ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 4 (2020). С. 80-91.

УДК 517.982.3

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ-ЛАПЛАСА ОДНОГО КЛАССА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

И.Х. МУСИН

Аннотация. Рассматривается подпространство пространства Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций в неограниченной замкнутой выпуклой области многомерного вещественного пространства с топологией, определяемой счетным семейством норм, образованных при помощи семейства $\mathfrak{M}$ логарифмически выпуклых последовательностей положительных чисел. Благодаря условиям на указанные последовательности данное пространство является пространством Фреше-Шварца. Изучается задача описания сильного сопряженного для этого пространства в терминах преобразования Фурье-Лапласа функционалов. Частные случаи этой задачи рассматривались Роевером в ходе исследования проблем математической физики, комплексного анализа в рамках развитой им теории ультрараспределений с носителями в неограниченном замкнутом выпуклом множестве, а таже П.В. Яковлевой (Федотовой) и автором. Основной результат работы, полученный в Теореме I, утверждает, что преобразование Фурье-Лапласа линейных непрерывных функционалов устанавливает изоморфизм между сильным сопряженным к рассматриваемому функциональному пространству и пространством голоморфных функций в трубчатой области вида $\mathbb{R}^n + iC$, где C – открытый выпуклый острый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале, с определенными мажорантами роста на бесконечности и вблизи границы трубчатой области. Данная работа также примыкает к исследованиям В.С. Владимирова, посвященным теории преобразования Фурье-Лапласа распределений медленного роста и пространствам функций, голоморфных в трубчатых областях. При доказательстве Теоремы I используются схема, предложенная М. Наймарком и Б.А. Тейлором, и ряд предыдущих результатов П.В. Яковлевой (Федотовой) и автора, относящихся к теоремам типа Пэли–Винера-Шварца для ультрараспределений.

Ключевые слова: преобразование Фурье-Лапласа функционалов, голоморфные функции.

Mathematics Subject Classification: 32A15, 42B10, 46E22, 47B33

1. Введение

1.1. О задаче. Пусть C – открытый выпуклый острый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале [1, глава 1, §4], b – выпуклая непрерывная позитивно однородная степени 1 функция на $\overline{C}$ – замыкании C. Пара (b, C) определяет замкнутое выпуклое неограниченное множество

$$U(b,C) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ -\langle \xi, y\rangle \ \leqslant b(y), \forall y \in C\},$$

не содержащее целую прямую. Отметим, что внутренность $U(b,C)$ непуста и совпадает с множеством

$$V(b,C) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ -\langle \xi, y\rangle \ < b(y), \forall y \in \overline{C}\},$$

I.Kh. Musin, On Fourier-Laplace transforms of a class of generalized functions.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, дополнительное соглашение № 075-02-2020-1421/1 к соглашению № 075-02-2020-1421.)

Поступила 3 сентября 2020 г.

а замыкание $V(b,C)$ есть $U(b,C)$.

Пусть $\mathfrak{M} = \{M^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ – семейство неубывающих логарифмически выпуклых последовательностей $M^{(m)} = (M_k^{(m)})_{k=0}^{\infty}$ с $M_0^{(m)} = 1$ таких, что для каждого $m \in \mathbb{N}$

i_1). $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{M_{k+1}^{(m+1)}}{M_k^{(m)}} < +\infty$,

i_2). $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{M_k^{(m+1)}}{M_k^{(m)}} = 0$,

i_3). $\varliminf\limits_{k\to\infty} \left(\frac{M_k^{(m)}}{k!}\right)^{\frac{1}{k}} > 0$.

С каждой последовательностью $M^{(m)}$ свяжем функцию $\omega_m : [0,\infty) \to [0,\infty)$ по правилу:

$$\omega_m(r) = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^k}{M_k^{(m)}} \ , \ r > 0; \ \omega_m(0) = 0.$$

Обозначая для краткости множество $U(b,C)$ через U, а множество $V(b,C)$ – через V, определим пространство $G_{\mathfrak{M}}(U)$ следующим образом. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ введём пространство $G_m(U)$, состоящее из функций f класса C^∞ на U с конечными нормами

$$p_m(f) = \sup_{x\in V,\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{|(D^\alpha f)(x)|(1+\|x\|)^m}{M_{|\alpha|}^{(m)}} \ .$$

В силу условия i_2) пространство $G_{m+1}(U)$ непрерывно вложено в $G_m(U)$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Положим $G_{\mathfrak{M}}(U) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} G_m(U)$. С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $G_{\mathfrak{M}}(U)$ – линейное пространство. Наделим $G_{\mathfrak{M}}(U)$ топологией проективного предела пространств $G_m(U)$. Очевидно, $G_{\mathfrak{M}}(U)$ – пространство Фреше, непрерывно вложенное в пространство Шварца $S(U)$ быстро убывающих функций класса C^∞ на U.

Хорошо известно, что для любого $z \in T_C = \mathbb{R}^n + iC$ функция $f_z(\xi) = e^{i\langle\xi,z\rangle}$ принадлежит пространству $S(U)$ [1], [2]. Также, $f_z \in G_{\mathfrak{M}}(U)$ (Лемма 4). Поэтому для любого линейного непрерывного функционала Φ на $S(U)$ ($G_{\mathfrak{M}}(U)$) в области T_C корректно определена функция $\hat{\Phi}$ – преобразование Фурье-Лапласа функционала Φ, определяемая по формуле $\hat{\Phi}(z) = (\Phi, e^{i\langle\xi,z\rangle}), \ z \in T_C$.

При дополнительных предположениях о семействе $\mathfrak{M}$ пространство $G_{\mathfrak{M}}(U)$ и сильное сопряженное к нему пространство $G_{\mathfrak{M}}^*(U)$ изучалось Роевером (J. W. de Roever) [2] в связи с исследованием проблем математической физики (квантовая теория поля), комплексного анализа (разрешимость уравнений и систем уравнений свертки, теория интерполяции, Фундаментальный Принцип Паламодова-Эренпрайса) в рамках развитой им теории ультрараспределений с носителями в неограниченном замкнутом выпуклом множестве. В частности, он получил описание пространства $G_{\mathfrak{M}}^*(U)$ в терминах преобразования Фурье-Лапласа функционалов для случая, когда семейство $\mathfrak{M}$ состоит из последовательностей $M^{(m)}$ вида $(\varepsilon_m^k M_k)_{k=0}^{\infty}$, где $(\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ – произвольная убывающая к нулю последовательность положительных чисел ε_m, а $M = (M_k)_{k=0}^{\infty}$ – неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел с $M_0 = 1$, удовлетворяющая при некоторых $h > 0$ и $K > 0$ условиям:

i_4) $M_{p+q} \leqslant h^{p+q} M_p M_q, \ p,q \in \mathbb{Z}_+$;

i_5) $\sum\limits_{q=p+1}^{\infty} \frac{M_{q-1}}{M_q} \leqslant Kp\frac{M_p}{M_{p+1}} \ , \ p \in \mathbb{N}$,

как некоторого подпространства пространства $H(T_C)$ голоморфных функций в трубчатой области T_C с определёнными оценками роста на бесконечности и вблизи границы области. Более точно, из его результатов [2, Теоремы 2.21.ii, 2.24.ii] следует, что $G_{\mathfrak{M}}^*(U)$ изоморфно проективному пределу пространств $H_{C_1,\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$, C_1 – конус, компактный в конусе C), где $H_{C_1,\varepsilon}$ есть индуктивный предел пространств

$$H_{C_1,\varepsilon}^{(m)} = \left\{ f \in H(T_{C_1}) : \|f\|_{C_1,\varepsilon}^{(m)} = \sup_{z\in T_{C_1}, \|y\|\geqslant\varepsilon} \frac{|f(z)|}{e^{b(y)+\omega_m(\|z\|)}} < \infty \right\}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что из условия i_4) следует, что последовательность M удовлетворяет условию

i_6). существуют числа $H_1 > 1$, $H_2 > 1$, что $M_{k+1} \leqslant H_1 H_2^k M_k$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$,

а из i_5) вкупе с логарифмической выпуклостью следует, что для M выполнено условие

i_7). при некоторых $Q_1 > 0$ и $Q_2 > 0$ $M_k \geqslant Q_1 Q_2^k k!$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

При тех же предположениях о виде семейства $\mathfrak{M}$ теорема типа Пейли-Винера-Шварца для пространства $G_{\mathfrak{M}}(U)$ была получена в [3] при меньших ограничениях на M. А именно, условия i_4) и i_5) заменялись условиями i_6) и i_7). Таким образом, в [3] последовательность M могла быть и квазианалитической. Кроме того, учитывая, что определение пространств $G_{\mathfrak{M}}(U)$ не зависит от выбора последовательности $(\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty}$, можно считать, что $\varepsilon_m = H_2^{-m}$ ($m \in \mathbb{N}$). И тогда семейство последовательностей $\{(\varepsilon_m^k M_k)_{k=0}^{\infty}\}_{m \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию i_1). С другой стороны, если $(\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ – произвольная убывающая к нулю числовая последовательность, $M = (M_k)_{k=0}^{\infty}$ – произвольная последовательность положительных чисел и семейство последовательностей $\{(\varepsilon_m^k M_k)_{k=0}^{\infty}\}_{m \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию i_1), то последовательность M при некоторых $H_1 > 1$, $H_2 > 1$ удовлетворяет условию i_6)).

Цель настоящей работы – описать пространство $G_{\mathfrak{M}}^*(U)$ в терминах преобразования Фурье-Лапласа функционалов в предположении, что семейство $\mathfrak{M}$ состоит из неубывающих логарифмически выпуклых последовательностей $M^{(m)} = (M_k^{(m)})_{k=0}^{\infty}$ с $M_0^{(m)} = 1$, которые помимо условий i_1), i_2), i_3) удовлетворяют условию

i_8). каково бы ни было $m \in \mathbb{N}$ для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ существует число $l = l(m,k) \in \mathbb{N}$ такое, что $\sum\limits_{|\alpha| \geqslant 0} \frac{M_{|\alpha|+k}^{(m+l)}}{M_{|\alpha|}^{(m)}} < \infty$.

Отметим, что семейства $\{(\varepsilon_m^k M_k)_{k=0}^{\infty}\}_{m \in \mathbb{N}}$ из работ [2], [3] удовлетворяют условиям i_1), i_2), i_3), i_8).

1.2. Обозначения. Для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \qquad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \ D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Для $u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m), v = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)$ полагаем

$$\langle u, v\rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_m v_m, \qquad \|u\| = \sqrt{|u_1|^2 + \cdots + |u_m|^2}, \qquad |u|_m = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |u_j|.$$

Полидиск $\{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1| \leqslant 1, \ldots, |z_n| \leqslant 1\}$ обозначим через Π. Для $r > 0, z \in \mathbb{C}^m$ пусть $B(z,r) = \{\zeta \in \mathbb{C}^m : \|\zeta - z\| \leqslant r\}$.

λ_m – мера Лебега в $\mathbb{C}^m$, $T_C =: \mathbb{R}^n + iC$, $\Delta_C(y)$ – расстояние от точки $y \in C$ до границы C, $d(z)$ – расстояние от $z = x + iy \in T_C$ до границы T_C.

Для локально выпуклого пространства X через X' обозначаем пространство линейных непрерывных функционалов на X, через X^* – сильное сопряжённое пространство.

Всюду далее $\mathfrak{M}$ – семейство неубывающих логарифмически выпуклых последовательностей $M^{(m)} = (M_k^{(m)})_{k=0}^{\infty}$ с $M_0^{(m)} = 1$ ($m \in \mathbb{Z}_+$), удовлетворяющих условиям $i_1) - i_3$), i_8).

$S(U)$ – пространство Шварца $C^\infty(U)$-функций f таких, что для любого $p \in \mathbb{Z}_+$

$$\|f\|_{p,U} = \sup_{x \in V, |\alpha| \leqslant p} |(D^\alpha f)(x)|(1 + \|x\|)^p < \infty,$$

$S_p(U)$ – пополнение $S(U)$ по норме $\|\cdot\|_{p,U}$.

$C(K)$ – пространство непрерывных функций на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$ с обычной топологией, $H(\mathcal{O})$ – пространство голоморфных в области $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{C}^n$ функций с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах $\mathcal{O}$.

1.3. Основной результат и организация работы. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим нормированные пространства

$$H_{b,m}(T_C) = \left\{ f \in H(T_C) : \|f\|_m = \sup_{z \in T_C} \frac{|f(z)|}{e^{b(y) + \omega_m(|z|_n)}(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)})^m} < \infty \right\},$$

где $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}^n, y \in C$. Пусть $H_{b,\mathfrak{M}}(T_C) = \bigcup_{m=0}^{\infty} H_{b,m}(T_C)$. С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $H_{b,\mathfrak{M}}(T_C)$ – линейное пространство. Наделим $H_{b,\mathfrak{M}}(T_C)$ топологией индуктивного предела пространств $H_{b,m}(T_C)$.

Основной результат данной заметки – следующая теорема.

Теорема 1. *Преобразование Фурье-Лапласа устанавливает изоморфизм пространств $G^*_{\mathfrak{M}}(U)$ и $H_{b,\mathfrak{M}}(T_C)$.*

Доказательство Теоремы 1 основано на идеях М. Наймарка [4] и Б.А. Тейлора [5], использует ряд результатов из [6] и приведено в разделе 3. Оно изложено в достаточно сжатой форме так, как проводится по той же схеме, что и доказательство Теоремы 2 в [3]. Можно также заметить, что в процессе доказательства Теоремы 1 показано, как устранить ряд пробелов в доказательстве Теоремы 2 из [3]. Раздел 2 посвящен вспомогательным результатам.

2. Вспомогательные результаты

Напомним, что пространство, представимое в виде проективного предела последовательности нормированных пространств S_n, $n \in \mathbb{N}$, относительно линейных непрерывных отображений $g_{mn} : S_n \to S_m$, $m < n$, таких, что $g_{n,n+1}$ вполне непрерывно для каждого n, называется пространством (M^*) [7]. Пользуясь теоремой Арцела-Асколи и условием i_2), легко доказать следующее уьверждение.

Лемма 1. *Пространство $G_{\mathfrak{M}}(U)$ – пространство (M^*).*

Таким образом, $G_{\mathfrak{M}}(U)$ является пространством Фреше-Шварца [8].

Далее понадобится общий вид функционала из $G'_{\mathfrak{M}}(U)$. В связи с этим введём пространство $C_{\mathfrak{M}}(U)$ как проективный предел пространств

$$C_m(U) = \{f \in C(U) : \widetilde{p}_m(f) = \sup_{x \in U} |f(x)|(1 + \|x\|)^m < \infty\},\ m \in \mathbb{N}.$$

По известной схеме (см. [5, Предложения 2.10, 2.11, Следствие 2.12]) с использованием условия i_2) доказывается

Лемма 2. *Пусть функционал $T \in G'_{\mathfrak{M}}(U)$, числа $c > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ таковы, что*

$$|(T, f)| \leqslant c p_m(f), \qquad f \in G_{\mathfrak{M}}(U).$$

Тогда найдутся функционалы $T_\alpha \in C'_m(U)$ $(\alpha \in \mathbb{Z}^n_+)$ такие, что

$$|(T_\alpha, f)| \leqslant \frac{c\widetilde{p}_m(f)}{M^{(m)}_{|\alpha|}}, \qquad f \in C_m(U),$$

и

$$(T, f) = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} (T_\alpha, D^\alpha f), \qquad f \in G_{\mathfrak{M}}(U).$$

Лемма 3. *Для любого $m \in \mathbb{N}$ существует постоянная $q \geqslant 0$ такая, что*

$$w_m(r) + \ln(1 + r) \leqslant w_{m+1}(r) + q, \quad r \geqslant 0.$$

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Для любого $r > 0$ имеем

$$w_m(r) + \ln r = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^{k+1}}{M^{(m)}_k} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^{k+1}}{M^{(m+1)}_{k+1}} \frac{M^{(m+1)}_{k+1}}{M^{(m)}_k}$$
$$\leqslant \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^{k+1}}{M^{(m+1)}_{k+1}} + \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{M^{(m+1)}_{k+1}}{M^{(m)}_k} \leqslant w_{m+1}(r) + \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{M^{(m+1)}_{k+1}}{M^{(m)}_k}.$$

Отсюда, принимая во внимание условие i_1), легко следует утверждение леммы. □

Лемма 4. *Пусть $S \in G'_{\mathfrak{M}}(U)$. Тогда $\hat{S} \in H_{b,\mathfrak{M}}(T_C)$.*

Доказательство. Отметим вначале, что если $z = x + iy \in T_C$ ($x \in \mathbb{R}^n, y \in C$), то функция $f_z(\xi) = e^{i\langle \xi, z\rangle}$ принадлежит пространству $G_{\mathfrak{M}}(U)$. Действительно, для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p_m(f_z) &= \sup_{\xi \in V, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|(iz)^\alpha e^{i\langle \xi, z\rangle}|(1+\|\xi\|)^m}{M_{|\alpha|}^{(m)}} \\ &\leqslant \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|z|_n^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}^{(m)}} \sup_{\xi \in V} \exp(-\langle \xi, y\rangle + m\ln(1+\|\xi\|)) \\ &= \exp(\omega_m(|z|_n) + \sup_{\xi \in V}(-\langle \xi, y\rangle + m\ln(1+\|\xi\|))). \end{aligned}$$

Известно [3, Лемма 1], что найдётся число $d > 0$, не зависящее от y, такое, что

$$\sup_{\xi \in V}(-\langle \xi, y\rangle + m\ln(1+\|\xi\|)) \leqslant b(y) + dm + 3m\ln\left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right) + 2m\ln(1+\|y\|). \qquad (1)$$

Пользуясь этим неравенством и леммой 3, получаем окончательную оценку

$$p_m(f_z) \leqslant Ae^{b(y)+\omega_{3m}(|z|_n)}\left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m}, \qquad (2)$$

где A – некоторая положительная постоянная, не зависящая от $z \in T_C$. Таким образом, $f_z \in G_{\mathfrak{M}}(U)$ и если $S \in G'_{\mathfrak{M}}(U)$, то на T_C корректно определена функция $\hat{S}(z) = (S, e^{i\langle \xi, z\rangle})$. Пользуясь леммой 2 и условием i_8), легко показать, что $\hat{S} \in H(T_C)$. Далее, найдутся числа $m \in \mathbb{N}$ и $c > 0$ такие, что

$$|(S, f)| \leqslant cp_m(f), \qquad f \in G_{\mathfrak{M}}(U).$$

Отсюда и из (2), получаем

$$|\hat{S}(z)| \leqslant cAe^{b(y)+\omega_{3m}(|z|_n)}\left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m}.$$

Следовательно, $\hat{S} \in H_{b,\mathfrak{M}}(T_C)$. □

Стандартные рассуждения с применением теоремы Монтеля и леммы 3 убеждают, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ вложения $j_m : H_{b,m}(T_C) \to H_{b,m+1}(T_C)$ вполне непрерывны. Это означает, что $H_{b,\mathfrak{M}}(T_C)$ – пространство (LN^*) [7] или, придерживаясь более современной терминологии, – пространство DFS [8].

В ходе доказательства Теоремы 1 при переходе от интегральных весовых оценок голоморфных функций в трубчаиой области T_C к равномерным будет применяться следующая лемма [6, Lemma 9].

Лемма 5. *Пусть K – открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале. Пусть h – выпуклая непрерывная позитивно однородная степени 1 функция на замыкании конуса K. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $A_\varepsilon > 0$ такая, что*

$$|h(y_2) - h(y_1)| \leqslant \varepsilon\|y_1\| + \varepsilon\|y_2\| + A_\varepsilon$$

для любых $y_1, y_2 \in K$ таких, что $\|y_2 - y_1\| \leqslant 1$.

3. Описание пространства $G^*_{\mathfrak{M}}(U)$

3.1. Три важных результата. Приведем вначале три результата, играющих ключевую роль при доказательстве теоремы 1. Первый результат – это теорема Пейли-Винера-Шварца для пространства $S(U)$, полученная в [3] по схеме из [1]. Она будет применяться при доказательстве биективности преобразования Фурье-Лапласа. Для ее формулировки определим пространство $V_b(T_C)$ следующим образом. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим нормированные пространства

$$V_{b,m}(T_C) = \left\{ f \in H(T_C) : N_m(f) = \sup_{z \in T_C} \frac{|f(z)|e^{-b(y)}}{(1+\|z\|)^m(1+\frac{1}{\Delta_C(y)})^m} < \infty \right\},$$

где $z = x + iy,\ x \in \mathbb{R}^n, y \in C$. Пусть $V_b(T_C) = \bigcup_{m=0}^{\infty} V_{b,m}(T_C)$. С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $V_b(T_C)$ – линейное пространство. Наделим $V_b(T_C)$ топологией индуктивного предела пространств $V_{b,m}(T_C)$.

Теорема 2. *Преобразование Фурье-Лапласа $\mathcal{F} : S^*(U) \to V_b(T_C)$, задаваемое по правилу $\mathcal{F}(T) = \hat{T}$, – изоморфизм.*

Для $b(y) = a\|y\|$ $(a \geqslant 0)$ Теорема 2 доказана В.С. Владимировым [1, с. 170].

Второй необходимый нам результат установлен Роевером [2, Теорема 3.1]. Он будет использован при доказательстве сюръективности преобразования Фурье-Лапласа.

Теорема 3. *Пусть линейное подпространство в $\mathbb{C}^n$ размерности $n-k$ задано с помощью линейных функций $\theta_1 = s_1(\theta_{k+1}, \ldots, \theta_n), \ldots, \theta_k = s_k(\theta_{k+1}, \ldots, \theta_n)$ или коротко $w = s(z)$, $w \in \mathbb{C}^k, z \in \mathbb{C}^{n-k}$. Пусть $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega$ – области голоморфности в $\mathbb{C}^n$ такие, что при некотором $\varepsilon > 0$ ε-окрестность Ω_1 по первым k координатам в полукруговой метрике содержится в Ω_2, то есть,*

$$\{(\theta_1, \ldots, \theta_n) : |\theta_j - \theta_j^0| \leqslant \varepsilon, j = 1, \ldots, k; \theta_j = \theta_j^0, j = k+1, \ldots, n; \theta^0 = (\theta_1^0, \ldots, \theta_n^0) \in \Omega_1\} \subset \Omega_2.$$

Пусть φ – плюрисубгармоническая функция на Ω и для $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \Omega_1$ пусть

$$\varphi_\varepsilon(\theta) = \max\{\varphi(\theta_1 + \xi_1, \ldots, \theta_n + \xi_n : |\xi_j| \leqslant \varepsilon,\ j = 1, \ldots, k\}.$$

Пусть

$$\Omega' = \{z \in \mathbb{C}^{n-k} : (s(z), z) \in \Omega\},\ \Omega'_j = \{z \in \mathbb{C}^{n-k} : (s(z), z) \in \Omega_j\}, \qquad j = 1, 2.$$

Пусть $\tilde{\varphi}(z) = \varphi(s(z), z)$, $z \in \Omega'$.

Тогда для заданной функции f, аналитической в Ω' существует функция F, аналитическая в Ω_1 такая, что $F(s(z), z) = f(z),\ z \in \Omega'$, и при некотором $K > 0$, зависящем только от k и от $s_1, \ldots, s_k$,

$$\int_{\Omega_1} \frac{F(\theta)\exp(-\varphi_\varepsilon(\theta))}{(1 + \|\theta\|^2)^{3k}}\, d\lambda_n(\theta) \leqslant K\varepsilon^{-2k} \int_{\Omega'_2} |f(z)|^2 e^{-\tilde{\varphi}(z)}\, d\lambda_{n-k}(\theta),$$

где λ_n λ_{n-k} обозначают меру Лебега в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^{n-k}$, соответственно. Если правая часть последнего неравенства конечна, то F зависит от $f, \Omega_1, \varepsilon, \varphi$.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{O}$ – область голоморфности в $\mathbb{C}^n$. Пусть h – плюрисубгармоническая функция в $\mathcal{O}$ и φ – плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$ такая, что при некоторых $c_\varphi > 0$ и $\nu > 0$*

$$|\varphi(z) - \varphi(t)| \leqslant c_\varphi, \quad \textit{если} \quad \|z - t\| \leqslant \frac{1}{(1 + \|t\|)^\nu}.$$

Пусть функция $S \in H(\mathbb{C}^n \times \mathcal{O})$ удовлетворяет неравенству

$$|S(z, \zeta)| \leqslant e^{\varphi(z) + h(\zeta)}, \qquad z \in \mathbb{C}^n, \quad \zeta \in \mathcal{O},$$

и $S(\zeta, \zeta) = 0$ для $\zeta \in \mathcal{O}$.

Тогда существуют функции $S_1, \ldots, S_n \in H(\mathbb{C}^n \times \mathcal{O})$ такие, что:

a) $S(z, \zeta) = \sum\limits_{j=1}^{n} S_j(z, \zeta)(z_j - \zeta_j)$, $(z, \zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathcal{O}$;

b) при некотором $m \in \mathbb{N}$, не зависящем от S,

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n \times \mathcal{O}} \frac{|S_j(z, \zeta)|^2}{e^{2(\varphi(z) + h(\zeta) + m\ln(1 + \|(z,\zeta)\|))}}\, d\lambda_{2n}(z, \zeta) < \infty, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Теорема 4 доказана в [6] (см. Лемма 11). Она понадобится при доказательстве инъективности преобразования Фурье-Лапласа.

3.2. Доказательство теоремы 1. Вначале отметим, что в силу леммы 4 линейное отображение $L : S \in G^*_{\mathfrak{M}}(U) \to \hat{S}$ действует из $G^*_{\mathfrak{M}}(U)$ в $H_{b,\mathfrak{M}}(T_C)$. Непрерывность L устанавливается точно так же, как и в [3, доказательство теоремы 2] .

Докажем биективность отображения L, действуя по схеме из [4], [5].

Покажем, что L – сюръекция. Пусть $F \in H_{b,\mathfrak{M}}(T_C)$. Тогда, $F \in H_{b,m}(T_C)$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Учитывая, что $d(z) = \Delta_C(y)$, имеем

$$\int_{T_C} |F(z)|^2 e^{-2(b(\operatorname{Im} z)+\omega_m(|z|_n)+m\ln(1+\frac{1}{d(z)})+(n+1)\ln(1+\|z\|^2))}\, d\lambda_n(z) < \infty. \tag{3}$$

Пусть $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n \times C$. Положим в теореме 3 (с заменой n на $2n$) $\Omega = \Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}^{2n} + i\mathcal{K}$. Очевидно, $\Omega = \Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{C}^n \times T_C$. В качестве линейного подпространства в этой теореме рассмотрим подпространство

$$W = \{(z,\xi) \in \mathbb{C}^{2n} : \quad z_1 = \xi_1, \dots, z_n = \xi_n\}$$

комплексной размерности n. Тогда

$$\Omega' = \Omega_1' = \Omega_2' = \{z \in \mathbb{C}^n : (z,z) \in \Omega = \mathbb{C}^n \times T_C\} = T_C.$$

Далее, в теореме 3 в качестве ε возьмем 1, а в качестве φ – функцию

$$\varphi(z,\zeta) = 2(b(\operatorname{Im}\zeta) + \omega_m(|z|_n) + m\ln(1 + \frac{1}{d(\zeta)}) + (n+1)\ln(1 + \|(z,\zeta)\|^2)),$$

где $z = x + iy \in \mathbb{C}^n, \zeta \in T_C$. Отметим, что $\varphi(z,\zeta)$ плюрисубгармонична в $\mathbb{C}^n \times T_C$ и

$$\widetilde{\varphi}(z) = 2(b(\operatorname{Im} z) + \omega_m(|z|_n) + m\ln(1 + \frac{1}{d(z)}) + (n+1)\ln(1 + 2\|z\|^2)), \quad z \in T_C.$$

Ввиду (3)

$$\int_{T_C} |F(z)|^2 e^{-\widetilde{\varphi}(z)}\, d\lambda_n(z) < \infty.$$

Тогда по теореме 3 существует функция $\Phi \in H(\mathbb{C}^n \times T_C)$ такая, что $\Phi(z,z) = F(z)$ для $z \in T_C$ и при некотором $B > 0$

$$\int_{\mathbb{C}^n \times T_C} \frac{|\Phi(z,\zeta)|^2 e^{-\varphi_1(z,\zeta)}}{(1 + \|(z,\zeta)\|^2)^{3n}}\, d\lambda_{2n}(z,\zeta) \leqslant B \int_{T_C} |F(z)|^2 e^{-\widetilde{\varphi}(z)}\, d\lambda_n(z).$$

Здесь $\varphi_1(z,\zeta) = \max\limits_{t \in \Pi} \varphi(z+t,\zeta)$. Так как

$$|\ln(1+x_2^2) - \ln(1+x_1^2)| \leqslant |x_2 - x_1|, \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

и при некотором $b_m > 0$ для $r_1, r_2 \geqslant 0$ таких, что $|r_2 - r_1| \leqslant 1$ [10, Лемма 1]

$$|w_m(r_2) - w_m(r_1)| \leqslant b_m, \tag{4}$$

то

$$|\varphi_1(z,\zeta) - \varphi(z,\zeta)| \leqslant c_0, \qquad (z,\zeta) \in \mathbb{C}^n \times T_C,$$

где $c_0 = 2(n+1)\sqrt{n} + 2b_m$. Таким образом,

$$\int_{\mathbb{C}^n \times T_C} \frac{|\Phi(z,\zeta)|^2 e^{-\varphi(z,\zeta)}}{(1 + \|(z,\zeta)\|^2)^{3n}}\, d\lambda_{2n}(z,\zeta) \leqslant Be^{c_0} \int_{T_C} |F(z)|^2 e^{-\widetilde{\varphi}(z)}\, d\lambda_n(z). \tag{5}$$

Правую часть этого неравенства обозначим через B_F. Положив для краткости

$$h_m(z,\zeta) = 2\left(b(\operatorname{Im}\zeta) + \omega_m(|z|_n) + m\ln\left(1 + \frac{1}{d(\zeta)}\right)\right), \qquad z \in \mathbb{C}^n, \quad \zeta \in T_C,$$

получим равномерные оценки на $\Phi(z,\zeta)$. Пусть $(z,\zeta) \in \mathbb{C}^n \times T_C$ и $R = \min(1, \frac{d(\zeta)}{4})$. Отметим, что если $(t,u) \in \mathbb{C}^n \times T_C$ принадлежит шару $B((z,\zeta),R)$, то в силу леммы 5 при некотором $A_\varepsilon > 0$

$$|b(\operatorname{Im} u) - b(\operatorname{Im}\zeta)| \leqslant 2\varepsilon\|\operatorname{Im}\zeta\| + A_\varepsilon + \varepsilon;$$

по неравенству (4)

$$|\omega_m(|t|_n) - \omega_m(|z|_n)| \leqslant b_m,$$

и, очевидно,

$$|\ln(1 + \|(t,u)\|^2) - \ln(1 + \|(z,\zeta)\|^2)| \leqslant 1;$$

$$\left|\ln\left(1 + \frac{1}{d(u)}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{d(\zeta)}\right)\right| \leqslant \frac{5}{4}.$$

Пользуясь этими неравенствами, имеем при любом $\varepsilon > 0$

$$|h_m(t,u) + (5n+2)\ln(1+\|(t,u)\|^2) - (h_m(z,\zeta) + (5n+2)\ln(1+\|(z,\zeta))\|^2)| \leqslant\leqslant 4\varepsilon\|\operatorname{Im}\zeta\| + B_{\varepsilon,m},$$

где $B_{\varepsilon,m} = 2A_\varepsilon + 2\varepsilon + \frac{5m}{2} + 2b_m$. Пользуясь плюрисубгармоничностью функции $|\Phi(t,u)|^2$ в $\mathbb{C}^n \times T_C$, неравенством (5) и последним неравенством, получим, что

$$|\Phi(z,\zeta)|^2 \leqslant \frac{B_F}{\lambda_{2n}(R)} e^{h_m(z,\zeta)+(5n+2)\ln(1+\|(z,\zeta)\|^2)+4\varepsilon\|\operatorname{Im}\zeta\|+B_{\varepsilon,m}}.$$

Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $c_1 > 0$ такое, что для $(z,\zeta) \in \mathbb{C}^n \times T_C$

$$|\Phi(z,\zeta)| \leqslant c_1 e^{b(\operatorname{Im}\zeta)+\omega_m(|z|_n)+(m+2n)\ln(1+\frac{1}{d(\zeta)})+(5n+2)\ln(1+\|(z,\zeta)\|)+2\varepsilon\|\operatorname{Im}\zeta\|}. \tag{6}$$

Так как $\Phi(z,\zeta)$ – целая по z, то, разлагая $\Phi(z,\zeta)$ по степеням z, имеем

$$\Phi(z,\zeta) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} C_\alpha(\zeta) z^\alpha, \qquad \zeta \in T_C, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

По формуле Коши

$$C_\alpha(\zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|z_1|=R} \dots \int_{|z_n|=R} \frac{\Phi(z,\zeta)}{z_1^{\alpha_1+1}\dots z_n^{\alpha_n+1}}\, dz_1 \dots dz_n,$$

где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $R > 0$ – любое. Отсюда следует, что $C_\alpha \in H(T_C)$. Пользуясь (6), имеем

$$|C_\alpha(\zeta)| \leqslant \frac{c_1((1+\sqrt{n}R)(1+\|\zeta\|))^{5n+2} e^{b(\operatorname{Im}\zeta)+2\varepsilon\|\operatorname{Im}\zeta\|+\omega_m(R)} \left(1+\frac{1}{d(\zeta)}\right)^{m+2n}}{R^{|\alpha|}}.$$

Воспользовавшись леммой 3, найдём постоянную $c_2 > 0$ (зависящую от ε) такую, что

$$|C_\alpha(\zeta)| \leqslant \frac{c_2 e^{\omega_{m+5n+2}(R)}}{R^{|\alpha|}} e^{b(\operatorname{Im}\zeta)+2\varepsilon\|\operatorname{Im}\zeta\|}(1+\|\zeta\|)^{5n+2}\left(1+\frac{1}{d(\zeta)}\right)^{m+2n}, \ \zeta \in T_C.$$

Следовательно, для $\zeta \in T_C$

$$|C_\alpha(\zeta)| \leqslant c_2 \left(\inf_{R>0} \frac{e^{\omega_{m+5n+2}(R)}}{R^{|\alpha|}}\right) e^{b(\operatorname{Im}\zeta)+2\varepsilon\|\operatorname{Im}\zeta\|}(1+\|\zeta\|)^{5n+2}\left(1+\frac{1}{d(\zeta)}\right)^{m+2n}.$$

Отсюда, принимая во внимание равенство

$$\inf_{r>0} \frac{e^{\omega_{m+5n+2}(r)}}{r^k} = \frac{1}{M_k^{(m+5n+2)}}, \qquad k = 0, 1, \dots,$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$ для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\zeta \in T_C$ имеем

$$|C_\alpha(\zeta)| \leqslant c_2 \frac{e^{b(\operatorname{Im}\zeta)+2\varepsilon\|\operatorname{Im}\zeta\|}}{M_{|\alpha|}^{(m+5n+2)}}(1+\|\zeta\|)^{5n+2}\left(1+\frac{1}{d(\zeta)}\right)^{m+2n}. \tag{7}$$

Определив для каждого $\varepsilon > 0$ функцию b_ε на $\overline{C}$ по правилу $b_\varepsilon(y) = b(y) + \varepsilon\|y\|$ и пространство $V_{b_\varepsilon}(T_C)$ – индуктивный предел нормированных пространств

$$V_{b_\varepsilon,m}(T_C) = \left\{ f \in H(T_C) : N_{k,\varepsilon}(f) = \sup_{z\in T_C} \frac{|f(z)|e^{-b_\varepsilon(y)}}{(1+\|z\|)^k(1+\frac{1}{\Delta_C(y)})^k} < \infty \right\},$$

где $k \in \mathbb{Z}_+$, $z = x+iy$, $x \in \mathbb{R}^n, y \in C$, видим из последнего неравенства, что для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ функция C_α принадлежит пространству $H_b(T_C)$ – проективному пределу пространств $V_{b_\varepsilon}(T_C)$. Ввиду оценки (7) множество $\left\{M_{|\alpha|}^{(m+5n+2)} C_\alpha\right\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ ограничено в каждом пространстве $V_{b_\varepsilon}(T_C)$. Значит, оно ограничено и в $H_b(T_C)$. Так как пространство $H_b(T_C)$ совпадает с пространством $V_b(T_C)$ [3, Theorem D] (для случая, когда $b(y) = a\|y\|$ с $a \geqslant 0$ этот факт установлен В.С. Владимировым [1, Глава 2]), то множество $\left\{M_{|\alpha|}^{(m+5n+2)} C_\alpha\right\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ ограничено в $V_b(T_C)$. Далее, ввиду изоморфизма пространств $S^*(U)$ и $V_b(T_C)$ (Теорема 1) найдутся функционалы $S_\alpha \in S^*(U)$ такие, что $\hat{S_\alpha} = C_\alpha$, множество $\mathcal{A} = \left\{M_{|\alpha|}^{(m+5n+2)} S_\alpha\right\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ будет ограниченным в $S^*(U)$, а значит, и слабо ограниченным. По теореме Шварца [1, глава 1, §5] найдутся числа $c_3 > 0$ и $p \in \mathbb{N}$ такие, что

$$|(F, f)| \leqslant c_3\|f\|_{p,U}, \qquad F \in \mathcal{A}, \quad f \in S(U).$$

Таким образом,

$$|(S_\alpha, f)| \leqslant \frac{c_3}{M_{|\alpha|}^{(m+5n+2)}}\|f\|_{p,U}, \qquad f \in S(U), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{8}$$

Определим функционал T на $G_{\mathfrak{M}}(U)$ по правилу:

$$(T, f) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0}(S_\alpha, (-i)^{|\alpha|}D^\alpha f),\ \ f \in G_{\mathfrak{M}}(U). \tag{9}$$

Покажем, что $T \in G'_{\mathfrak{M}}(U)$. Пользуясь неравенством (8), имеем для $f \in G_{\mathfrak{M}}(U)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, натуральных чисел $s \geqslant p$

$$\begin{aligned}|(S_\alpha, D^\alpha f)| \leqslant& \frac{c_3}{M_{|\alpha|}^{(m+5n+2)}} \sup_{x\in U, |\beta|\leqslant p} |(D^{\alpha+\beta} f)(x)|(1 + \|x\|)^p \\ \leqslant& \frac{c_3}{M_{|\alpha|}^{(m+5n+2)}} \sup_{x\in U, |\beta|\leqslant p} \frac{p_{m+s}(f)M_{|\alpha|+|\beta|}^{(m+s)}(1 + \|x\|)^p}{(1 + \|x\|)^{m+s}} \\ \leqslant& c_3 p_{m+s}(f)\frac{M_{|\alpha|+p}^{(m+s)}}{M_{|\alpha|}^{(m+5n+2)}}.\end{aligned}$$

Пользуясь условием i_8), выберем $s \geqslant p$ так, чтобы сходился ряд $\sum\limits_{|\alpha|\geqslant 0}\frac{M_{|\alpha|+p}^{(m+s)}}{M_{|\alpha|}^{(m+5n+2)}}$. Значит, каково бы ни было $f \in G_{\mathfrak{M}}(U)$ ряд в правой части в (9) сходится абсолютно, причем при некотором $c_4 > 0$, не зависящем от $f \in G_{\mathfrak{M}}(U)$,

$$|(T, f)| \leqslant c_4 p_{m+s}(f).$$

Следовательно, линейный функционал T корректно определен и непрерывен. Легко проверить, что $\hat{T} = F$. Таким образом, отображение L сюръективно.

Покажем, что отображение L инъективно. Пусть для $T \in G'_{\mathfrak{M}}(U)$ $\hat{T} \equiv 0$. Найдутся числа $m \in \mathbb{N}$ и $c_5 > 0$ такие, что

$$|(T, f)| \leqslant c_5 p_m(f),\ \ f \in G_{\mathfrak{M}}(U).$$

По лемме 2 найдутся функционалы $T_\alpha \in C'_m(U)$ $(\alpha \in \mathbb{Z}_+^n)$ такие, что

$$(T, f) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}(T_\alpha, D^\alpha f), \qquad f \in G_{\mathfrak{M}}(U),$$

и

$$|(T_\alpha, g)| \leqslant \frac{c_5}{M_{|\alpha|}^{(m)}}\widetilde{p}_m(g),\ \ g \in C_m(U). \tag{10}$$

Отсюда для любого $z \in T_C$ имеем

$$\hat{T}(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} i^{|\alpha|}(T_\alpha, e^{i\langle\xi,z\rangle})z^\alpha.$$

Пусть $V_\alpha(z) = i^{|\alpha|}(T_\alpha, e^{\langle\xi,z\rangle})$. Очевидно $V_\alpha \in H(T_C)$. Пользуясь неравенствами (10) и (1), имеем

$$|V_\alpha(z)| \leqslant \frac{c_6}{M_{|\alpha|}^{(m)}}(1 + \|z\|)^{2m}\left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m} e^{b(y)}, \tag{11}$$

где постоянная $c_6 > 0$ не зависит от $z = x + iy \in T_C$ и α. Рассмотрим функцию

$$S(u, z) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} V_\alpha(z)u^\alpha, \qquad z \in T_C, \quad u \in \mathbb{C}^n.$$

Воспользовавшись оценкой (11), получим

$$|S(u,z)| \leqslant c_6 \left(1+\frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m} (1+\|z\|)^{2m} e^{b(y)} \sum_{|\alpha|\geqslant 0} \frac{|u|_n^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}^{(m)}}.$$

Пользуясь условием i_8), выберем $\nu \in \mathbb{N}$ так, чтобы сходился ряд $\sum\limits_{|\alpha|\geqslant 0} \frac{M_{|\alpha|}^{(m+\nu)}}{M_{|\alpha|}^{(m)}}$. Тогда

$$|S(u,z)| \leqslant c_7 e^{b(y)} \left(1+\frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m} (1+\|z\|)^{2m} e^{\omega_{m+\nu}(|u|_n)},$$

где $c_7 = c_6 \sum\limits_{|\alpha|\geqslant 0} \frac{M_{|\alpha|}^{(m+\nu)}}{M_{|\alpha|}^{(m)}}$. Отметим, что $S(z,z) = \sum\limits_{|\alpha|\geqslant 0} V_\alpha(z) z^\alpha = 0$ для любого $z \in T_C$. Тогда по Теореме 4 найдутся функции $S_1, \ldots, S_n \in H(\mathbb{C}^n \times T_C)$ такие, что

$$S(z,\zeta) = \sum_{j=1}^n S_j(z,\zeta)(z_j - \zeta_j), \qquad z \in \mathbb{C}^n, \quad \zeta \in T_C,$$

и при некоторых $c_8 > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ для любых $j = 1, 2, \ldots, n$, $z \in \mathbb{C}^n, \zeta \in T_C$

$$|S_j(z,\zeta)| \leqslant c_8 \exp\left(\omega_k(|z|_n) + b(\operatorname{Im}\zeta) + k\ln\left(1+\frac{1}{d(\zeta)}\right) + k\ln(1+\|\zeta\|)\right). \tag{12}$$

Разложим S_j в ряд Тейлора по степеням z:

$$S_j(z,\zeta) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} S_{j,\alpha}(\zeta) z^\alpha, \qquad z \in \mathbb{C}^n, \quad \zeta \in T_C.$$

Из (12) (действуя точно так же, как и про оценке функций C_α) получим

$$|S_{j,\alpha}(\zeta)| \leqslant c_8 \exp\left(b(\operatorname{Im}\zeta) + k\ln\left(1+\frac{1}{d(\zeta)}\right) + k\ln(1+\|\zeta\|)\right) \frac{1}{M_{|\alpha|}^{(k)}}.$$

Поскольку преобразование Фурье-Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между $S^*(U)$ и $V(T_C)$, то найдутся функционалы $\psi_{j,\alpha} \in S^*(U)$ такие, что $\hat{\psi}_{j,\alpha} = S_{j,\alpha}$. Из последней оценки следует, что множество $\{S_{j,\alpha} M_{|\alpha|}^{(k)}\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ ограничено в $V(T_C)$. Но тогда множество $\Psi = \{M_{|\alpha|}^{(k)} \psi_{j,\alpha}\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n, j=1,\ldots,n}$ ограничено в $S^*(U)$. А значит, и слабо ограничено. По теореме Шварца [1, глава 1, §5] найдутся числа $c_9 > 0$ и $p \in \mathbb{N}$ такие, что

$$|(F,\varphi)| \leqslant c_9 |\|\varphi\||_{p,U}, \qquad F \in \Psi, \quad \varphi \in S(U).$$

Таким образом,

$$|(\Psi_{j,\alpha}, f)| \leqslant \frac{c_9}{M_{|\alpha|}^{(k)}} \|f\|_{p,U}, \qquad f \in S(U), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Для $j = 1, \ldots, n$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ хотя бы с одной отрицательной компонентой пусть $\Psi_{j,\alpha}$ – нулевой функционал из $S^*(U)$ и $S_{j,\alpha}(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}^n$. Тогда

$$S(z,\zeta) = \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|\geqslant 0} (S_{j,(\alpha_1,\ldots,\alpha_j-1,\ldots,\alpha_n)}(\zeta) - S_{j,\alpha}(\zeta)\zeta_j) z^\alpha, \quad z \in \mathbb{C}^n, \ \zeta \in T_C.$$

Следовательно,

$$V_\alpha(\zeta) = \sum_{j=1}^n (S_{j,(\alpha_1,\ldots,\alpha_{j-1},\ldots,\alpha_n)}(\zeta) - S_{j,\alpha}(\zeta)\zeta_j), \qquad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

То есть

$$V_\alpha(\zeta) = \sum_{j=1}^n \left(\hat{\Psi}_{j,(\alpha_1,\ldots,\alpha_{j-1},\ldots,\alpha_n)}(\zeta) + i\left(\Psi_{j,\alpha}, \frac{\partial}{\partial\xi_j}(e^{i\langle\xi,\zeta\rangle})\right)\right).$$

Это означает, что правая часть в последнем равенстве – преобразование Фурье-Лапласа функционала, действующего по правилу:

$$f \in S(U) \to \sum_{j=1}^{n}\left((\Psi_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\dots,\alpha_n)}, f) + i\left(\Psi_{j,\alpha}, \frac{\partial}{\partial \xi_j} f\right)\right).$$

Значит,

$$(T_\alpha, f) = (-i)^{|\alpha|}\sum_{j=1}^{n}\left(i\left(\Psi_{j,\alpha}, \frac{\partial}{\partial \xi_j} f\right) + (\Psi_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\dots,\alpha_n)}, f)\right).$$

Таким образом,

$$(T, f) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0}(-i)^{|\alpha|}\sum_{j=1}^{n}\left(i\left(\Psi_{j,\alpha}, \frac{\partial}{\partial \xi_j} D^\alpha f\right) + (\Psi_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\dots,\alpha_n)}, D^\alpha f)\right), \qquad f \in G_{\mathfrak{M}}(U).$$

Для произвольного $N \in \mathbb{N}$ определим множества

$$B_N = \{\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}^n :\ \alpha_1 \leqslant N, \dots, \alpha_n \leqslant N\},$$
$$R_{N,j} = \{\alpha_1 \leqslant N, \dots, \alpha_j = N, \dots, \alpha_n \leqslant N, \alpha \in \mathbb{Z}^n_+\}, \qquad j = 1,\dots,n,$$

и функционал T_N на $G_{\mathfrak{M}}(U)$ по правилу

$$(T_N, f) = \sum_{\alpha\in B_N}(-i)^{|\alpha|}\sum_{j=1}^{n}\left(i\left(\Psi_{j,\alpha}, \frac{\partial}{\partial \xi_j} D^\alpha f)(\xi)\right) + (\Psi_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\dots,\alpha_n)}, D^\alpha f)\right).$$

Тогда

$$(T, f) = \lim_{N\to\infty}(T_N, f), \qquad f \in G_{\mathfrak{M}}(U).$$

Как и в [3] убеждаемся, что

$$(T_N, f) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha\in R_{N,j}}(-i)^{|\alpha|} i(\Psi_{j,\alpha}, \frac{\partial}{\partial \xi_j} D^\alpha f),\ f \in G_{\mathfrak{M}}(U).$$

Отсюда, принимая во внимание (13), имеем $\forall f \in G_{\mathfrak{M}}(U)$

$$|(T_N, f)| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha\in R_{N,j}}\frac{c_9}{M^{(k)}_{|\alpha|}}\sup_{\xi\in U, |\gamma|\leqslant p}(|(D^{(\alpha_1+\gamma_1,\dots\alpha_j+\gamma_j+1,\dots,\alpha_n+\gamma_n)}f)(\xi)|(1+\|\xi\|)^p)).$$

Каково бы ни было натуральное число $\nu \geqslant p$, для любого $\forall f \in G_{\mathfrak{M}}(U)$ имеем

$$|(T_N, f)| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha\in R_{N,j}}\frac{c_9}{M^{(k)}_{|\alpha|}}p_\nu(f)\sup_{\xi\in U, |\gamma|\leqslant p}\frac{M^{(\nu)}_{|\alpha|+|\gamma|+1}}{(1+\|\xi\|)^{\nu-p}} \leqslant c_9 p_\nu(f)\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha\in R_{N,j}}\frac{M^{(\nu)}_{|\alpha|+p+1}}{M^{(k)}_{|\alpha|}}.$$

Пользуясь условием i_8), выберем $\nu \in \mathbb{N}$ так, чтобы сходился ряд $\sum\limits_{|\alpha|\geqslant 0}\frac{M^{(\nu)}_{|\alpha|+p+1}}{M^{(k)}_{|\alpha|}}$. Тогда

$$|(T_N, f)| \leqslant n c_9 p_\nu(f)\sum_{|\alpha|\geqslant N}\frac{M^{(\nu)}_{|\alpha|+p+1}}{M^{(k)}_{|\alpha|}}.$$

Отсюда следует, что $(T_N, f) \to 0$ при $N \to \infty$. Значит $(T, f) = 0\ \forall f \in G_{\mathfrak{M}}(U)$. Итак, отображение L инъективно.

По теореме об открытом отображении [11, Приложение 1] отображение L^{-1} непрерывно. Таким образом, L – топологический изоморфизм. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука, 1979.
2. De Roever J.W. *Complex Fourier transformation and analytic functionals with unbounded carriers.* Amsterdam, Mathematisch Centrum, 1977
3. Мусин И.Х., Федотова П.В. *Теорема типа Пэли–Винера для ультрараспределений* // Матем. заметки. **85**:6, 894–914 (2009).
4. M. Neymark. *On the Laplace transform of functionals on classes of infinitely differentiable functions* // Ark. math. **7**:6, 577-594 (1969).
5. B.A. Taylor. *Analytically uniform spaces of infinitely differentiable functions* // Communications on pure and applied mathematics. **24**:1 (1971), 39-51.
6. Il'dar Kh. Musin, Polina V. Yakovleva. *On a space of smooth functions on a convex unbounded set in* $\mathbb{R}^n$ *admitting holomorphic extension in* $\mathbb{C}^n$ // Central European Journal of Mathematics. **10**:2, 665-692 (2012).
7. Себаштьян-и-Сильва Ж. *О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях* // сб. пер. Математика. **1**:1, 60-77 (1957).
8. Жаринов В.В. *Компактные семейства ЛВП и пространства* FS *и* DFS // УМН. **34**:4, 97-131 (1979).
9. Эдвардс Р. *Функциональный анализ.* М.: Мир, 1972.
10. Мусин И.Х. *О преобразовании Фурье-Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций* // Матем. сб. **191**:10, 57-86 (2000).
11. Робертсон А., Робертсон В. *Топологические векторные пространства.* М.: Мир, 1967.

Ильдар Хамитович Мусин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
Башкирский государственный университет,
З. Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: musin_ildar@mail.ru