad U:= B_X(x_0,R)$$

и предположим, что для любого $x \in U$ выполнены включения

$$(x,\widehat{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot,x);X], \quad (x,\widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x,\cdot);U], \quad (x,\widehat{y}) \in \mathrm{Cl}[G;U].$$

Тогда в шаре U существует решение уравнения (2.1).

Отметим, что в аналогичной теореме 2 из [10] предполагалось, что метрика ρ и расстояние d имеют значения в $\mathbb{R}_+$ и использовались более ограничительные определения «множеств замкнутости, накрывания и липшицевости» (соответствующие случаю $U = X$). Тем не менее, для рассматриваемых здесь отображений ρ и d, действующих в $\overline{\mathbb{R}}_+$, и принятых здесь определений соответствующих множеств доказательство не отличается от [10], поэтому доказательство мы не приводим.

3. Функциональные уравнения в пространстве измеримых функций

Пусть $\tau > 0$. Обозначим меру Лебега на $[0,\tau]$ через μ, а через $\mathbb{S} = \mathbb{S}([0,\tau],\mathbb{R})$ — пространство измеримых по (Лебегу) функций $u : [0,\tau] \to \mathbb{R}$. Выделим в $\mathbb{S}$ подмножество $\mathbb{S}_+$ неотрицательных функций. Определим в пространстве $\mathbb{S}$ расстояние следующим образом.

Пусть задана функция $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Будем предполагать, что выполнено условие

($\mathcal{A}$) *функция θ непрерывна по каждому аргументу, $\theta(z,z) = 0$ при любом $z \in \mathbb{R}$ и имеет место соотношение*

$$\forall \delta > 0\ \exists \gamma > 0\ \forall z_1,z_2 \in \mathbb{R}\ \ |z_1 - z_2| \geqslant \delta \ \Rightarrow\ \theta(z_1,z_2) \geqslant \gamma. \tag{3.1}$$

Зададим отображение $d^\theta : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ соотношением

$$d^\theta(z_1,z_2) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]}\ \theta(z_1(t),z_2(t)) \ \ z_1,z_2 \in \mathbb{S}. \tag{3.2}$$

(здесь композиция $\theta(z_1(\cdot),z_2(\cdot))$ является измеримой функцией вследствие непрерывности по каждому аргументу функции θ). Для отображения d^θ очевидно выполнена аксиома тождества, т. е. это отображение является расстоянием в $\mathbb{S}$. Пространство $(\mathbb{S},d^\theta)$

будем обозначать $\mathbb{S}^\theta$. Отметим, что расстояние d^θ не обязано быть симметричным и может не удовлетворять неравенству треугольника.

Заметим также, что для функции $\theta_0 : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, определенной формулой

$$\theta_0(z_1,z_2)=|z_1-z_2|,$$

соответствующее отображение $d^{\theta_0}:\mathbb{S}\times\mathbb{S}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ является метрикой в $\mathbb{S}$. Будем обозначать эту метрику через ρ (т. е. $\rho=d^{\theta_0}$), а соответствующее пространство измеримых функций — через $\mathbb{S}^{\theta_0}=(\mathbb{S},\rho)$. Пространство $\mathbb{S}^{\theta_0}$ является полным. В этом пространстве шар $B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,r)$ с центром в $x_0\in\mathbb{S}^{\theta_0}$ радиуса $r\in(0,\infty]$ — это множество измеримых функций $x:[0,\tau]\to\mathbb{R}$ таких, что $x(t)\in B_{\mathbb{R}}(x_0(t),r)=[x_0(t)-r,x_0(t)+r]$ при п.в. $t\in[0,\tau]$.

Пусть задана удовлетворяющая условиям Картеодори функция $g:[0,\tau]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, т. е. по первому аргументу она измерима, а по второму — непрерывна. Определим оператор Немыцкого

$$(N_g u)(t)=g(t,u(t)). \tag{3.3}$$

В силу принятых на функцию g предположений этот оператор отображает измеримые функции в измеримые. Исследуем свойства замкнутости, непрерывности, накрывания и липшицевости оператора N_g, как действующего из $\mathbb{S}^{\theta_0}=(\mathbb{S},\rho)$ в $\mathbb{S}^\theta=(\mathbb{S},d^\theta)$, где функция $\theta:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, удовлетворяет условию $(\mathcal{A})$.

Предложение 1. *Оператор $N_g:\mathbb{S}^{\theta_0}\to\mathbb{S}^\theta$ является замкнутым. Если дополнительно множество функций $\big\{g(t,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ t\in[0,\tau]\big\}$ равностепенно непрерывно, т. е.*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall t\in[0,\tau]\ \forall x,u\in\mathbb{R}\quad |x-u|<\delta\ \Rightarrow\ |g(t,x)-g(t,u)|<\varepsilon, \tag{3.4}$$

а для множества функций $\{\theta(\cdot,z):\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ z\in\mathbb{R}\}$ выполнено соотношение

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall z_1,z_2\in\mathbb{R}\quad |z_1-z_2|<\delta\ \Rightarrow\ \theta(z_1,z_2)<\varepsilon, \tag{3.5}$$

то оператор $N_g:\mathbb{S}^{\theta_0}\to\mathbb{S}^\theta$ непрерывен.

Доказательство. Покажем, что для любого $z\in\mathbb{R}$ и для любой последовательности $\{z_i\}\subset\mathbb{R}$ соотношение $\theta(z_i,z)\to0$ эквивалентно тому, что $|z_i-z|\to0$.

Сначала, пусть $\theta(z_i,z)\to0$. Если соотношение $|z_i-z|\to0$ не выполнено, то существует подпоследовательность $\{z_{i_j}\}$ и положительное число δ такие, что $|z_{i_j}-z|\geqslant\delta$. Из (3.1) получим, что $\theta(z_{i_j},z)\geqslant\gamma$ при некотором положительном γ. Это неравенство противоречит сходимости $\theta(z_i,z)\to0$. Итак, $|z_i-z|\to0$.

Обратно, в силу непрерывности функции $\theta(\cdot,z)$ получаем, что в случае $|z_i-z|\to0$ будет выполнено $\theta(z_i,z)\to\theta(z,z)=0$.

Теперь докажем замкнутость оператора $N_g:\mathbb{S}^{\theta_0}\to\mathbb{S}^\theta$. Пусть заданы элементы $u\in\mathbb{S}^{\theta_0}$, $y\in\mathbb{S}^\theta$ и последовательность $\{u_i\}\subset\mathbb{S}^{\theta_0}$ такие, что

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]}\ \theta_0\big(u_i(t),u(t)\big)=\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]}\ \big|u_i(t)-u(t)\big|\to0, \tag{3.6}$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]}\ \theta\big(g(t,u_i(t)),y(t)\big)\to0. \tag{3.7}$$

Согласно доказанному выше, из соотношений (3.6) и (3.7) следуют сходимости

$$u_i(t)\to u(t),\quad g(t,u_i(t))\to y(t)\quad \text{при п.в. } t\in[0,\tau].$$

Так как функция $g(t,\cdot)$ непрерывна, имеем $g(t,u_i(t))\to g(t,u(t))$ при п.в. $t\in[0,\tau]$. Тогда в силу единственности предела в $\mathbb{R}$ получаем $g(t,u(t))=y(t)$.

Теперь, предполагая, что выполнены условия (3.4), (3.5), докажем непрерывность оператора $N_g:\mathbb{S}^{\theta_0}\to\mathbb{S}^\theta$.

Пусть задана сходящаяся последовательность $\{u_i\}\subset\mathbb{S}^{\theta_0}$, т. е. имеет место (3.6). Из (3.4) и (3.6) следует, что $\operatorname{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]}|g(t,u_i(t))-g(t,u(t))|\to0$, а из (3.5) получим соотношение

(3.7), где $y(t) = g(t, u(t))$. Таким образом доказано, что оператор Немыцкого $N_g : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$ является непрерывным. $\square$

Пусть задано многозначное отображение $\Omega : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ (т. е. отображение, сопоставляющее каждому $t \in [0,\tau]$ непустое замкнутое множество $\Omega(t) \subset \mathbb{R}$). Будем предполагать, что это отображение измеримо (используемые ниже сведения об измеримых многозначных отображениях см., например, в [12, §1.5]). Множество его измеримых сечений обозначим через

$$Sel(\Omega) := \{u \in \mathbb{S} \mid u(t) \in \Omega(t) \text{ при п.в. } t \in [0,\tau]\}.$$

Предложение 2. *Пусть заданы $x, y \in \mathbb{S}$, $\alpha > 0$ и измеримое многозначное отображение $\Omega : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$. Пусть при п.в. $t \in [0,\tau]$ выполнено следующее условие*

$$\exists u \in \Omega(t) \quad g(t,u) = y(t) \quad \text{и} \quad |x(t) - u| \leqslant \alpha^{-1}\theta\big(g(t,x(t)), y(t)\big). \tag{3.8}$$

Тогда $(x,y) \in \mathrm{Cov}_\alpha[N_g; Sel(\Omega)]$, где оператор $N_g : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$ определен соотношением (3.3).

Доказательство. Положим $r(t) = \alpha^{-1}\theta\big(g(t,x(t)), y(t)\big)$. Так как функция g удовлетворяет условиям Каратеодори, а функция θ непрерывна по каждому аргументу, определенная здесь функция $[0,\tau] \ni t \mapsto r(t) \in \mathbb{R}_+$ измерима. Теперь определим многозначное отображение $[0,\tau] \ni t \mapsto \mathfrak{B}(t) = [x(t) - r(t), x(t) + r(t)]$, очевидно, являющееся измеримым. Из (3.8) следует включение $y(t) \in g\big(t, \mathfrak{B}(t) \cap \Omega(t)\big)$ при п.в. $t \in [0,\tau]$. Согласно лемме Филлипова (см., например, [12, лемма 1.5.15]), существует функция $\widehat{u} \in S^{\theta_0}$ такая, что $\widehat{u}(t) \in \mathfrak{B}(t) \cap \Omega(t)$ и $g(t, \widehat{u}(t)) = y(t)$ при п.в. $t \in [0,\tau]$. Для этой функции выполнено $u \in Sel(\Omega)$ и

$$\rho(x, \widehat{u}) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \big|x(t) - \widehat{u}(t)\big| \leqslant \alpha^{-1} \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \theta\big(g(t,x(t)), y(t)\big) = \alpha^{-1} d^{\theta}(N_g x, y),$$

следовательно, $(x,y) \in \mathrm{Cov}_\alpha[N_g; Sel(\Omega)]$. $\square$

Замечание 1. Определим на числовой прямой $\mathbb{R}$ расстояние θ и обозначим $\mathbb{R}^\theta = (\mathbb{R}, \theta)$, а символом $\mathbb{R}$ будем обозначать вещественное пространство с “обычной метрикой” θ_0. Функцию g можем рассматривать как отображение $[0,\tau] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\theta$. Тогда соотношение (3.8) означает, что выполнено включение

$$(x(t), y(t)) \in \mathrm{Cov}_\alpha[g(t,\cdot); \Omega(t)], \quad g(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\theta, \quad t \in [0,\tau]. \tag{3.9}$$

Таким образом, предложение 2 можно сформулировать следующим образом: *если для $x, y \in \mathbb{S}$ и $\alpha > 0$ имеет место включение* (3.9), *то $(x,y) \in \mathrm{Cov}_\alpha[N_g; Sel(\Omega)]$, $N_g : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^\theta$.*

Пример 1. Определим функцию $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ соотношениями:

$$z_1 z_2 \geqslant 0 \;\Rightarrow\; \theta(z_1, z_2) = \begin{cases} \big|\sqrt{|z_1|} - \sqrt{|z_2|}\big|, & \text{если } \sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|} \leqslant 1, \\ |z_1 - z_2|, & \text{если } \sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|} > 1; \end{cases} \tag{3.10}$$

$$z_1 z_2 < 0 \;\Rightarrow\; \theta(z_1, z_2) = \theta(z_1, 0) + \theta(0, z_2). \tag{3.11}$$

Для этой функции выполнено условие $(\mathcal{A})$.

Приведем еще одно свойство функции θ, очевидно следующее из ее определения:

$$\forall \lambda \in [0,1) \; \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R} \quad \lambda\,\theta(z_1,z_2) \leqslant \theta(\lambda z_1, \lambda z_2) \leqslant \sqrt{\lambda}\,\theta(z_1,z_2). \tag{3.12}$$

Действительно, в случае $z_1 z_2 \geqslant 0$ имеем

$$\sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|} \leqslant 1 \;\Rightarrow\; \theta(\lambda z_1, \lambda z_2) = \sqrt{\lambda}\,\big|\sqrt{|z_1|} - \sqrt{|z_2|}\big| = \sqrt{\lambda}\,\theta(z_1,z_2) \;\Rightarrow\; (3.12);$$

$$1 < \sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|} \leqslant 1/\sqrt{\lambda} \;\Rightarrow\; \theta(\lambda z_1, \lambda z_2) = \sqrt{\lambda}\,\frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|}} \;\Rightarrow\; (3.12);$$

$$\sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|} > 1/\sqrt{\lambda} \;\Rightarrow\; \theta(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda|z_1 - z_2| = \lambda\theta(z_1,z_2) \;\Rightarrow\; (3.12).$$

А если $z_1 z_2 < 0$, то $\theta(\lambda z_1, \lambda z_2) = \theta(\lambda z_1, 0) + \theta(0, \lambda z_2)$, следовательно,

$$\theta(\lambda z_1, \lambda z_2) \leqslant \sqrt{\lambda}\,\theta(z_1, 0) + \sqrt{\lambda}\theta(0, z_2) = \sqrt{\lambda}\,\theta(z_1, z_2);$$
$$\theta(\lambda z_1, \lambda z_2) \geqslant \lambda\,\theta(z_1, 0) + \lambda\,\theta(0, z_2) = \lambda\,\theta(z_1, z_2).$$

Доказанное соотношение (3.12) равносильно соотношению

$$\forall \nu > 1\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}\ \ \sqrt{\nu}\,\theta(z_1, z_2) \leqslant \theta(\nu z_1, \nu z_2) \leqslant \nu\,\theta(z_1, z_2). \tag{3.13}$$

Пусть $\tau = 1$, $\mathbb{S} = \mathbb{S}([0,1], \mathbb{R})$. Определим по функции θ, заданной соотношениями (3.10), (3.11), расстояние d^θ в пространстве $\mathbb{S}$ формулой (3.2). Это расстояние симметрично и удовлетворяет неравенству треугольника, т. е. является ∞-метрикой.

Прежде всего заметим, что в силу неравенства $\theta(z_1, z_2) \geqslant |z_1 - z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, справедливо $d^\theta(x_1, x_2) \geqslant d^{\theta_0}(x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{S}$. Следовательно, любое отображение в пространстве $\mathbb{S}$, являющееся α-накрывающим относительно «обычной метрики» d^{θ_0} (т. е. как отображение $\mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta_0}$) будет также α-накрывающим как отображение $\mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$. Рассмотрим отображение, которое, если считать его отображением $\mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta_0}$, не является накрывающим ни с какой константой α, и тем не менее 1-накрывающее как отображение $\mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$.

Пусть задана функция $q \in \mathbb{S}$ такая, что $q(t) \geqslant 1$ при п.в. $t \in [0,1]$. Рассмотрим функции $g_0, g_1, : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определяемые при любых $t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}$, формулами

$$g_0(t, x) = x^2, \quad g_1(t, x) = q(t)x^2.$$

Согласно предложению 1 соответствующие этим функциям операторы Немыцкого $N_{g_0}, N_{g_1} : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$ замкнуты. Исследуем вначале «множество накрывания» $\mathrm{Cov}_\alpha[N_{g_0}; \mathbb{S}]$ оператора Немыцкого N_{g_0}, порожденного функцией g_0. Заметим, что функция первого аргумента $g_0(\cdot, x)$ постоянна, функция второго аргумента $g_0(t, \cdot)$ четная, её сужение на $\mathbb{R}_+$ инъективно, монотонно, а как действующее в $\mathbb{R}_+$, еще и сюръективно. Покажем, что для $\alpha = 1$, любых функций $x \in \mathbb{S}$ и $y \in \mathbb{S}_+$ выполнены условия предложения 2, где $\Omega(t) \equiv \mathbb{R}$, т. е. проверим справедливость соотношения (3.8).

Пусть $t \in [0,1]$. Предположим для простоты, что $x(t) \geqslant 0$. Определим $u = \sqrt{y(t)}$ (если $x(t) < 0$, то следует положить $u = -\sqrt{y(t)}$). Имеем

$$x(t) + u \leqslant 1\ \Rightarrow\ \theta(g_0(t, x(t)), y(t)) = |x(t) - u|.$$
$$x(t) + u > 1\ \Rightarrow\ \theta(g_0(t, x(t)), y(t)) = |x^2(t) - u^2| = |x(t) - u|(x(t) + u) \geqslant |x(t) - u|.$$

Итак, соотношение (3.8) справедливо, поэтому согласно предложению 2 получаем

$$\forall x \in \mathbb{S},\ \forall y \in \mathbb{S}_+\ \ (x, y) \in \mathrm{Cov}_\alpha[N_{g_0}; \mathbb{S}],\ \text{где } \alpha = 1.$$

Теперь покажем, что для оператора Немыцкого $N_{g_1} : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$, порожденного функцией g_1, множество $\mathrm{Cov}_\alpha[N_{g_1}; \mathbb{S}]$ при $\alpha = 1$ также содержит все пары $(x, y) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S}_+$. Поскольку $\big(x(\cdot),\ q^{-1}(\cdot)y(\cdot)\big) \in \mathrm{Cov}_\alpha[N_{g_0}; \mathbb{S}]$, существует функция $u \in \mathbb{S}$ такая, что

$$(N_{g_0}u)(\cdot) = q^{-1}(\cdot)y(\cdot)\ \Leftrightarrow\ N_{g_1}u = y$$

и имеет место неравенство

$$\rho(x, u) \leqslant d^\theta(N_{g_0}x, q^{-1}(\cdot)y(\cdot)) = d^\theta\big(q^{-1}(\cdot)(N_{g_1}x)(\cdot),\ q^{-1}(\cdot)y(\cdot)\big).$$

На основании соотношения (3.12) получаем неравенство $\rho(x, u) \leqslant d^\theta(N_{g_1}x, y)$. Итак, доказано, что $(x, y) \in \mathrm{Cov}_\alpha[N_{g_1}; \mathbb{S}]$.

Пример 2. Рассмотрим еще одну функцию $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющую условию $(\mathcal{A})$, определенную соотношениями:

$$z_1 z_2 \geqslant 0\ \Rightarrow\ \theta(z_1, z_2) = \begin{cases} |z_1^2 - z_2^2|, & \text{если } |z_1 + z_2| \leqslant 1, \\ |z_1 - z_2|, & \text{если } |z_1 + z_2| > 1; \end{cases} \tag{3.14}$$

$$z_1 z_2 < 0\ \Rightarrow\ \theta(z_1, z_2) = \theta(z_1, 0) + \theta(0, z_2). \tag{3.15}$$

В пространстве $\mathbb{S} = \mathbb{S}([0,1],\mathbb{R})$ формулой (3.2) зададим расстояние d^θ. Это расстояние симметрично, и тем не менее не является метрикой, так как не удовлетворяет неравенству треугольника, например, для $z_1 = 0$, $z_2 = 1/2$, $z_3 = 1$ имеем

$$\theta(z_1,z_2) = 1/4, \quad \theta(z_2,z_3) = 1/2, \quad \theta(z_1,z_3) = 1 > 1/4 + 1/2.$$

Рассмотрим функцию $\widehat{g}_0 : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\widehat{g}_0(t,x) = |x| + \sqrt{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,1]. \tag{3.16}$$

Легко проверить (проведя такие же рассуждения, как в примере 1), что для $\alpha = 1$, любых $x \in \mathbb{S}$ и $y \in \mathbb{S}_+$ выполнены условия предложения 2, где $\Omega(t) \equiv \mathbb{R}$. Таким образом,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S}_+ \ \ (x,y) \in \mathrm{Cov}_\alpha[N_{\widehat{g}_0};\mathbb{S}], \text{ где } \alpha = 1.$$

Предложение 3. *Пусть заданы $x,y \in \mathbb{S}$, $\beta \geqslant 0$ и измеримое многозначное отображение $\Omega : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$. Пусть при п.в. $t \in [0,\tau]$ выполнено*

$$\forall u \in \Omega(t) \ \ g(t,u) = y(t) \ \Rightarrow \ \theta\big(g(t,x(t)),y(t)\big) \leqslant \beta\big|x(t) - u\big|. \tag{3.17}$$

Тогда $(x,y) \in \mathrm{Lip}_\beta[N_g;Sel(\Omega)]$, где оператор $N_g : S^{\theta_0} \to \mathbb{S}^\theta$ определен соотношением (3.3).

Доказательство. Пусть для некоторой функции $\widehat{u} \in Sel(\Omega)$ выполнено $N_g\widehat{u} = y$. Тогда из соотношения (3.17) следует, что

$$d^\theta\big(N_g x, y\big) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \ \theta\big(g(t,x(t)),y(t)\big) \leqslant \beta \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \ \big|x(t) - \widehat{u}(t)\big| = \beta\rho(x,\widehat{u}).$$

Таким образом, $(x,y) \in \mathrm{Lip}_\beta[N_g;Sel(\Omega)]$. $\square$

Замечание 2. Соотношение (3.17) означает, что выполнено включение

$$(x(t),y(t)) \in \mathrm{Lip}_\beta[g(t,\cdot),\Omega(t)], \quad g(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\theta, \quad t \in [0,\tau]. \tag{3.18}$$

Поэтому предложение 2 можно сформулировать следующим образом: *если для $x,y \in \mathbb{S}$ и $\beta \geqslant 0$ выполнено* (3.18)*, то $(x,y) \in \mathrm{Lip}_\beta[N_g;Sel(\Omega)]$, $N_g : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^\theta$.*

Следствие 1. *Пусть задано измеримое многозначное отображение $\Omega : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$. Предположим, что при п.в. $t \in [0,\tau]$ отображение $g(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\theta$ является β-липшицевым на множестве $\Omega(t)$, т. е. для любых $x,u \in \Omega(t)$ выполнено неравенство*

$$\theta\big(g(t,x),g(t,u)\big) \leqslant \beta\big|x - u\big|. \tag{3.19}$$

Тогда при всех $x \in Sel(\Omega)$, $y \in \mathbb{S}^\theta$ справедливо включение $(x,y) \in \mathrm{Lip}_\beta[N_g;Sel(\Omega)]$, где $N_g : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^\theta$, т. е. оператор N_g является β-липшицевым на множестве $Sel(\Omega)$.

Пример 3. Как и в примере 1, определим функцию θ формулами (3.10), (3.11). В силу неравенства $\theta(z_1,z_2) \geqslant |z_1 - z_2|$ любая функция $g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая при некотором $\beta \geqslant 0$ условию (3.19) будет также удовлетворять и «обычному условию Липшица»

$$|g(t,x) - g(t,u)| \leqslant \beta|x - u|, \quad x,u \in \Omega(t). \tag{3.20}$$

Обратное неверное. Так для функции $g(t,x) = x$ соотношение (3.20) имеет место при $\Omega(t) \equiv \mathbb{R}$ с коэффициентом Липшица равным 1, но условие (3.19) не выполняется ни при каком $\beta \geqslant 0$ даже если $\Omega(t) \equiv [0,\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно малое. Действительно, для любого $x > 0$ имеем $\theta\big(g(t,x),g(t,0)\big) = \sqrt{x} = \beta_x|x - 0|$, где $\beta_x = 1/\sqrt{x} \to \infty$ при $x \to 0+$.

Теперь рассмотрим функцию, удовлетворяющую условию (3.19). Пусть заданы: функция $p \in \mathbb{S}$ такая, что $p(t) \geqslant 1/2$ при п.в. $t \in [0,1]$, и число $\beta \geqslant 0$. Положим

$$g_2 : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_2(t,x) = \beta|x| + p(t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,1]. \tag{3.21}$$

Значения этой функции $g_2(t,x) \geqslant 1/2$ при любых t,x, поэтому в силу формулы (3.10)

$$\theta\big(g_2(t,x),g_2(t,u)\big) = \big|g_2(t,x) - g_2(t,u)\big| = \beta\big||x| - |u|\big| \leqslant \beta|x - u|, \quad x,u \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,1].$$

Итак, выполнены предположения следствия 1 (где $\Omega(t) \equiv \mathbb{R}$), и поэтому определяемый функцией g_2 оператор Немыцкого $N_{g_2} : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$ является липшицевым с константой β на всем пространстве $\mathbb{S}$. Заметим также, что согласно предложению 1 оператор N_{g_2} замкнут.

Пример 4. Как и в примере 2, определим функцию θ формулами (3.14), (3.15) и функцию $\widehat{g}_0 : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ соотношением (3.16). Для этой функции справедливо неравенство (3.19) с коэффициентом $\beta = 4$ при всех $x, u \in \mathbb{R}$. Согласно следствию 1 определяемый функцией $\widehat{g}_0$ оператор Немыцкого $N_{\widehat{g}_0} : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$ является липшицевым с константой $\beta = 4$ на всем пространстве $\mathbb{S}$.

Сформулируем условия липшицевости еще одного отображения, необходимого для исследования различных функциональных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Пусть задана функция $h : [0,\tau] \to [0,\tau]$ такая, что

$$\forall E \subset [0,\tau] \;\; \mu(E) = 0 \;\Rightarrow\; \mu(h^{-1}(E)) = 0. \tag{3.22}$$

Это условие обеспечивает измеримость функции $u(h(\cdot))$ для любой измеримой функции $u : [0,\tau] \to \mathbb{R}$ (см. [13, с. 707], [14, §1.3]), что позволяет определить оператор

$$S_h : \mathbb{S} \to \mathbb{S}, \quad (S_h u)(t) = u(h(t)), \quad t \in [0,\tau].$$

Используя предложение 3, исследуем множество $\mathrm{Lip}_\beta[N_g S_h]$ композиции

$$N_g S_h : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}, \quad (N_g S_h x)(t) = g\big(t, x(h(t))\big), \quad t \in [0,\tau]. \tag{3.23}$$

Для этого исследования нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Для измеримого многозначного отображения $\Omega : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ композиция $\Omega h : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ также измерима. Если функция $\omega \in \mathbb{S}$ является сечением отображения Ω, т. е. $\omega(t) \in \Omega(t)$ при п.в. $t \in [0,\tau]$, то функция $S_h\omega$ измерима и является сечением отображения Ωh, т. е. выполнено $\omega(h(t)) \in \Omega(h(t))$ при п.в. $t \in [0,\tau]$.*

Доказательство. Многозначное отображение измеримо тогда и только тогда, когда оно обладает представлением Кастена (см. [12, теорема 1.5.6 и замечание 1.5.7], поэтому существует такой счетный набор измеримых сечений ω_n, $n = 1, 2, \ldots$, отображения Ω, что

$$\Omega(t) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega_n(t)\}} \;\; \text{при п.в. } t \in [0,\tau]$$

(чертой обозначено замыкание множества в пространстве $\mathbb{R}$). В силу условия (3.22) функции $S_h\omega_n$, $n = 1, 2, \ldots$, измеримы. Докажем, что выполнено соотношение

$$\Omega(h(t)) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega_n(h(t))\}} \;\; \text{при п.в. } t \in [0,\tau]. \tag{3.24}$$

Определим множество $I = \Big\{t \in [0,\tau] \mid \Omega(h(t)) \neq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega_n(h(t))\}}\Big\}$. Очевидно, выполнено $I = h^{-1}(E)$, где $E = \Big\{s \in [0,\tau] \mid \Omega(s) \neq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega_n(s)\}}\Big\}$. Так как $\mu(E) = 0$, в силу условия (3.22), имеем $\mu(I) = 0$. Итак, соотношение (3.24) выполнено. Таким образом, для многозначного отображения $\Omega h : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ имеет место представление Кастена, поэтому это отображение измеримо.

Пусть для некоторой функции $\omega \in \mathbb{S}$ при п.в. $t \in [0,\tau]$ выполнено включение $\omega(t) \in \Omega(t)$. Определим множество $I = \big\{t \in [0,\tau] \mid \omega(h(t)) \notin \Omega(h(t))\big\}$. Это множество представим в виде $I = h^{-1}(E)$, где $E = \big\{s \in [0,\tau] \mid \omega(s) \notin \Omega(s)\big\}$. Так как $\mu(E) = 0$, в силу условия (3.22), имеем $\mu(I) = 0$. Итак, $\omega(h(t)) \in \Omega(h(t))$ при п.в. $t \in [0,\tau]$. $\square$

Предложение 4. *Пусть заданы $x, y \in \mathbb{S}$, $\beta \geqslant 0$ и измеримое многозначное отображение $\Omega : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$. Пусть при п.в. $t \in [0,\tau]$ имеет место включение $(x(h(t)), y(t)) \in \mathrm{Lip}_\beta[g(t,\cdot), \Omega(h(t))]$, $g(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\theta$, т. е. выполнено соотношение*

$$\forall u \in \Omega(h(t)) \quad g(t,u) = y(t) \ \Rightarrow \ \theta\big(g(t, x(h(t))), y(t)\big) \leqslant \beta\big|x(h(t)) - u\big|. \tag{3.25}$$

Тогда $(x,y) \in \mathrm{Lip}_\beta[N_gS_h; Sel(\Omega)]$, где $N_gS_h : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^\theta$ определен соотношением (3.23).

Доказательство. Пусть для некоторой функции $\widehat{u} \in Sel(\Omega)$ выполнено $N_gS_h\widehat{u} = y$. Согласно лемме 3.1, $\widehat{u}(h(t)) \in \Omega(h(t))$ при п.в. $t \in [0,\tau]$. Из соотношения (3.25) следует, что

$$d^\theta\big(N_gS_hx, y\big) = \underset{t\in[0,\tau]}{\mathrm{vrai\,sup}}\ \theta\big(g(t, x(h(t))), y(t)\big) \leqslant \beta \underset{t\in[0,\tau]}{\mathrm{vrai\,sup}}\ \big|x(h(t)) - \widehat{u}(h(t))\big|. \tag{3.26}$$

Определим множество $I = \big\{t \in [0,\tau] \,|\, \big|x(h(t)) - \widehat{u}(h(t))\big| > \rho(x,\widehat{u})\big\}$. Представим это множество в виде $I = h^{-1}(E)$, $E = \big\{s \in [0,\tau] \,|\, \big|x(s) - \widehat{u}(s)\big| > \rho(x,\widehat{u})\big\}$. Так как $\mu(E) = 0$, получаем $\mu(I) = 0$, и поэтому $\big|x(h(t)) - \widehat{u}(h(t))\big| \leqslant \rho(x,\widehat{u})$ при п.в. $t \in [0,\tau]$. Учитывая это неравенство, из соотношения (3.26) получаем

$$d^\theta\big(N_gS_hx, y\big) \leqslant \beta\rho(x,\widehat{u}).$$

Таким образом, $(x,y) \in \mathrm{Lip}_\beta[N_gS_h; Sel(\Omega)]$. □

Следствие 2. *Пусть задано измеримое многозначное отображение $\Omega : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$. Предположим, что при п.в. $t \in [0,\tau]$ отображение $g(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\theta$ является β-липшицевым на множестве $\Omega(h(t))$, т. е. для любых $x, u \in \Omega(h(t))$ выполнено неравенство* (3.19). *Тогда для определенного соотношением* (3.23) *оператора $N_gS_h : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^\theta$ при всех $x \in Sel(\Omega)$, $y \in \mathbb{S}^\theta$ справедливо включение $(x,y) \in \mathrm{Lip}_\beta[N_gS_h; Sel(\Omega)]$, т. е. N_gS_h является β-липшицевым на множестве $Sel(\Omega)$ оператором.*

Пример 5. Пусть функция $\theta : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ задана формулами (3.10), (3.11), а функция $g_2 : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — соотношением (3.21) (где $\beta \geqslant 0$ и $p(t) \geqslant 1/2$ при п.в. $t \in [0,1]$). Как показано в примере 3, эта функция удовлетворяет условию (3.19) при всех $x, u \in \mathbb{R}$. Поэтому в силу следствия 2 композиция

$$N_{g_2}S_h : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^\theta, \quad (N_{g_2}S_hx)(t) = \beta\big|x(h(t))\big| + p(t),$$

является β-липшицевым на всем пространстве $\mathbb{S}$ оператором.

Применим полученные утверждения к исследованию функционального уравнения с отклоняющимся аргументом. Пусть задана функция $f : [0,\tau] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, являющаяся измеримой по первому аргументу и непрерывной по совокупности второго и третьего аргументов, функция $h : [0,\tau] \to [0,\tau]$, удовлетворяющая условию (3.22), и измеримая функция $\widehat{y} : [0,\tau] \to \mathbb{R}$. Рассмотрим уравнение

$$f\big(t, x(h(t)), x(t)\big) = \widehat{y}(t), \quad t \in [0,\tau], \tag{3.27}$$

относительной неизвестной измеримой функции $x : [0,\tau] \to \mathbb{R}$.

Для произвольной функции $v \in \mathbb{S}$ определим функции $g_1^{[v]}, g_2^{[v]} : [0,\tau] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ соотношениями

$$g_1^{[v]}(t,x) = f(t, v(h(t)), x), \quad g_2^{[v]}(t,x) = f(t, x, v(t)), \quad t \in [0,\tau], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функции $g_1^{[v]}, g_2^{[v]}$, очевидно, удовлетворяют условиям Каратеодори.

Теорема 3.1. *Пусть заданы $\alpha > \beta \geqslant 0$, $x_0 \in \mathbb{S}$ такие, что*

$$R := \frac{1}{\alpha - \beta} \underset{t\in[0,\tau]}{\mathrm{vrai\,sup}}\ \theta\big(f(t, x_0(h(t)), x_0(t)),\, \widehat{y}(t)\big) < \infty. \tag{3.28}$$

Пусть для любого $v \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)$ *функция* $g_1^{[v]}$ *удовлетворяет условию* (3.8) *при любом* $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)$, *заданном* $y = \widehat{y}$ *и* $\Omega(t) \equiv \mathbb{R}$, *а функция* $g_2^{[v]}$ — *условию* (3.25) *при тех же функциях* x, y, *но с иным многозначным отображением:* $\Omega(t) = B_{\mathbb{R}}(x_0(t),R)$ *при п.в.* $t \in [0,\tau]$. *Тогда существует решение* $\widehat{x} \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)$ *уравнения* (3.27).

Доказательство. Обозначим через $N_f : \mathbb{S}^{\theta_0} \times \mathbb{S}^{\theta_0} \to S^{\theta}$ оператор Немыцкого

$$(N_f(x,u))(t) = f(t,u(t),x(t)), \quad t \in [0,\tau],$$

и определим отображения

$$F : \mathbb{S}^{\theta_0} \times \mathbb{S}^{\theta_0} \to S^{\theta}, \quad F(x,u) = N_f(x, S_h u); \quad G : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}, \quad G(x) = F(x,x).$$

Докажем замкнутость отображений F, G. Пусть для произвольных последовательностей $\{x_i\}, \{u_i\} \subset \mathbb{S}^{\theta_0}$, элементов $x, u \in \mathbb{S}^{\theta_0}$ и $w \in \mathbb{S}^{\theta}$ при $i \to \infty$ выполнено $\rho(x_i,x) \to 0$, $\rho(u_i,u) \to 0$ и $d^{\theta}\big(F(x_i,u_i),w\big) \to 0$. Тогда, как показано при доказательстве предложения 1, при п.в. $t \in [0,\tau]$ имеют место сходимости $x_i(t) \to x(t)$, $u_i(t) \to u(t)$ и $(F(x_i,u_i))(t) \to w(t)$. В силу второго из этих трех соотношений при п.в. $t \in [0,\tau]$ имеем $u_i(h(t)) \to u(h(t))$. Поэтому в силу непрерывности функции $f(t,\cdot,\cdot)$ при п.в. $t \in [0,\tau]$ выполнено $f(t,u_i(h(t)),x_i(t)) \to f(t,u(h(t)),x(t))$. Итак, $(F(x_i,u_i))(t) \to (F(x,u))(t)$ и $(F(x_i,u_i))(t) \to w(t)$, следовательно, $(F(x,u))(t) = w(t)$, $t \in [0,\tau]$. Доказано, что отображение F является замкнутым, а следовательно, отображение G также замкнуто.

Для произвольной функции $v \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)$ оператор $F(\cdot,v) : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$ является оператором Немыцкого $N_{g_1^{[v]}}$, порожденным функцией $g_1^{[v]}$. Этот оператор удовлетворяет условиям предложения 2 при $y = \widehat{y}$, любом $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)$ и многозначном отображении $t \in [0,\tau] \mapsto \Omega(t) = \mathbb{R}$. Согласно предложению 2 пара $(x,\widehat{y})$ при любом $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)$ принадлежит множеству $\mathrm{Cov}_{\alpha}[F(\cdot,v);\mathbb{S}]$. Следовательно, пара $(v,\widehat{y})$ также принадлежит множеству $\mathrm{Cov}_{\alpha}[F(\cdot,v);\mathbb{S}]$.

Оператор $F(v,\cdot) : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$ — это композиция $N_{g_2^{[v]}} S_h$, удовлетворяющая условиям предложения 4 при $y = \widehat{y}$, любом $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)$ и многозначном отображении $t \in [0,\tau] \mapsto \Omega(t) = B_{\mathbb{R}}(x_0(t),R)$. В силу предложения 4 для любого $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)$ выполнено $(x,\widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_{\beta}[F(v,\cdot);B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)]$. Следовательно, $(v,\widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_{\beta}[F(u,\cdot);B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)]$.

В заключение напомним, что пространство $\mathbb{S}^{\theta_0}$ является полным. Итак, выполнены все условия теоремы 2.1, и согласно этой теореме существует решение $\widehat{x} \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)$ уравнения (3.27). □

Замечание 3. В теореме 3.1 предполагается, что функция $g_2^{[v]}$ удовлетворяет условию (3.25), где $y = \widehat{y}$, $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)$ и $\Omega(t) = B_{\mathbb{R}}(x_0(t),R)$. Согласно следствию 2, для выполнения этого условия достаточно, чтобы при п.в. $t \in [0,\tau]$ отображение $g_2^{[v]}(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\theta}$ было β-липшицевым на множестве $[x_0(h(t)) - R, x_0(h(t)) + R]$.

Пример 6. Пусть заданы функции $p, \widehat{y} \in \mathbb{S}_+$, $\gamma \geqslant 0$ и функция $h : [0,1] \to [0,1]$, удовлетворяющая условию (3.22) (где $\tau = 1$). Рассмотрим уравнение

$$x^2(t)\big(p(t) + \gamma x(h(t))\big) = \widehat{y}(t), \quad t \in [0,1]. \tag{3.29}$$

Нас будет интересовать существование неотрицательного решения этого уравнения, принадлежащего некоторой окрестности функции $x_0(t) \equiv 0$ в пространстве $\mathbb{S}$. Отображения

$$x(\cdot) \in \mathbb{S} \mapsto x^2(\cdot) \in \mathbb{S}, \quad x(\cdot) \in \mathbb{S} \mapsto x(h(t)) \in \mathbb{S},$$

составляющие левую часть уравнения (3.29), ни при каком $\alpha > 0$ не являются α-накрывающими относительно «обычной метрики» d^{θ_0} пространства $\mathbb{S}$. Таким образом, к рассматриваемому здесь уравнению нельзя применить теоремы о таких отображениях. Продемонстрируем возможности теоремы 3.1 в исследовании уравнения (3.29).

Положим

$$R = 2\text{vrai}\sup_{t\in[0,1]} \widehat{y}(t). \tag{3.30}$$

Покажем, что при выполнении условий

$$p(t) \geqslant 1 \text{ при п.в. } t \in [0,1]; \quad 2\gamma R < 1 \text{ и } 2\gamma R^2 < 1$$

уравнение (3.29) имеет решение $x \in \mathbb{S}_+$ такое, что $x(t) \leqslant R$ п.в. на $[0,1]$.

Определим вспомогательное уравнение

$$x^2(t)\big(p(t) + \gamma\big|x(h(t))\big|\big) = \widehat{y}(t), \quad t \in [0,1]. \tag{3.31}$$

Для любого решения $x \in \mathbb{S}$ уравнения (3.31) функция $|x(\cdot)|$ будет решением уравнения (3.29), и по решению $x \in \mathbb{S}_+$ уравнения (3.29) очевидно определяются решения уравнения (3.31). Итак, разрешимости в $\mathbb{S}_+$ уравнений (3.29), (3.31) равносильны, но областью определения функции

$$f(t, x_1, x_2) = x_2^2\big(p(t) + \gamma|x_1|\big)$$

является $[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, поэтому нам удобнее будет исследовать вспомогательное уравнение (3.31).

Определим формулой (3.10) функцию $\theta : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ и зададим соответствующее расстояние d^θ в пространстве $\mathbb{S}$.

Для произвольной функции $v \in \mathbb{S}$ определим функции $g_1^{[v]}, g_2^{[v]} : [0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g_1^{[v]}(t,x) = x^2\big(p(t) + \gamma|v(h(t))|\big), \quad g_2^{[v]}(t,x) = v^2(t)\big(p(t) + \gamma|x|\big).$$

Положим $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$ и $x_0(t) \equiv 0$ на $[0,1]$. Вычисленное по формуле (3.28) значение R совпадает с (3.30). Как показано в примере 1, функция $g_1^{[v]}$ удовлетворяет условию (3.8), в котором $\Omega(t) \equiv \mathbb{R}$, а $x, y \in \mathbb{S}$ — любые функции (в том числе, если $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)$ и $y = \widehat{y}$ — заданная правая часть уравнения (3.29)).

Согласно примеру 3, функция $g_2(t,x) = p(t) + \gamma|x|$ при всех $x, u \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию (3.19) с коэффициентом γ. А из неравенств (3.12), (3.13) следует, что при любом $v \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)$ функция $g_2^{[v]}$ удовлетворяет условию (3.19) с коэффициентом

$$\max\big\{\gamma R^2,\, \gamma R\big\} \leqslant 1/2 = \beta.$$

В соответствии с теоремой 3.1 уравнение (3.31), а следовательно, и уравнение (3.29) имеет решение $x \in \mathbb{S}_+$ такое, что $x(t) \leqslant R$ п.в. на $[0,1]$.

4. Задача Коши для неявного дифференциального уравнения

В пространстве $\mathbb{S} = \mathbb{S}([0,\tau],\mathbb{R})$ выделим подпространство $\mathbb{L} = \mathbb{L}([0,\tau],\mathbb{R})$ суммируемых (по Лебегу) функций. Это пространство с определенным формулой (3.2) расстоянием d^θ будем обозначать $\mathbb{L}^\theta$. Пространство $\mathbb{L}^{\theta_0}$ является полным. Отметим, что для любых $x \in \mathbb{L}$, $r \in \mathbb{R}_+$ выполнено $B_{\mathbb{L}^{\theta_0}}(x,r) = B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x,r)$. Обозначим $\mathbb{AC} = \mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0,\tau] \to \mathbb{R}$, имеющих п.в. на $[0,\tau]$ производную $\dot{x} \in \mathbb{L}$.

Пусть функция $\widehat{y} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ измерима, функция $f : \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима по первому аргументу и непрерывна по совокупности второго и третьего аргументов. Рассмотрим неявное дифференциальное уравнение

$$f\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) = \widehat{y}(t), \quad t \geqslant 0. \tag{4.1}$$

Пусть $\tau > 0$. Решением уравнения (4.1), определенным на $[0,\tau]$, называем функцию $x \in \mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$, удовлетворяющую этому уравнению при п.в. $t \in [0,\tau]$. Получим условия существования решения $x \in \mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$ уравнения (4.1), удовлетворяющего при заданном $A \in \mathbb{R}$ начальному условию

$$x(0) = A. \tag{4.2}$$

Для произвольных функций $v \in \mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$ и $w \in \mathbb{L}([0,\tau],\mathbb{R})$ определим функции $g_1^{[v]}, g_2^{[w]} : [0,\tau]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ соотношениями

$$g_1^{[v]}(t,x) = f(t,v(t),x), \quad g_2^{[w]}(t,x) = f(t,x,w(t)), \quad t\in[0,\tau], \quad x\in\mathbb{R}.$$

Теорема 4.1. *Пусть заданы числа $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$, $\tau > 0$ такие, что $\beta\tau < \alpha$, и функция $x_0 \in \mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$, удовлетворяющая условию (4.2). Пусть*

$$R := \frac{1}{\alpha-\beta\tau}\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]}\ \theta\big(f(t,x_0(t),\dot{x}_0(t)),\widehat{y}(t)\big) < \infty. \tag{4.3}$$

Определим многозначные отображения $V,\dot{V} : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ соотношениями

$$V(t) = B_{\mathbb{R}}(x_0(t),Rt), \quad \dot{V}(t) = B_{\mathbb{R}}(\dot{x_0}(t),R), \quad t\in[0,\tau]. \tag{4.4}$$

Предположим, что для любой абсолютно непрерывной функции $v \in Sel(V)$ функция $g_1^{[v]}$ удовлетворяет условию (3.8) при $y=\widehat{y}$, всех $x\in Sel(\dot{V})$, $\Omega(t)\equiv\mathbb{R}$; для любого $w\in Sel(\dot{V})$ функция $g_2^{[w]}$ удовлетворяет условию (3.17) при $y=\widehat{y}$, всех абсолютно непрерывных функциях $x\in Sel(V)$ и $\Omega = V$. Тогда существует определенное на $[0,\tau]$ решение x задачи (4.1), (4.2) такое, что $\dot{x}\in B_{\mathbb{L}^{\theta_0}}(\dot{x}_0,R)$.

Доказательство. Запишем задачу (4.1), (4.2) в виде уравнения

$$f\big(t, A+\int_0^t u(s)ds, u(t)\big) = \widehat{y}(t), \quad t\in[0,\tau]. \tag{4.5}$$

относительно неизвестной функции $u=\dot{x}\in\mathbb{L}([0,\tau])$. Определим отображение

$$F:\mathbb{L}^{\theta_0}\times\mathbb{L}^{\theta_0}\to\mathbb{S}^{\theta}, \quad (F(u,z))(t) = f\big(t,A+\int_0^t z(s)ds, u(t)\big), \quad t\in[0,\tau],$$

и отображение $G:\mathbb{L}^{\theta_0}\to\mathbb{S}^{\theta}$, $G(u)=F(u,u)$. При таком определении отображения G уравнение (4.5) принимает вид (2.1), и его разрешимость можно доказать на основании теоремы 2.1. Проверим выполнение ее условий.

Докажем замкнутость отображений F, G. Пусть для произвольных $\{u_i\},\{z_i\}\subset\mathbb{L}^{\theta_0}$, $u,z\in\mathbb{L}^{\theta_0}$ и $y\in\mathbb{S}^{\theta}$ выполнено $\rho(u_i,u)\to0$, $\rho(z_i,z)\to0$ и $d^{\theta}\big(F(u_i,z_i),y\big)\to0$. Из последнего соотношения следует сходимость $(F(u_i,z_i))(t)\to y(t)$ при п.в. $t\in[0,\tau]$ (см. доказательство предложения 1). А из второго соотношения получаем $\int_0^t z_i(s)ds\to\int_0^t z(s)ds$ при п.в. $t\in[0,\tau]$. Далее, в силу непрерывности функции $f(t,\cdot,\cdot)$ при п.в. $t\in[0,\tau]$ выполнено $(F(u_i,z_i))(t)\to(F(u,z))(t)$. А так как $(F(u_i,z_i))(t)\to y(t)$, получаем $(F(u,z))(t)=y(t)$, $t\in[0,\tau]$. Итак, доказано, что отображение F является замкнутым, соответственно, отображение G также замкнуто.

Для произвольной функции $w\in Sel(\dot{V})$ оператор $F(\cdot,w):\mathbb{L}^{\theta_0}\to\mathbb{S}^{\theta}$ является оператором Немыцкого $N_{g_1^{[v]}}$, порожденным функцией $g_1^{[v]}$, где $v(t)=A+\int_0^t w(s)ds$. Очевидно, $v\in Sel(V)$ и $v\in\mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$. Согласно принятым предположениям оператор $N_{g_1^{[v]}}$ удовлетворяет условиям предложения 2 при $y=\widehat{y}$, любом $x\in Sel(\dot{V})$ и $\Omega(t)\equiv\mathbb{R}$. Согласно предложению 2 выполнено вложение $Sel(\dot{V})\times\{\widehat{y}\}\subset\mathrm{Cov}_{\alpha}[F(\cdot,w);\mathbb{S}]$, следовательно, $(w,\widehat{y})\in\mathrm{Cov}_{\alpha}[F(\cdot,w);\mathbb{S}]$.

Теперь рассмотрим оператор $F(w,\cdot):\mathbb{L}^{\theta_0}\to\mathbb{S}^{\theta}$, где w — любое измеримое сечение многозначного отображения $\dot{V}$. Оператор $F(w,\cdot)$ является композицией интегрального оператора $K:\mathbb{L}^{\theta_0}\to\mathbb{L}^{\theta_0}$, определяемого формулой $(Kz)(t)=\int_0^t z(s)ds$, и оператора Немыцкого $N_{g_2^{[w]}}:\mathbb{L}^{\theta_0}\to\mathbb{S}^{\theta}$, порожденного функцией $g_2^{[w]}$. Оператор K является липшицевым с коэффициентом τ на множестве $Sel(\dot{V})$ и $K(Sel(\dot{V}))\subset\mathbb{AC}\cap Sel(V)$. Функция $g_2^{[w]}$ удовлетворяет условиям предложения 3 при $y=\widehat{y}$, любом $x\in\mathbb{AC}\cap Sel(V)$ и $\Omega=V$. Потому, в силу предложения 3 для любого $x \in \mathbb{AC} \cap Sel(V)$ выполнено $(x, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[N_{g_2^{[w]}}; Sel(V)]$. Следовательно, для любого $z \in Sel(\dot{V})$ выполнено $(z, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_{\beta\tau}[N_{g_2^{[w]}}K; Sel(\dot{V})]$. Таким образом, $Sel(\dot{V}) \times \widehat{y} \subset \mathrm{Lip}_{\beta\tau}[N_{g_2^{[w]}}K; Sel(\dot{V})]$, следовательно, $(w, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_{\beta\tau}[N_{g_2^{[w]}}K; Sel(\dot{V})]$.

Итак, для уравнения (4.5) выполнены условия теоремы 2.1, поэтому это уравнение имеет решение $\widehat{u} \in Sel(\dot{V}) = B_{\mathbb{L}^{\theta_0}}(\dot{x}_0, R)$. А значит существует определенное на $[0,\tau]$ решение x задачи (4.1), (4.2) такое, что $\dot{x} \in B_{\mathbb{L}^{\theta_0}}(\dot{x}_0, R)$. □

Пример 7. Пусть заданы измеримые неотрицательные функции $p, \widehat{y} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и число $\gamma \geqslant 0$. Предполагаем, что $p(t) \geqslant 1$ при п.в. $t \geqslant 0$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}^2(t)\big(p(t) + \gamma|x(t)|\big) = \widehat{y}(t), \quad t \geqslant 0. \tag{4.6}$$

Положим

$$R := 2\operatorname{vrai}\sup_{t\in[0,1]} \widehat{y}(t). \tag{4.7}$$

Покажем, что для любого $\tau > 0$ такого, что

$$2\gamma\, R\tau < 1, \quad 2\gamma\, R^2\tau < 1, \tag{4.8}$$

существует определенное на $[0,\tau]$ решение x уравнения (4.6), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = 0$, и такое, что $|\dot{x}(t)| \leqslant R$ при п.в. $t \in [0,\tau]$.

Зафиксируем произвольное $\tau > 0$, удовлетворяющее неравенствам (4.8). Определим формулой (3.10) функцию $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ и зададим соответствующее расстояние d^θ в пространстве $\mathbb{S}$. Для произвольных функций $v \in \mathbb{AC}$ и $w \in \mathbb{L}$ определим функции $g_1^{[v]}, g_2^{[w]} : [0,\tau] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ соотношениями

$$g_1^{[v]}(t,x) = x^2\big(p(t) + \gamma|v(t)|\big), \quad g_2^{[w]}(t,x) = w^2(t)\big(p(t) + \gamma|x|\big), \quad t \in [0,\tau], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Положим $x_0(t) \equiv 0$ на $[0,\tau]$. Определим многозначные отображения $V, \dot{V} : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ формулами (4.4).

Для любой функции $v \in \mathbb{AC}$ (в том числе для $v \in Sel(V) \cap \mathbb{AC}$) функция $g_1^{[v]}$ удовлетворяет условию (3.8) с коэффициентом $\alpha = 1$ при любых $x, y \in S$ (включая $y = \widehat{y}$ и все $x \in Sel(\dot{V})$), $\Omega(t) \equiv \mathbb{R}$ (см. пример 6). Для любого $w \in Sel(\dot{V})$ функция $g_2^{[w]}$ удовлетворяет условию (3.17) с коэффициентом $\beta = \max\{\gamma R, \gamma R^2\}$ при $y = \widehat{y}$, всех абсолютно непрерывных $x \in Sel(V)$ и $\Omega = V$ (см. пример 6).

В силу неравенств (4.8) выполнено $\beta \leqslant (2\tau)^{-1}$. Таким образом, $\alpha - \beta\tau \geqslant 2^{-1}$. Следовательно, вычисленное по формуле (4.7) значение R не превосходит значения (4.3). В соответствии с теоремой 4.1 существует определенное на $[0,\tau]$ решение x уравнения (4.6) такое, что $x(0) = 0$ и $|\dot{x}(t)| \leqslant R$ п.в. на $[0,\tau]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy. *Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. **75**:3, 1026–1044 (2012).
2. Е.Р. Аваков, А.В. Арутюнов, Е.С. Жуковский. *Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной* // Дифференц. уравнения. **45**:5, 613–634 (2009).
3. А.В. Арутюнов, Е.С. Жуковский, С.Е. Жуковский. *О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной* // Дифференц. уравнения. **47**:11, 1523–1537 (2011).
4. Е.С. Жуковский, Е.А. Плужникова. *Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной* // Дифференц. уравнения. **49**:4, 439–455 (2013).

5. Е.С. Жуковский, Е.А. Плужникова. *Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями* // Автомат. и телемех. № 1, 31–56 (2015).
6. А.В. Арутюнов, С.Е. Жуковский *Точки совпадения отображений в пространствах с векторной метрикой и их приложения к дифференциальным уравнениям и управляемым системам* // Дифференц. уравнения. **53**:11, 1473–1481 (2017).
7. А.В. Арутюнов, А.В. Грешнов. *Теория* (q_1, q_2)*-квазиметрических пространств и точки совпадения* // Доклады РАН. **469**:5, 527–531 (2016).
8. *В. Мерчела К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств* // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. **23**:121, 65–73 (2018).
9. Е.С. Жуковский, В. Мерчела *О непрерывной зависимости от параметра множества решений операторного уравнения* // Изв. ИМИ УдГУ. **54**, 27–37 (2019).
10. С. Бенараб, Е.С. Жуковский, В. Мерчела. *Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстяонием и в пространствах с бинарным отношением* // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. **25**:4, 52-63 (2019).
11. А.В. Арутюнов. *Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки* // Доклады РАН. **416**:2, 151–155 (2007).
12. Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальних включений.* ЛИБРОКОМ, М. (2011).
13. Н. Данфорд, Дж. Шварц. *Линейные операторы. Общая теория.* ИЛ, М. (1962).
14. Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* Наука, М. (1991).

Евгений Семенович Жуковский,
Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина,
ул. Интернациональная, 33,
392000, г. Тамбов, Россия

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
ул. Профсоюзная, 65,
117997, г. Москва, Россия
E-mail: zukovskys@mail.ru

Вассим Мерчела,
Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина,
ул. Интернациональная, 33,
392000, г. Тамбов, Россия

Laboratoire des Mathématiques Appliquées et Modélisation, Université 8 Mai 1945 Guelma,
B.P. 401,
24000, Guelma, Algeria
E-mail: merchela.wassim@gmail.com