ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 4 (2020). С. 117-121.

УДК 517.574 : 517.576 : 517.550.4 : 517.547.2 : 517.518.244

ТЕОРЕМЫ ТИПА ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Б.Н. ХАБИБУЛЛИН

Аннотация. Выпуклая, субгармоническая или плюрисубгармоническая функция соответственно на вещественной прямой, на конечномерном вещественном или комплексном пространстве называется функцией конечного порядка, если она растёт не быстрее некоторой положительной степени модуля переменной при стремлении её к бесконечности. Целая функция на конечномерном комплексном пространстве называется функцией конечного порядка, если логарифм её модуля — (плюри)субгармоническая функция конечного порядка. Измеримое множество в m-мерном вещественном пространстве называется множеством нулевой относительной лебеговой плотности, если лебегова мера части этого множества в шаре радиуса r — величина порядка $o(r^m)$ при $r \to +\infty$. В этой заметке доказано, что выпуклые функции конечного порядка на вещественной прямой и субгармонические функции конечного порядка на конечномерном вещественном пространстве, ограниченные сверху вне некоторого множества нулевой относительной лебеговой плотности, ограничены сверху всюду. Отсюда следует, что субгармонические функции конечного порядка на комплексной плоскости, целые и плюрисубгармонические функции конечного порядка, а также выпуклые или гармонические функции конечного порядка, ограниченные сверху вне некоторого множества нулевой относительной лебеговой плотности, являются постоянными.

Ключевые слова: целая функция, субгармоническая функция, плюрисубгармоническая функция, выпуклая функция, гармоническая функция, функция конечного порядка, теорема Лиувилля.

Mathematics Subject Classification: 32A15, 30D20, 31C10, 31B05, 31A05, 26B25, 26A51

Основа нашей заметки — классическая для *целых,* т. е. голоморфных на *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ или на $\mathbb{C}^n$, где $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$, функций

Теорема Лиувилля. *Ограниченная целая функция постоянна.*

Такое же заключение верно и для *ограниченных сверху* субгармонических функций на $\mathbb{C}$ [1, следствие 2.3.4] и, как очевидное следствие, плюрисубгармонических функций на $\mathbb{C}^n$, выпуклых функций на *вещественной прямой* $\mathbb{R}$ и, как мгновенное следствие, на $\mathbb{R}^m$ при $1 < m \in \mathbb{N}$, гармонических функций на $\mathbb{R}^m$ при любых $m \in \mathbb{N}$ [2, теорема 1.19].

Недавно в работе [3, лемма 4.2] была дана версия теоремы Лиувилля для целых функций *конечного порядка* на $\mathbb{C}$, ограниченных не всюду, а лишь вне некоторого малого множества $E \subset \mathbb{C}$. В [4, лемма 4.2] её доказательство откорректировано, а перед её формулировкой

B.N. Khabibullin, Liouville-type theorems for functions of finite order.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, дополнительное соглашение № 075-02-2020-1421/1 к соглашению № 075-02-2020-1421.

Поступила 1 сентября 2020 г.

в [5, преамбула теоремы 2.1] указывается, что установлена она А. А. Боричевым. Доказательства из [3] и [4] используют довольно продвинутые факты и рассуждения из теории функций комплексного переменного и теории потенциала на комплексной плоскости.

Теорема B. ([3, лемма 4.2], [4, лемма 4.2], [5, теорема 2.1]) *Если целая функция конечного порядка на $\mathbb{C}$ ограничена вне измеримого по плоской мере Лебега λ множества $E \subset \mathbb{C}$ нулевой плоской плотности в том смысле, что*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\lambda\bigl(\{z\in E\colon |z|\leqslant r\}\bigr)}{r^2}=0, \tag{1}$$

то эта функция постоянная.

Основные результаты настоящей заметки развивают и распространяют теорему B на плюрисубгармонические и целые функции на $\mathbb{C}^n$ для всех $n\in\mathbb{N}$, а также на выпуклые и гармонические функции на $\mathbb{R}^m$. При этом наше доказательство и в случае целых функций одной комплексной переменной проще, а построено оно на подходе, отличном от применявшегося в предшествующих доказательствах теоремы B.

Пусть функция M со значениями в *расширенной вещественной прямой* $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ определена на положительной полуоси $\mathbb{R}^+ := \{x\in\mathbb{R}\colon x\geqslant 0\}$, в $\mathbb{R}^m$ или в $\mathbb{C}^n$, отождествляемом с $\mathbb{R}^{2n}$, с евклидовой нормой $|\cdot|$, но, вообще говоря, вне некоторого замкнутого шара $\overline{B}(r)$ ограниченного радиуса $r\in\mathbb{R}^+$ с центром в нуле. *Порядок* функции M (около бесконечности) можно определить как [6, 2.1]

$$\mathsf{ord}[M] := \limsup_{|x|\to\infty} \frac{\ln\bigl(1+M^+(x)\bigr)}{\ln|x|} \in \mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}, \tag{2}$$

где $M^+\colon x\mapsto \max\{0, M(x)\}$ — *положительная часть функции* M. Порядок целой функции f на $\mathbb{C}^n$ определяется как порядок $\mathsf{ord}\bigl[\ln|f|\bigr]$ в смысле (2).

Определение. (ср. с (1)) *Относительной верхней лебеговой плотностью* измеримого по мере Лебега λ на $\mathbb{R}^m$ подмножества $E\subset\mathbb{R}^m$ называем величину

$$\overline{\mathsf{L}}_m(E) := \limsup_{r\to+\infty} \frac{\lambda\bigl(E\cap B(r)\bigr)}{r^m} \in \mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}. \tag{3}$$

Если в правой части равенства из (3) существует обычный предел $\lim_{r\to+\infty}$, то это просто *относительная лебегова плотность* $\mathsf{L}_m(E)\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$ множества E. Определения очевидным образом переносятся на $\mathbb{C}^n$, отождествлённое с $\mathbb{R}^{2n}$, как $\overline{\mathsf{L}}_{2n}$ и L_{2n}.

Теорема 1. *Пусть $m\in\mathbb{N}$ и $E\subset\mathbb{R}^m$ — множество нулевой относительной лебеговой плотности $\mathsf{L}_m(E)=0$ в $\mathbb{R}^m$. Если субгармоническая функция v конечного порядка на $\mathbb{R}^m$ ограничена сверху на $\mathbb{R}^m\setminus E$, то*

$$\sup_{\mathbb{R}^m} v = \sup_{\mathbb{R}^m\setminus E} v < +\infty. \tag{4}$$

Пусть $n\in\mathbb{N}$. Функция на $\mathbb{C}^n$ называется плюрисубгармонической, если её сужение на каждую комплексную прямую — субгармоническая функция. В частности, при $n=1$ эти понятия — одно и то же, а каждая плюрисубгармоническая функция на $\mathbb{C}^n$ и субгармоническая на $\mathbb{R}^{2n}$. По теореме 1 из классических теорем Лиувилля для плюрисубгармонических и целых функций сразу следует

Теорема 2. *Пусть $n\in\mathbb{N}$ и $E\subset\mathbb{C}^n$ — множество нулевой относительной лебеговой плотности в $\mathbb{C}^n$ в смысле определения выше на $\mathbb{R}^{2n}$, отождествлённом с $\mathbb{C}^n$, т. е. $\mathsf{L}_{2n}(E)=0$. Если плюрисубгармоническая или целая функция конечного порядка на $\mathbb{C}^n$ ограничена сверху на $\mathbb{C}^n\setminus E$, то она постоянная.*

Субгармонические функции на $\mathbb{R}$ — это в точности выпуклые функции. При любом $m \in \mathbb{N}$ каждая выпуклая или гармоническая функция на $\mathbb{R}^m$ является и субгармонической. Таким образом, по теореме 1 из классических теорем Лиувилля для выпуклых или гармонических функций на $\mathbb{R}^m$ сразу следует

Теорема 3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $E \subset \mathbb{R}^m$ — множество нулевой относительной лебеговой плотности в $\mathbb{R}^m$. Если выпуклая или гармоническая функция конечного порядка на $\mathbb{R}^m$ ограничена сверху на $\mathbb{R}^m \setminus E$, то она постоянная.*

Осталось доказать теорему 1, к чему и переходим.

Для $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^m$ и $r \in \mathbb{R}^+$ через $\overline{B}(x,r) := \{x' \in \mathbb{R}^m \colon |x'-x| \leqslant r\}$ обозначаем *замкнутый шар* в $\mathbb{R}^m$ *радиуса* r *с центром* x, и, как и прежде, $\overline{B}(r) := \overline{B}(0,r)$. Аналогично для $\mathbb{C}^n$, отождествляемом с $\mathbb{R}^{2n}$. Для λ-интегрируемой функции $v \colon \overline{B}(x,r) \to \overline{\mathbb{R}}$ полагаем

$$\mathsf{B}_v(x,r) := \frac{1}{\lambda\bigl(\overline{B}(x,r)\bigr)} \int_{\overline{B}(x,r)} v \, \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{b_m r^m} \int_{\overline{B}(x,r)} v \, \mathrm{d}\lambda, \quad \mathsf{B}_v(r) := \mathsf{B}_v(0,r), \tag{5}$$

где b_m — *объём единичного шара.* Это соответственно *средние функции v по замкнутым шарам* $\overline{B}(x,r)$ и $\overline{B}(r)$. *Положительность* понимается как $\geqslant 0$, *отрицательность* — $\leqslant 0$.

Лемма 1. *Пусть $0 < R \in \mathbb{R}^+$, v — положительная λ-измеримая функция на замкнутом шаре $\overline{B}(R) \subset \mathbb{R}^m$, $0 < r < R$. Тогда*

$$\mathsf{B}_v(x, R-r) \leqslant \Bigl(1 + \frac{r}{R-r}\Bigr)^m \mathsf{B}_v(R) \quad \textit{для любой точки } x \in \overline{B}(r). \tag{6}$$

Доказательство. По определению (5), в силу положительности v на $\overline{B}(R)$ и включений $\overline{B}(x, R-r) \subset \overline{B}(R)$ для всех $x \in \overline{B}(r)$ получаем

$$\begin{aligned}\mathsf{B}_v(x,R-r) &\overset{(5)}{=} \frac{1}{b_m(R-r)^m} \int_{\overline{B}(x,R-r)} v \, \mathrm{d}\lambda \leqslant \frac{1}{b_m(R-r)^m} \int_{\overline{B}(R)} v \, \mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{b_m R^m}{b_m (R-r)^m} \frac{1}{b_m R^m} \int_{\overline{B}(R)} v \, \mathrm{d}\lambda \overset{(5)}{=} \Bigl(1 + \frac{r}{R-r}\Bigr)^m \mathsf{B}_v(R),\end{aligned}$$

что и требовалось для (6). □

Через $\mathsf{sbh}(S)$ обозначаем класс всех *субгармонических* (локально *выпуклых* при $m=1$) *функций* на каких-либо открытых окрестностях множества $S \subset \mathbb{R}^m$. Роль средних по шару из (5) для субгармонических функций обусловлена полностью характеризующим их, при условии полунепрерывности сверху и локальной интегрируемости по мере Лебега λ, неравенством о среднем по шару [1], [2]. В частности,

$$v(x) \leqslant \mathsf{B}_v(x,r) \quad \text{при } v \in \mathsf{sbh}\bigl(\overline{B}(x,r)\bigr). \tag{7}$$

Лемма 2. *Пусть $0 < R \in \mathbb{R}^+$ и v — субгармоническая функция на замкнутом шаре $\overline{B}(R) \subset \mathbb{R}^m$, $0 < r < R$, а $E \subset \overline{B}(r)$ — λ-измеримое множество. Тогда*

$$\int_E v \, \mathrm{d}\lambda \leqslant \Bigl(1 + \frac{r}{R-r}\Bigr)^m \lambda(E) \mathsf{B}_{v^+}(R). \tag{8}$$

Доказательство. Из неравенства (7) о среднем по шару получаем

$$v(x) \leqslant \mathsf{B}_v(x, R-r) \leqslant \mathsf{B}_{v^+}(x, R-r) \quad \text{для каждой точки } x \in \overline{B}(r).$$

Интегрирование крайних частей этого неравенства по мере Лебега λ на множестве E даёт неравенство

$$\int_E v \, \mathrm{d}\lambda \leqslant \int_E \mathsf{B}_{v^+}(x, R-r) \, \mathrm{d}\lambda(x).$$

Отсюда, по неравенству (6) леммы 1, применённому к подынтегральному выражению с положительной функцией v^+ в последнем интеграле, получаем

$$\int_E v \,\mathrm{d}\lambda \leqslant \int_E \Bigl(1+\frac{r}{R-r}\Bigr)^m \mathsf{B}_{v^+}(R)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \Bigl(1+\frac{r}{R-r}\Bigr)^m \mathsf{B}_{v^+}(R)\lambda(E),$$

что и даёт (8). □

Лемма 3. *Пусть* $0 < R \in \mathbb{R}^+$, *а* v *— субгармоническая функция на замкнутом шаре* $\overline{B}(R) \subset \mathbb{R}^m$. *Тогда для любого числа* $r \in (0, R)$ *и для любого* λ*-измеримого подмножества* $E \subset \overline{B}(r)$ *имеет место неравенство*

$$\mathsf{B}_v(r) \leqslant \frac{1}{b_m r^m}\int_{\overline{B}(r)\setminus E} v\,\mathrm{d}\lambda + \frac{1}{b_m}\Bigl(1+\frac{r}{R-r}\Bigr)^m \frac{\lambda(E)}{r^m}\mathsf{B}_{v^+}(R). \tag{9}$$

Доказательство. По определению (5)

$$\mathsf{B}_v(r) = \frac{1}{b_m r^m}\int_{\overline{B}(r)\setminus E} v\,\mathrm{d}\lambda + \frac{1}{b_m r^m}\int_E v\,\mathrm{d}\lambda,$$

откуда по неравенству (8) леммы 2, применённому к последнему интегралу, получаем в точности требуемое (9). □

Доказательство теоремы 1. Положим

$$M := \sup_{\mathbb{R}^m\setminus E} v \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

По условию ограниченности сверху на $\mathbb{R}^m \setminus E$ функции v можно рассмотреть субгармоническую функцию $v - M$, отрицательную на $\mathbb{R}^m \setminus E$. Применим теперь лемму 3 при произвольных $0 < r \in \mathbb{R}^+$ с $R = 2r$ и с множеством-пересечением $E \cap \overline{B}(r) \subset \overline{B}(r)$ в роли множества E к субгармонической функции $(v - M)^+ \geqslant 0$, где первый интеграл в правой части (9) будет равен нулю, а в итоге получим

$$\begin{aligned}\mathsf{B}_{(v-M)^+}(r) &\leqslant \frac{1}{b_m}\Bigl(1+\frac{r}{2r-r}\Bigr)^m \frac{\lambda\bigl(E\cap\overline{B}(r)\bigr)}{r^m}\mathsf{B}_{(v-M)^+}(2r)\\ &= \frac{2^m}{b_m}\frac{\lambda\bigl(E\cap\overline{B}(r)\bigr)}{r^m}\mathsf{B}_{(v-M)^+}(2r) \quad \text{при всех } 0 < r \in \mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

Отсюда по условию $\mathsf{L}_m(E) = 0$ для функции

$$r \underset{0<r\in\mathbb{R}^+}{\longmapsto} \mathsf{B}_{(v-M)^+}(r) \in \mathbb{R}^+ \tag{11}$$

имеем

$$\mathsf{B}_{(v-M)^+}(r) = o\bigl(\mathsf{B}_{(v-M)^+}(2r)\bigr) \quad \text{при } r \to +\infty. \tag{12}$$

Функция (11) конечного порядка $\mathsf{ord}[\mathsf{B}_{(v-M)^+}] \in \mathbb{R}^+$, поскольку $\mathsf{ord}[(v - M)^+] \in \mathbb{R}^+$ ввиду конечности порядка $\mathsf{ord}[v]$. Следовательно, (12) возможно только в случае $\mathsf{B}_{(v-M)^+} \equiv 0$, и, как следствие, $(v - M)^+ \equiv 0$. Это вместе с (10) даёт требуемое (4). □

Замечание. Условие нулевой лебеговой плотности $\mathsf{L}_m(E) = 0$ в теоремах 1 и 3, как и то же самое с $m := 2n$ в теореме 2, можно заменить на формально более слабое условие: *существует неограниченная последовательность положительных чисел* $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$, *для которой*

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{r_{k+1}}{r_k} < +\infty \quad \textit{и при этом} \quad \lim_{k\to\infty}\frac{\lambda\bigl(E\cap B(r_k)\bigr)}{r_k^m} = 0,$$

поскольку последнее влечёт за собой $\mathsf{L}_m(E) = 0$.

Автор глубоко признателен А. Д. Баранову. Благодаря его весьма информативному пленарному докладу и стимулирующим on-line контактам с ним на Международной научной конференции «Комплексный анализ и его приложения» в Казани (24–28 августа 2020 г.) и появились эта небольшая заметка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Th. Ransford *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
2. У. Хейман, П. Кеннеди *Субгармонические функции.* М.: Мир. 1980.
3. A. Baranov, Yu. Belov, A. Borichev *Summability properties of Gabor expansions* // J. Funct. Anal. **274**:9, 2532–2552 (2018).
4. A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev *Summability properties of Gabor expansions,* Version 2, Dec. 5, 2018, https://arxiv.org/abs/1706.05685v2
5. A. Aleman, A. Baranov, Y. Belov, H. Hedenmalm *Backward shift and nearly invariant subspaces of Fock-type spaces,* July 12, 2020, https://arxiv.org/abs/2007.06107
6. Б.Н. Хабибуллин, А.В. Шмелёва *Выметание мер и субгармонических функций на систему лучей. I. Классический случай* // Алгебра и анализ. **31**:1, 156–210 (2019).

Булат Нурмиевич Хабибуллин
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Российская Федерация
E-mail: khabib-bulat@mail.ru