ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 4 (2020). С. 20-30.

УДК 517.4+519.71

ОБ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ПРЕДОПРЕДЕЛЕННЫМ ЧАСТИЧНЫМ СЛЕДОМ

Н.Ф. ВАЛЕЕВ, Я.Ш. ИЛЬЯСОВ

Аннотация. Данная работа направлена на исследование оптимизационных обратных спектральных задач с так называемыми неполными спектральными данными. В качестве неполных спектральных данных рассматриваются частичные следы оператора Штурма–Лиувилля. В работе изучается следующая формулировка обратной спектральной задачи с неполными данными (оптимизационная задача): найти потенциал $\hat{V}$, ближайший в некоторой норме к заданной функции V_0, такой, что частичный след оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом $\hat{V}$ имел бы заданное значение. В основном результате работы мы доказываем теорему существования и единственности решений этой оптимизационной обратной спектральной задачи. При этом устанавливается новый тип связи между линейными спектральными задачами и системами нелинейных дифференциальных уравнений. Это позволяет найти решение оптимизационной обратной спектральной задачи путем решения системы нелинейных дифференциальных уравнений и получить новый результат о разрешимости системы нелинейных дифференциальных уравнений. Для доказательства единственности решений использовано свойство выпуклости частичного следа оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом $\hat{V}$, как функционала от потенциала $\hat{V}$. В работе получено новое обобщение неравенства Лидского-Виландта на произвольные самосопряженные полуограниченные операторы с дискретным спектром.

Ключевые слова: спектральная теория дифференциальных операторов, обратная спектральная задача, вариационные задачи, неравенства для собственных значений.
Mathematics Subject Classification: 34L05, 34L30, 34A55

1. Введение

Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля на собственные значения

$$\mathcal{L}_0[V]\psi := -\psi'' + V\psi = \lambda\psi \tag{1}$$

на интервале $(0, l)$ с граничными условиями Дирихле

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \tag{2}$$

Хорошо известно, что если вещественнозначный потенциал $V \in L^2 := L^2(0, l)$, тогда дифференциальное выражение $\mathcal{L}_0[V]$ вместе с граничными условиями (2) определяет самосопряженный дифференциальный оператор в гильбертовом пространстве $L^2(0, l)$ (см. например [7], [26]), этот оператор мы будем обозначать $\mathcal{L}[V]$. Спектр оператора $\mathcal{L}[V]$ дискретный и состоит из последовательности собственных значений $\sigma(\mathcal{L}[V]) :=$

N.F. Valeev, Y.Sh. Ilyasov, Inverse spectral problem for partial traces of the Sturm-Liouville operator.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 18-01-00250_а.
Поступила 29 октября 2020 г.

$\{\lambda_i(V)\}_{i=1}^{\infty}$,эти собственные значения можно перенумеровать в порядке возрастания: $\lambda_1(V) < \lambda_2(V) < \ldots$.

Данная работа направлена на исследование обратных спектральных задач с так называемыми неполными спектральными данными (см. например [20], [16], [22]).

Обратная спектральная задача, заключающаяся в восстановлении потенциала $V(x)$ из заданных спектральных данных $\lambda_i(V)_{i=1}^{\infty}$, исследования по которой было инициировано в знаменитых работах Амбарцумяна [1] в 1929 г., Борга в 1946 г. [4], Гельфанда и Левитана [10] в 1951 г., занимает одно из центральных мест в теории обратных задач, по этой теме имеется большой объем литературы и до настоящего времени интерес к этой задаче не ослабевает (см. например [17]).

В целом, разнообразные постановки обратных спектральных задач имеют довольно много естественных источников возникновения: математическая физика, квантовая механика, оптика, механика, инженерные науки, а также различные разделы самой математики (см. например [22], [9], [6]). Несмотря на свою очевидную актуальность, многие из этих задач остаются нерешенными.

Хорошо известно, что обратная спектральная задача с неполными спектральными данными, например, когда задано только конечное число собственных значений $\{\lambda_i(V)\}_{i=1}^{m}$ имеет бесконечное число решений и некорректна (см. например [4], [10]).

Однако в различных приложениях такие задачи возникают и исследование этих задач является актуальной проблемой. Одной из причин тому является недоступность для измерения полной системы спектральных данных (например для задач диагностики или идентификации обьектов), а в задачах построения линейной динамической системы с заданными частотно-резонансными свойствами наиболее близкой к «эталонной» системе нет необходимости рассматривать весь диапозон частотно-резонансных характеристик. Эти замечания объясняют интерес к исследованию новых содержательных постановок обратных спектральных задач с неполными данными.

В данной работе в качестве неполных спектральных данных мы будем рассматривать сумму вида:

$$\Lambda(V,k) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(V),$$

которую будем называть «k-ым частичным следом оператора $\mathcal{L}[V]$».

Исследуется следующая оптимизационная обратная спектральная задача (с неполными спектральными данными) для оператора Штурма-Лиувилля:

($\mathcal{PG}^m$): *Для заданного вещественного числа* Λ_m *и функции* $V_0(x) \in L^2(0,l)$, *требуется найти потенциал* $\hat{V}(x) \in L^2$ *такой, что*

- $\Lambda(V,m) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\hat{V}) = \Lambda_m,$
- $\|V_0 - \hat{V}\|_{L^2}^2 = \min_{V \in L^2} \left\{ \|V_0 - V\|_{L^2}^2 : \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(V) = \Lambda_m \right\}. \quad (3)$

В основном результате данной работы мы устанавливаем, что решение оптимизационной обратной спектральной задачи $\mathcal{PG}^m$ выражается через решение следующей краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} -u_i'' + V_0 u_i = \bar{\lambda}_i u_i - \sum_{j=1}^{m} u_j^2 u_i, \quad i = 1,2,\ldots,m, \\ u_i(0) = u_i(l) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,m; \end{cases} \tag{4}$$

$0 < l < +\infty$. Для этой системы уравнений ставится задача нахождения упорядоченных наборов чисел $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m$ и систем функций $(u_1, \ldots, u_m) \in (C^2(0,l) \cap C^1[0,l])^m$.

В первом результате устанавливается существование и единственность решения оптимизационной обратной спектральной задачи $\mathcal{PG}^m$.

Теорема 1.1. *Пусть $\Lambda_m \in \mathbb{R}$ и $V_0 \in L^2$ заданы, $m \geq 1$. Тогда*
(1^o) *задача ($\mathcal{PG}^m$) имеет единственное решение $\hat{V} \in L^2(0,l)$;*
(2^o) *если $\sum_{i=1}^m \lambda_i(V_0) < \Lambda_m$,тогда $\hat{V} \neq V_0$. Более того, $\hat{V}$ выражается через единственное решение $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ системы уравнений* (4)*,а именно,*

$$\hat{V} = V_0 + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i^2 \quad \text{п.в. на} \quad (0,l). \tag{5}$$

Во второй теореме нами выводится существование и единственность решения нелинейной краевой задачи (4).

Теорема 1.2. *Пусть заданы произвольное число $\Lambda_m \in \mathbb{R}$ и потенциал $V_0 \in L^2(0,l)$. Предположим, что $\sum_{i=1}^m \lambda_i(V_0) < \Lambda_m$. Тогда существует единственный набор чисел $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m$ строго упорядоченный в порядке возрастания $\bar{\lambda}_1 < \ldots < \bar{\lambda}_m$ и $\sum i = 1^m \bar{\lambda}_i = \Lambda_m$ такой, что система уравнений* (4) *имеет единственное ненулевое решение $(u_1, \ldots, u_m) \in (C^2(0,l) \cap C^1[0,l])^m$. Более того, каждая функция $u_i(x), \quad i = 1, \ldots, m$ на интервале $(0,l)$ имеет ровно $(i-1)$ нулей.*

Отметим, что эти два утверждения носят двойственный характер: из разрешимости системы уравнений следует разрешимость задачи ($\mathcal{PG}^m$), и обратно, «конструктивное» решение задачи ($\mathcal{PG}^m$) сводится к системе уранений (4).

Отметим, что каждая из сформулированных задач имеет самостоятельный интерес. В частности, подобные задачи возникают в многоспектральной теории операторов (см.например [2]).

Однопараметрическая оптимизационная обратная спектральная задача ($\mathcal{PG}^m$),то есть при $m = 1$, в том числе для N-мерного пространственного уравнения Шрёдингера, изучалась в работах [15], [20], [15].

Существование решения уравнения, подобного (4) (с $m = 1$), было исследовано в [21], [27], [11], [18]. В этих работах нелинейное уравнение было получено в результате исследования так называемой двойственной задачи: задачи нахождения экстремальных собственных значений на шаре. Однако мы не знаем, возможно ли получить систему нелинейных уравнений вида (4) с $m > 1$ на основе двойственного подхода.

Также отметим, что постановка задачи ($\mathcal{PG}^m$), в рамках квантово-механических моделей имеет вполне определенный физический смысл, а именно требуется подобрать потенциал $V(x)$ наиболее близкий к «эталлонному» потенциалу $V_0(x)$ такой, чтобы суммарная энергия первых m-связных состояний системы была бы равна заданному значению Λ_m (см. например [22]).

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ.

2.1. В данном пункте мы докажем неравенство для m-частичных следов $\Lambda(V,m) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(V)$ оператора $\mathcal{L}[V]$. Это неравенство является ключевым при доказательстве единственности решения задачи ($\mathcal{PG}^m$).

Пусть для $0 \leq \alpha \leq 1$ задано семейство операторов $\mathcal{L}[\alpha V_1 + (1-\alpha)V_2]$, $V_1, V_2 \in L^2(0,l)$. Собственные значения семейства операторов $\mathcal{L}[\alpha V_1 + (1-\alpha)V_2]$ при каждом $\alpha \in [0,l]$ можно перенумеровать в порядке возрастания

$$\lambda_1(\alpha V_1 + (1-\alpha)V_2) < \lambda_2(\alpha V_1 + (1-\alpha)V_2) < \ldots < \lambda_m(\alpha V_1 + (1-\alpha)V_2) \ldots .$$

Целью данного пункта является доказательство неравенства:

$$\alpha\Lambda(V_1, m) + (1-\alpha)\Lambda(V_2, m) \leq \Lambda(\alpha V_1 + (1-\alpha)V_2, m) \tag{6}$$

для фиксированного $1 \leq m$.

Мы сформулируем и докажем интересующее нас неравенство о выпуклости частичной суммы собственных значений в более общей ситауции, а именно для полуограниченных операторов с дискретным спектром.

Пусть A – эрмитовы матрицы на $\mathbb{R}^r$. Обозначим через $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^r$ набор собственных значений A, пронумерованных в порядке возрастания: $\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_r(A)$. Известна следующая теорема о выпуклости частичных следов

Теорема *(Lidskii–Wielandt inequality) Пусть A, B симметрические матрицы действующие в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^r$. Тогда для любых $1 \leqslant m \leqslant r$ справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i(A+B) \geq \sum_{i=1}^m \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(B)$$

Заметим, что данное известное неравенство многократно независимо друг от друга переоткрывалось и обобщалась многими авторами (см. например [14], [13], [12], [3]). Тем не менее, нам не известно обобщение этого неравенства для самосопряженных полуограниченных операторов с дискретным спектром. Для полноты содержания статьи мы приводим свое оригинальное доказательство этого неравенства. Отметим, что основная сложность здесь состоит в неограниченности операторов и кратности собственных значений.

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассматривается линейный оператор A с плотной областью определения $D(A) \subset H$ такой, что:

(a) A самосопряженный, полуограниченный снизу, далее, не ограничивая общности, мы будем считать, что A строго положительно определенный с нижней гранью $c_0 > 0$;
(b) спектр оператора A дискретный и состоит из бесконечной серии собственных значений $c_0 = \lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \ldots$;

Пусть D_m декартово произведение m экземпляров $D(A)$ так, что

$$D_m = D(A) \times D(A) \times D(A) \times \ldots \times D(A),$$

элементы множества D_m будем обозначать $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m)$. Введем в рассмотрение функционал

$$f : D_m \mapsto \mathbb{R},$$

действующий по формуле

$$f(\Phi) = f(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m) = \sum_{j=1}^m (A^{\frac{1}{2}}\phi_j, A^{\frac{1}{2}}\phi_j), \ \ \phi_j \in D(A). \tag{7}$$

Введем в рассмотрение вложенное в D_m многообразие:

$$\mathbb{S}_m = \big\{(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m) \in D_m \,|\, (\phi_k, \phi_j) = \delta_k^j, \ k, j = 1, \ldots, m\big\}. \tag{8}$$

Теперь рассмотрим задачу минимизации функционала $f = f(\Phi)$: найти минимум функционала $f = f(\Phi) = f(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m)$ на многообразии $\mathbb{S}_m$. Справедливо следующее утверждение

Лемма 2.1. *Задача минимизации*

$$\Phi^* = \arg\min_{\Phi\in\mathbb{S}_m} f(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m)$$

имеет единственное решение $\Phi^* = (\phi_1^*, \phi_2^*, \ldots, \phi_m^*) \in \mathbb{S}_m$. Более того,

$$\min_{\Phi\in\mathbb{S}_m} f(\Phi) = f(\Phi^*) = \lambda_1(A) + \lambda_2(A) + \ldots + \lambda_m(A).$$

Доказательство. Функционал

$$f(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_m)=\sum_{j=1}^{m}(A^{\frac{1}{2}}\phi_j,A^{\frac{1}{2}}\phi_j)$$

на многообразии $\mathbb{S}_m$ ограничен снизу, поскольку A-полуограниченный оператор. Следовательно, существует минимизирующая последовательность $\Phi^j=(\phi_1^j,\phi_2^j,\ldots,\phi_m^j)\in\mathbb{S}_m$. Покажем, что множество $\{\Phi^j\}_{j=1}^{\infty}$ компактно в пространстве H.

На линейном многообразии $D(A)$ введем скалярное произведение

$$(u,v)_{H_A}=(A^{\frac{1}{2}}u,A^{\frac{1}{2}}v),u,v\in D(A)$$

Замыкая $D(A)$ по норме $\|\cdot\|_{H_A}$ получим новое гильбертово пространство H_A. Далее доопределим функционал

$$f(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_m)=\sum_{k=1}^{m}(A^{\frac{1}{2}}\phi_k,A^{\frac{1}{2}}\phi_k),\ \ \phi_k\in D(A)$$

на все пространство H_A.

Поскольку оператор A^{-1} компактный, а так как $f(\Phi^j)\to\min_{\Phi\in\mathbb{S}_m}f(\Phi)$, то множества $\{\phi_k^j\}_{j=1}^{\infty}$ ограничены в пространстве H_A. А это влечет, что каждое множество $\{\phi_k^j\}_{j=1}^{\infty}$ компактно в пространстве H, $k=1,2,\ldots,m$. Отсюда следует, что из $\{\Phi^j\}_{j=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся к некоторому $\Phi^*=(\phi_1^*,\phi_2^*,\ldots,\phi_m^*)\in H\times H\times H\ldots\times H$ подпоследовательность.

Покажем, что каждый из $\phi_1^*,\phi_2^*,\ldots,\phi_m^*$ принадлежит гильбертовому пространству H_A. Для этого заметим, что соответствующие последовательности $\{\phi_1^j\}_{j=1}^{\infty},\{\phi_1^j\}_{j=1}^{\infty},\ldots,\{\phi_m^j\}_{j=1}^{\infty}$ ограничены в H_A. Теперь воспользуемся следующим утверждением (см. теорему 1.16 (см.стр. 395 в [8]))

Пусть $f[\phi]=(A^{\frac{1}{2}}\phi,A^{\frac{1}{2}}\phi)$ *— замкнутая секториальная форма. Пусть* $\phi^j\in D(f)$, $\phi^j\to\phi^*$ *и последовательность* $f[\phi^j]$ *ограничена. Тогда и* $\phi^*\in D(f)$.

Отсюда следует, что $\phi_k^*\in H_A$ для каждого $k=1,\ldots m$. А поскольку $(\phi_k^*,\phi_j^*)=\delta_k^j$, $k,j=1,\ldots,m$, то $\Phi^*=(\phi_1^*,\phi_2^*,\ldots,\phi_m^*)\in\overline{\mathbb{S}}_m$, где $\overline{\mathbb{S}}_m$ замыкание $\mathbb{S}_m$ в пространстве H_A.

Таким образом, функционал ; $f(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_m)=\sum\limits_{j=1}^{m}(A^{\frac{1}{2}}\phi_j,A^{\frac{1}{2}}\phi_j)$; достигает своего минимума в некоторой точке $\Phi^*=(\phi_1^*,\phi_2^*,\ldots,\phi_m^*)\in\overline{\mathbb{S}}_m$. Заметим, что $f(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_m)$ дифференцируем по Фреше в H_A.

Рассмотрим функционал Лагранжа:

$$F(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_m)=\sum_{j=1}^{m}(A^{\frac{1}{2}}\phi_j,A^{\frac{1}{2}}\phi_j)-\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{k,j}((\phi_k,\phi_j)-\delta_k^j)\tag{9}$$

Функционал $F(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_m)$ определен во всем пространстве H_A и дифференцируем по Фреше в точке $\Phi^*=(\phi_1^*,\phi_2^*,\ldots,\phi_m^*)\in\overline{\mathbb{S}}_m$, следовательно:

$$A^{\frac{1}{2}}\phi_k^*-\sum_{j=1}^{m}\sigma_{k,j}A^{-\frac{1}{2}}\phi_j^*=0,k=1,\ldots,m.\tag{10}$$

Легко увидеть, что из системы уравнений (10) следует, что $\phi_1^*,\phi_2^*,\ldots,\phi_m^*\in D(A)$.

Пусть H_{Φ^*} – линейное подространство H_A образованное элементами $\phi_1^*,\phi_2^*,\ldots,\phi_m^*$, P – ортогональный проектор на подпространство H_{Φ^*}, тогда $I-P$ ортогональный проектор на $H_{\Phi^*}^{\perp}$. Очевидно, что $H_{\Phi^*}\oplus H_{\Phi^*}^{\perp}=H$.

Теперь из системы уравнений (10) следует, что H_{Φ^*} и $H_{\Phi^*}^{\perp}$ инвариантные подпростраства оператора A, точнее:

$$A:H_{\Phi^*}\to H_{\Phi^*},\quad A:H_{\Phi^*}^{\perp}\cap D(A)\to H_{\Phi^*}^{\perp}$$

Обозначим

$$A_{11} = PAP, \qquad A_{22} = (I+P)A(I+P), \qquad A_{21} = (I+P)AP, \qquad A_{12} = PA(I+P).$$

Заметим, что $A_{21} = A_{12} = 0$ и $A_{11}A_{22} = 0$, откуда немедленно вытекает, что $A = A_{11} + A_{22}$ Следовательно, существуют ортонормированный базис

$$\{\phi_1^*, \phi_2^*, \ldots, \phi_m^*, \phi_{m+1}, \ldots, \phi_n, \ldots\} \subset D(A),$$

в котором оператор A имеет блочную структуру:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где A_{11} – конечномерный оператор-матрица размера $m \times m$.

Собственные значения матрицы A_{11} равны некоторым m собственным значениям оператора A, обозначим их, расположив в порядке возрастания с учетом кратности $\lambda_{j_1}(A) \leq \lambda_{j_2}(A) \leq \ldots \leq \lambda_{j_m}(A)$. Тогда с одной стороны

$$\Lambda(A_{11}, m) = \sum_{j=1}^{m} (A^{\frac{1}{2}}\phi_j^*, A^{\frac{1}{2}}\phi_j^*),$$

а сдругой мы имеем

$$\Lambda(A_{11}, m) = \lambda_{j_1}(A) + \lambda_{j_2}(A) + \ldots + \lambda_{j_m}(A).$$

Пусть $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \ldots \leq \lambda_m(A)$ – какие-либо (с учетом их возможных кратностей) первых m-собственных значений оператора A, расположенные в порядке возрастания с учетом их кратности, а $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ соответствующие им собственные векторы оператора A, принадлежащие многообразию $\mathbb{S}_m$. Теперь можем записать неравенство:

$$\begin{aligned} \min_{\Phi \in \mathbb{S}_m} f(\Phi) =& \sum_{j=1}^{m} (A^{\frac{1}{2}}\phi_j^*, A^{\frac{1}{2}}\phi_j^*) \\ =& \lambda_{j_1}(A) + \lambda_{j_2}(A) + \ldots + \lambda_{j_m}(A) \geq \lambda_1(A) + \lambda_2(A) + \ldots + \lambda_m(A) \\ =& \sum_{j=1}^{m} (A^{\frac{1}{2}}\psi_j^*, A^{\frac{1}{2}}\psi_j^*). \end{aligned} \tag{12}$$

Из неравенства (12) следует, что

$$\min_{\Phi \in \mathbb{S}_m} f(\Phi) = \sum_{j=1}^{m} (A^{\frac{1}{2}}\phi_j^*, A^{\frac{1}{2}}\phi_j^*) = \lambda_1(A) + \lambda_2(A) + \ldots + \lambda_m(A).$$

Тем самым утверждение доказано.

Теперь вернемся к доказательству неравенства (6). Заметим, семейство операторов

$$\mathcal{L}[\alpha V_1 + (1-\alpha)V_2], \quad V_1, V_2 \in L^p(0, l),$$

для любых $0 \leq \alpha \leq 1$ равномерно полуограничено снизу, что вытекает из следующего утверждения (см. Следствие 2 в [16])

Лемма 2.2. *Пусть B ограниченное множество функций из L^2, тогда наименьшее собственное значение оператора $\mathcal{L}[V]$ раномерно ограничена снизу $\lambda_1(V) \geq \mu > -\infty$ для всех $V \in B$,где μ не зависит от $V \in B$.*

Следовательно, к рассматриваемому семейству операторов можно применять результаты леммы 2.1. Тогда получим

$$\begin{aligned}\Lambda(\alpha V_1+(1-\alpha)V_2,m)=&\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(\alpha V_1+(1-\alpha)V_2)=\min_{\Phi\in\mathbb{S}_m}f(\Phi)\\ =&\min_{\Phi\in\mathbb{S}_m}\sum_{j=1}^{m}(\mathcal{L}[\alpha V_1+(1-\alpha)V_2]\phi_j,\phi_j)\\ =&\sum_{j=1}^{m}(\mathcal{L}[\alpha V_1+(1-\alpha)V_2]\phi_j^*,\phi_j^*)\\ =&\alpha\sum_{j=1}^{m}(\mathcal{L}[V_1]\phi_j^*,\phi_j^*)+(1-\alpha)\sum_{j=1}^{m}(\mathcal{L}[V_2]\phi_j^*,\phi_j^*)\\ \geq&\alpha\min_{\Psi\in\mathbb{S}_m}\sum_{j=1}^{m}(\mathcal{L}[V_1]\psi_j,\psi_j)+(1-\alpha)\min_{\Psi\in\mathbb{S}_m}\sum_{j=1}^{m}(\mathcal{L}[V_2]\psi_j,\psi_j)\\ =&\alpha\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(V_1)+(1-\alpha)\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(V_2))\\ =&\alpha\Lambda(V_1,m)+(1-\alpha)\Lambda(V_2,m)\end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (6) доказано.

2.2. В этом пункте исследуем свойства гладкости функционала $\Lambda(\cdot,m):L^2(0,l)\to\mathbb{R}$.

Лемма 2.3. *Для любого $m\geq 1$ функционал $\Lambda(\cdot,m):L^2(0,l)\to\mathbb{R}$ непрерывно-дифференцируем по Фреше. Дифференциал Фреше функционала $\Lambda(V,m)$ можно представить в виде:*

$$D_V[\Lambda(V,m)](h)=\sum_{j=1}^{m}\frac{(\phi_j^2(V),h)}{\|\phi_j(V)\|^2}\quad\forall h(x)\in L^2. \tag{13}$$

Доказательство. Собственные значения оператора $\mathcal{L}[V]$ однократные, поэтому из Следствия 4.2 из [17] следует, что каждое собственное значение $\lambda_k(V)$ дифференцируемо по Фреше и

$$D_V[\lambda_k(V)](h)=\frac{1}{\|\phi_k(V)\|_{L^2}^2}\int_0^l\phi_k^2(V)h\,dx,\quad\forall\,V,h\in L^2(0,l). \tag{14}$$

Отсюда немедленно вытекает формула (13). Теперь покажем, что линейный функционал $D_V[\Lambda(V,m)](h)$ непрерывен по $V\in L^2(0,l)$. Для этого заметим, что по свойству аналитичности (см.[19], стр. 10) отображение $\phi_k(\cdot):L^2(0,l)\to W^{2,2}(0,L)$ является непрерывным (на самом деле даже аналитическим).

По теореме Соболева вложение $W^{2,2}(0,l)\subset L^4(0,l)$ непрерывно. Тогда отображение $\phi_k(\cdot):L^2(0,l)\to L^4(0,l)$ тоже непрерывно и, следовательно, норма производной функционала $D_V[\Lambda(V,m)]$ непрерывно зависит от $V\in L^2(0,l)$. Отсюда следует, что функционал $\Lambda(V,m)$ непрерывно дифференцируем по Фреше в $L^2(0,l)$. □

3. Доказательство Теорем 1.1 и 1.2.

Введем в рассмотрение множество

$$M_m:=\{V\in L^2:\quad\Lambda_m\leqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(V)\}$$

и рассмотрим на нем следующую задачу о минимизации

$$\check{P} = \min\{\rho(V) := \|V_0 - V\|_{L^2}^2 : \quad V \in M_m\}. \tag{15}$$

Очевидно, что M_m непусто, а из неравенства (6) следует, что M_m выпуклое множество, коэрцитивность функционала расстояния $\rho(\cdot) : L^2 \to \mathbb{R}$ влечет существование минимизатора $\hat{V} \in M_m$ задачи (15). Строгое неравенство $\sum_{i=1}^m \lambda_i(V_0) < \Lambda_m$ влечет за собой, что $\hat{V} \neq V_0$. Выпуклость множества M_m и функционала расстояния $\rho(V)$ обеспечивают единственность $\hat{V}$ и

$$\hat{V} \in \partial M_m = \left\{ V \in M_m : \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i(V) = \Lambda_m \right\}.$$

Тем самым мы доказали существование и единственность решения задачи $(\mathcal{PG}^m)$, т.е. получили доказательство утверждения (1^o) Теоремы 1.1.

Докажем второй пункт Теоремы 1.1. Поскольку функционалы $\rho(\cdot) : L^2 \to \mathbb{R}$ и, согласно Лемме 2.3, $\Lambda(\cdot, m) \to \mathbb{R}$ непрерывно-диференцируемы по Фреше, то из метода множителей Лагранжа следует существование $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}$ таких, что $|\mu_0| + |\mu_1| \neq 0$ и

$$\mu_0[D_V\rho(V)](h) + \mu_1 D_V[\Lambda(V, m)](h) = 0, \quad \forall h \in L^2, \tag{16}$$

$$\mu_0 \geq 0, \quad \mu_1 \leqslant 0, \tag{17}$$

$$\mu_1 \left(\Lambda(V, m) - \Lambda_m\right) = 0 \tag{18}$$

при $V(x) = \hat{V}(x)$.

Используя формулу (13) с нормированными $\|\phi_k^2(\hat{V})\| = 1$, получим

$$\int_0^l \left(2\mu_0(V_0 - \hat{V}) + \mu_1 \sum_{k=1}^m \phi_k^2(\hat{V}) \right) h\, dx = 0, \ \forall h \in L^2, \tag{19}$$

что равносильно тождеству

$$\mu_0(\hat{V} - V_0) = -\mu_1 \sum_{k=1}^m \phi_k^2(\hat{V}).$$

Предположим, что $\mu_0 = 0$, тогда $\sum_{k=1}^m \phi_k^2(\hat{V}) = 0$ и мы получаем противоречие. С другой стороны, если мы предположим, что $\mu_1 = 0$, тогда $V_0 = \hat{V}$ и, следовательно, $\sum_{i=1}^m \lambda_i(V_0) = \Lambda_m$, что противоречит нашему предположению $\sum_{i=1}^m \lambda_i(V_0) < \Lambda_m$. Таким образом, можно считать, что $\mu_0 = 1$. Кроме того, поскольку $\mu_1 \leqslant 0$, заключаем, что $V_0 < \hat{V}$ п.в. в $(0; l)$ и

$$\hat{V} = V_0 - \mu_1 \sum_{k=1}^m \phi_k^2(\hat{V}) \quad \text{п.в. в} \quad (0; l). \tag{20}$$

Обозначим $\hat{\lambda}_i = \lambda_i(\hat{V})$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда мы получим

$$-\phi_i''(\hat{V}) + V_0\phi_i(\hat{V}) = \hat{\lambda}_i\phi_i(\hat{V}) + \left(\mu_1 \sum_{k=1}^m \phi_k^2(\hat{V}) \right) \phi_i(\hat{V}), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{21}$$

Таким образом, функции $\hat{u}_i = (-\mu_1)^{1/2}\phi_i(\hat{V})$, $i = 1, \ldots, m$ удовлетворяют системе уравнений (4). Отсюда и из (20) получим требуемое представление (5) для для оптимального потенциала V. Тем самым теорема 1 доказана.

Докажем *Теорему 2.* Согласно Теореме 1.1 система уравнений (4) имеет решение. Докажем, что оно единственное, т.е. существует только один набор чисел $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m$ такой, что $\bar{\lambda}_1 < \ldots < \bar{\lambda}_m$, $\sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i = \Lambda_m$ и единственная система функций $(u_1, \ldots, u_m) \in (C^2(0, l) \cap C^1[0, l])^m$ удовлетворяющих (4).

Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть* $(\tilde\lambda, \bar w)$ *решение системы* (4) *такое, что* w_k *имеет ровно* $k-1$ *нулей для каждого* $k = 1, \dots, m$ *и*

$$\tilde\lambda_1 < \ldots < \tilde\lambda_m, \quad \sum_{i=1}^{m} \tilde\lambda_i = \Lambda_m.$$

Тогда функция

$$\tilde V = V_0 + \sum_{i=1}^{m} w_i^2$$

является точкой локального минимума функционала ρ *в* M_m.

Доказательство. Предположим $(\tilde\lambda, \bar w)$ является решением (4), удовлетворяющим условию леммы.Тогда w_k, $k = 1, \dots, m$ собственные функции $\mathcal{L}_{\tilde V}$, соответствующие собственным значениям $\tilde\lambda_k$, то есть, $w_k = \phi_k(\tilde V)$ и $\tilde\lambda_k = \lambda_k(\tilde V)$. Согласно лемме 2.3 и теореме Люстерника [25] касательное пространство ∂M_m в точке $\tilde V \in \partial M_\lambda$ выражается следующим образом

$$T_{\tilde V}(\partial M_m) := \left\{ h \in L^2 : \quad \sum_{k=1}^{m} D_V[\lambda_k(\tilde V)](h) \equiv \int\limits_0^l \sum_{k=1}^{m} w_k^2 \cdot h\, dx = 0 \right\}. \tag{22}$$

С другой стороны,

$$D_V[\rho(\tilde V)](h) = 2 \int\limits_0^l \sum_{k=1}^{m} w_k^2 \cdot h dx.$$

Следовательно, $D_V[\rho(\tilde V)](h) = 0$ для любого $h \in T_{\tilde V}(\partial M_m)$. Теперь с учетом того, что

$$D_{VV}[\rho(\tilde V)](h, h) = 2 \int\limits_0^l h^2\, dx > 0, \quad \forall h \in L^2,$$

мы получим неравенство

$$\rho(\bar V + h) > \rho(\bar V)$$

для любого $h \in T_{\tilde V}(\partial M_m)$ с достаточно малой нормой. □

Завершим доказательство Теоремы 1.2. Согласно вышесказанному, система уравнений (4) имеет решение$(\bar\lambda, \bar u)$ такое, что функционал расстояния ρ достигает глобального минимума в точке $\hat V = V_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i^2$ на M_m. Предположим, что существует другое решение $(\tilde\lambda, \bar w)$ системы (4). Тогда согласно Лемме 3.1, $\tilde V = V_0 + \sum_{i=1}^{m} w_i^2$ является точкой локального минимума ρ в M_m. Однако из-за строгой выпуклости функционалов $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(V)$ и ρ это возможно только в том случае, если $\bar V = \tilde V$, и поэтому, $\bar\lambda = \tilde\lambda$, $\bar u = \bar w$. Заметим, что $\hat u_i$ являются собственными функциями оператора Штурма-Лиувилля:

$$-u_i'' + \left(V_0 + \sum_{j=1}^{m} u_j^2 \right) u_i = \bar\lambda_i u_i, \quad i = 1, \dots m$$

Следовательно, каждая собственная функция $\hat u_k = (-\mu_1)^{1/2} \phi_k(\hat V)$, как собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda_k(\hat V)$, $\quad k = 1, \dots, m$ на интервале $(0, l)$ имеет ровно $(k-1)$ нулей.

Тем самым Теорема 1.2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ambarzumian V. *Über eine frage der eigenwerttheorie* // Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei **53**:9, 690–695 (1929).
2. Paul Binding *Left definite multiparameter eigenvalue problems* // Trans. Amer. Math. Soc. **272**, 475–486 (1982).
3. Kh. Kh. Murtazin, Z. Yu. Fazullin *Non-nuclear perturbations of discrete operators and trace formulae* // Sb. Math. **196**:12, 1841—1874 (2005).
4. Borg G. *Eine umkehrung der Sturm0iouvilleschen eigenwertaufgabe*// Acta Mathematica, **78** :1, 1–96 (1946).
5. Chadan K. , Colton D. Päivärinta L., Rundell W., *An introduction to inverse scattering and inverse spectral problems.* Society for Industrial and Applied Mathematics. 1997.
6. Chu, M., Golub, G. and Golub, G. H. *Inverse eigenvalue problems: theory, algorithms, and application.* Oxford University Press. 2005.
7. Edmunds D. E., Evans W. D. *Spectral theory and differential operators.* Oxford: Clarendon Press. 1987.
8. Т. Като *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Наука. 1972.
9. Gladwell, G. M. L. *Inverse Problems in Scattering - An Introduction.* Kluwer Academic Publishers. 1993.
10. Gel'fand I. M., Levitan B. M. *On the determination of a differential equation from its spectral function* // Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya **15**:4, 309–360 (1951).
11. Guo H., Qi J. *Extremal norm for potentials of Sturm-Liouville eigenvalue problems with separated boundary conditions* // Electronic Journal of Differential Equations **99**, 1–11 (2017).
12. Hile G.N., Zhenyuan Xu *Inequalities for Sums of Reciprocals of Eigenvalues* //Journal of mathematical analysis and applications **180**, 412–430 (1993).
13. Henrot Antoine *Extremum Problems of Eigenvalues of Elliptic Operators.* Birkhauser Verlag. 2006.
14. Fulton William *Eigenvalues, Invariant factors, Highest weights, and Schubert calculus* // Bulletin of the American Mathematical Society **37**:3, 209–249 (2000).
15. Ilyasov Y. Sh., Valeev N. F. *On nonlinear boundary value problem corresponding to N-dimensional inverse spectral problem* // J. Diff. Eq. **266**:8, 4533–4543 (2019).
16. Il'yasov Ya. , Valeev N. *On an inverse spectral problem and a generalized Sturm's nodal theorem for nonlinear boundary value problems* // Ufa Math. J. **10**:4, 122–128 (2018).
17. Möller M., Zettl A. *Differentiable dependence of eigenvalues of operators in Banach spaces*// Journal of Operator Theory **10**:4, 335–355 (1996).
18. Qi J., Chen S. *Extremal norms of the potentials recovered from inverse Dirichlet problems* // Inverse Problems **32**:3, 035007 (2016).
19. Pöschel J. and Trubowitz E. *Inverse spectral theory. Pure and Applied Mathematics. V. 130.* Academic Press. 1987
20. Valeev N. F., Il'yasov Y. Sh. *On an inverse optimization spectral problem and a related nonlinear boundary value problem*// Math. Zametki **104**:4, 621–625 (2018).
21. Qiaoling Wei, Gang Menga, Meirong Zhang *Extremal values of eigenvalues of Sturm–Liouville operators with potentials in L1 balls* // Journal of Differential Equations **247**:2, 364–400 (2009).
22. Zakhariev B. N., Chabanov V.M. *New situation in quantum mechanics (wonderful potentials from the inverse problem)*// Inverse Problems **13**:6, 4779 (1997).
23. A. S. Householder *The theory of matrices in numerical analysis* Dover Publications, Dover Books on Mathematics. Blaisdell. 2006.

24. K. Fan *On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformatioins* // I., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **35**, 652–655 (1949).
25. Lusternik L. *Sur les extrémés relatifs des fonctionnelles.* Matematicheskii Sbornik **41**:3, 390–401 (1934).
26. Zettl A. *Sturm-Liouville theory.* American Mathematical Soc. 2005.
27. Zhang M., *Extremal values of smallest eigenvalues of Hill's operators with potentials in L^1 balls* // J. Diff. Eq. **246**:11, 4188–4220 (2009).
28. Левитан Б. М. *Обратные задачи Штурма-Лиувилля.* М.: Наука. 1984.

Нурмухамет Фуатович Валеев,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `valeevnf@yandex.ru`

Явдат Шавкатович Ильясов,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `ilyasov02@gmail.com`