

ОБ УСЛОВИЯХ ЛОКАЛИЗАЦИИ СПЕКТРА МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ОРРА–ЗОММЕРФЕЛЬДА

Х.К. ИШКИН, Р.И. МАРВАНОВ

Аннотация. Для модельного оператора $L(\varepsilon)$, связанного с уравнением Орра–Зоммерфельда, изучается вопрос о необходимости известных условий А.А. Шкаликова, достаточных для локализации спектра около графа формы «Y». Рассмотрены 2 типа потенциалов, при которых Γ_∞ – неограниченная часть предельного спектрального графа (ПСГ) – построена в явном виде. Первый из них – кусочно-постоянный потенциал с счетным числом скачков. Показано, что если точки разрыва потенциала достаточно быстро сходятся к одному из концов интервала $(0, 1)$, то Γ_∞ состоит из счетного числа лучей. Второй тип представляет потенциал, склеенный из двух голоморфных функций. Показано, что Γ_∞ состоит из двух кривых, если некоторая производная потенциала в точке склейки терпит скачок и выполняются условия Лангера на области, ограниченные линиями Стокса, при которых удается строить ВКБ-разложения. При бесконечно дифференцируемой склейке одних ВКБ-оценок для выявления спектральных портретов недостаточно. В связи с этим рассмотрена обратная задача: по некоторым спектральным данным выявить аналитические свойства потенциала вблизи интервала $(0, 1)$. Чтобы понять характер спектральных данных, предварительно решена прямая задача с выходом в комплексную ε -плоскость. Оказалось, если предположить голоморфность потенциала в окрестности отрезка $[0, 1]$, то при малых ε из сектора \mathcal{E} раствора $\pi/2$ для части спектра $L(\varepsilon)$ вне некоторого круга выполняются условия квантования типа Бора–Зоммерфельда. В заключительной части решена обратная задача. В качестве спектральных данных выбраны полученные в прямой задаче условия квантования в чуть ослабленной форме. Доказано, что если потенциал – монотонная непрерывно дифференцируемая функция и выполнены указанные условия, то потенциал допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность интервала $(0, 1)$. Тем самым доказана необходимость (хотя бы в локальном смысле) условий Шкаликова.

Ключевые слова: уравнение Орра–Зоммерфельда, локализация спектра, предельный спектральный граф

Keywords: Orr-Sommerfeld equation, spectrum localization, limit spectral graph

Mathematics Subject Classification: 47E05, 76E25

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим семейство операторов $L(\varepsilon)$, порожденных в $L^2(0, 1)$ дифференциальным выражением $l_\varepsilon y = i\varepsilon^2 y'' + qy$ и краевыми условиями $y(0) = y(1) = 0$, где q – ограниченная,

Х.К. ИШКИН, Р.И. МАРВАНОВ, ON LOCALIZATION CONDITIONS FOR SPECTRUM OF MODEL OPERATOR FOR ORR–SOMMERFELD EQUATION.

© Ишкин Х.К., Марванов Р.И. 2020.

РАБОТА ПЕРВОГО АВТОРА ВЫПОЛНЕНА В РАМКАХ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ РАЗВИТИЯ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА, ДОП. СОГЛ. № 075-02-2020-1421/1 К СОГЛ. № 075-02-2020-1421; ВТОРОГО АВТОРА – ПРИ ФИНАНСОВОЙ ПОДДЕРЖКЕ РФФИ В РАМКАХ НАУЧНОГО ПРОЕКТА № 20-31-90999.

Поступила 20 октября 2020 г.

измеримая, вещественнозначная функция, ε – положительный параметр. При каждом ε спектр оператора $L(\varepsilon)$ дискретен и лежит в замыкании области

$$\Pi = \{z \in \mathbb{C} : m < \operatorname{Re} z < M, \operatorname{Im} z < 0\},$$

где $m = \inf_{(0,1)} q, M = \sup_{(0,1)} q$.

Оператор $L(\varepsilon)$ принято рассматривать в качестве упрощенной модели для хорошо известного в гидродинамике оператора Орра – Зоммерфельда (подробности см. в [1] и [2]). В работе [3] было доказано, что при $q(x) = x$ или x^2 спектры операторов Орра–Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса $R > 0$ и $L(\varepsilon)$ при малых $\varepsilon > 0$ накапливаются около множества, называемого предельным спектральным графом (ПСГ) и состоящего из трех кривых, соединяющих некоторую точку $\lambda_0 \in \Pi$ с точками m, M и $-i\infty$ («спектральный галстук»). В дальнейшем в работе [2] этот результат был распространен на класс функций q , удовлетворяющих условиям

(i) функция q вещественна при $x \in [0, 1]$, и существует область $G \subset \mathbb{C}$, такая, что q голоморфна в G и биективно отображает \overline{G} на полуполосу $\overline{\Pi}$;

(ii) при любом $a \in (0, 1)$ прообраз луча $r_a = \{\lambda : \lambda = a - it, 0 < t < \infty\}$ есть функция относительно мнимой оси, то есть любая прямая $\operatorname{Im} \lambda = \operatorname{const}$ либо пересекает прообраз луча r_a в одной точке, либо не пересекает.

Следуя А. А. Шкаликову, этот класс будем обозначать AM . Далее, через $\Gamma(c)$ обозначим часть ПСГ, лежащую в полуполосе $\Pi_c = \{\lambda \in \mathbb{C} : m < \operatorname{Re} \lambda < M, \operatorname{Im} \lambda < -c\}$.

Из условия (i) следует, что если $q \in AM$, то q строго монотонна на $[0, 1]$. Если q немонотонна, то, как показано в [2] и [4], ПСГ операторов $L(\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) может иметь более сложный вид. Однако и в том и в другом случае при достаточно больших $c > 0$

$$\Gamma(c) = \gamma(c) := \{\lambda \in \Pi_c : \operatorname{Im}(Q(\lambda)) = 0\}, \tag{1.1}$$

где

$$Q(\lambda) = \int_0^1 \sqrt{i(\lambda - q(x))} dx, \tag{1.2}$$

ветвь фиксирована так, что $\arg Q(M) = \pi/4$.

В связи со сказанным возникает вопрос:

Каково поведение спектра оператора $L(\varepsilon)$ при малых ε в случае, когда функция q не голоморфна на $(0, 1)$? Достаточно ли конечная или бесконечная гладкость функции q , чтобы собственные числа $L(\varepsilon)$, лежащие в Π_c , скапливались к одной кривой $\gamma(c)$?

В предлагаемой работе рассмотрены 2 типа кусочно-голоморфных потенциалов, при которых $\Gamma(c)$ удастся построить в явном виде. В первой части работы (§ 2) мы изучаем случай кусочно-постоянного потенциала с счетным числом скачков. Показано, что если точки разрыва потенциала достаточно быстро сходятся к одному из концов интервала $(0, 1)$, то $\Gamma(c)$ состоит из счетного числа лучей так, что каждому «куску» соответствует ровно один луч. Поскольку «кусков» столько же, сколько точек разрыва, возникает вопрос: не порождается ли каждый луч локализации соответствующим разрывом функции q , нельзя ли склеить два «куска» достаточно гладко, чтобы им соответствовал только один луч локализации? Обсуждению этого вопроса посвящен §3. Рассмотрен потенциал q , склеенный в некоторой промежуточной точке $a \in (0; 1)$ из двух функций q_1 и q_2 , голоморфных в некоторых окрестностях промежутков $[0; a)$ и $(a; 1]$ соответственно и удовлетворяющих стандартным условиям в терминах линий Стокса, при которых возможны ВКБ-оценки. В случае бесконечной дифференцируемости q в точке склейки одних ВКБ-оценок для выявления спектральных портретов уже недостаточно. В связи с этим мы решаем обратную задачу: по некоторым спектральным данным мы выводим голоморфность q вблизи интервала $(0, 1)$. Чтобы понять характер спектральных данных, предварительно решаем прямую задачу с выходом в комплексную ε -плоскость (§ 4). В заключительной части (§ 5)

получен основной результат статьи – теорема 5.1, в которой решена обратная задача: если q монотонна и непрерывно дифференцируема и для части спектра $L(\varepsilon)$ вне некоторого круга при малых ε из сектора $\{re^{i\varphi} : r > 0, |\varphi| \leq \pi/4\}$ выполняются условия квантования типа Бора–Зоммерфельда, то q допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность интервала $(0, 1)$.

2. КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Рассмотрим следующую функцию

$$q(x) = q_n, \quad x \in [x_{n-1}, x_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

где $x_n = 1 - 1/(n+1)$, числа q_n удовлетворяют следующим условиям:

- а) $m := q_1 < q_2 < \dots$;
- б) Существует конечный предел $M = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$, причем

$$q_n = M + O(n^{-\gamma}), \quad n \rightarrow \infty, \quad \gamma > 1. \quad (2.2)$$

Положим

$$\gamma_n(c) = \{\lambda = \mu - i\nu, \mu = q_n, \nu \geq c\}$$

Первый из основных результатов работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема 2.1. Пусть функция q имеет вид (2.1) и выполнено (2.2). Тогда

$$\Gamma(c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n(c). \quad (2.3)$$

Доказательство проведем поэтапно. Сначала мы покажем, что если λ_0 – некоторая точка из \mathbb{P}_c , не принадлежащая ни одному лучу $\gamma_n(c)$, то любой круг $U_\delta(\lambda_0) = \{|\lambda - \lambda_0| < \delta\}$, не пересекающийся с $\gamma_n(c)$ ($n = 1, 2, \dots$), не будет содержать точек спектра оператора $L(\varepsilon)$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon(\delta)$, где $\varepsilon(\delta)$ – некоторая постоянная, зависящая только от δ .

Пусть $y_1(x, \lambda, \varepsilon)$ и $y_2(x, \lambda, \varepsilon)$ – решения уравнения

$$i\varepsilon^2 y'' + qy = \lambda y, \quad (2.4)$$

удовлетворяющие условиям

$$y_1(0, \lambda, \varepsilon) = y_2(1, \lambda, \varepsilon) = 0 \quad \text{и} \quad y_1'(0, \lambda, \varepsilon) = y_2'(1, \lambda, \varepsilon) = 1.$$

Тогда собственные числа оператора $L(\varepsilon)$ совпадают с корнями уравнения

$$W(y_1, y_2)|_{x=b} = 0, \quad (2.5)$$

где W – вронскиан, b – некоторая промежуточная точка из интервала $(0; 1)$. Наша задача – выбрать $b = b(\varepsilon)$ так, чтобы функции y_1 и y_2 допускали при малых $\varepsilon > 0$ асимптотическое разложение, равномерное по $\lambda \in U_\delta(\lambda_0)$.

Решение y_2 возьмем в следующем виде:

$$y_2(x, \lambda, \varepsilon) = \varepsilon \sin \varepsilon^{-1} p_\infty(x-1) + \frac{i}{\varepsilon p_\infty} \int_x^1 \sin \varepsilon^{-1} p_\infty(x-t) [M - q(t)] y_2 dt,$$

где $p_\infty = p_\infty(\lambda) = \sqrt{i(\lambda - M)}$. Здесь и всюду далее ветвь корня выбирается так, что $\sqrt[n]{z} > 0$ при $z > 0$.

Положим

$$b_\varepsilon = 1 - \varepsilon^\sigma, \quad \text{где} \quad 1/(\gamma + 1) < \sigma < 1, \\ \mathbb{P}_{ca} := \{\lambda = \mu - i\nu : m < \mu \leq M - a, \nu > c\}, \quad 0 < a < M - m.$$

Лемма 2.1. При малых $\varepsilon > 0$ справедливы равномерные по $\lambda \in \Pi_{ca}$ асимптотические оценки

$$y_2^{(k)}(b_\varepsilon, \lambda, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{2i} \left(\frac{-ip_\infty}{\varepsilon} \right)^k \exp(i\varepsilon^{\sigma-1} p_\infty) (1 + O(\varepsilon^{(\gamma+1)\sigma-1})), \quad k = 0, 1. \quad (2.6)$$

Доказательство. Легко проверить, что $-\pi/2 < \arg p_\infty(\lambda) \leq -\delta(a) < 0$ при всех $\lambda \in \Pi_{ca}$. Положим

$$f = -\frac{2i}{\varepsilon} e^{i\varepsilon^{-1} p_\infty(x-1)} y_2(x, \lambda, \varepsilon).$$

Тогда f удовлетворяет уравнению

$$f = 1 - e^{-2i\varepsilon^{-1} p_\infty(1-x)} + A(\lambda, \varepsilon)f,$$

где

$$A(\lambda, \varepsilon)f = -\frac{1}{2\varepsilon p_\infty} \int_x^1 \left[1 - e^{2i\varepsilon^{-1} p_\infty(t-x)} \right] [M - q(t)] f dt.$$

Из условия (2.2) следует, что норма оператора $A(\lambda, \varepsilon)$ в пространстве $C[b_\varepsilon; 1]$ допускает оценку $\|A(\lambda, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{\sigma(\gamma+1)-1})$, $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $\lambda \in \Pi_{ca}$. Отсюда легко следуют соотношения (2.6). \square

Замечание 2.1. Из доказательства леммы видно, что формула (2.6) сохраняет силу, если b_ε заменить на любую точку x , большую b_ε . При этом показатель экспоненты в (2.6) будет $i\varepsilon q_\infty(1-x)$.

Лемма 2.2. Пусть $q_n < \operatorname{Re} \lambda_0 < q_{n+1}$ и $m(\varepsilon) = [\varepsilon^{-\sigma}]$, $0 < \sigma < 1/2$. Тогда при малых $\varepsilon > 0$ справедливы равномерные по $\lambda \in U_\delta(\lambda_0)$ асимптотические оценки

$$y_1^{(k)}(x_{m(\varepsilon)}, \lambda, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{2ip_1} \left(\frac{ip_{m(\varepsilon)}}{\varepsilon} \right)^k \left(\prod_{k=2}^{m(\varepsilon)} \frac{p_k + p_{k-1}}{2p_k} \right) F_n(\lambda, \varepsilon), \quad k = 0, 1, \quad (2.7)$$

где $p_k = \sqrt{i(\lambda - q_k)}$,

$$F_n(\lambda, \varepsilon) = \exp \left[-i\varepsilon^{-1} \left(\int_0^{x_n} \sqrt{i(\lambda - q)} dt + \int_{x_n}^{x_{m(\varepsilon)}} \sqrt{i(\lambda - q)} dt \right) \right] \cdot \left[\frac{p_n - p_{n-1}}{p_n + p_{n-1}} - \frac{p_{n+1} - p_n}{p_{n+1} + p_n} e^{-2i\varepsilon^{-1} p_n \Delta_n} + O(\exp(-c_0 \varepsilon^{-1+2\sigma})) \right],$$

где $\Delta_k = x_k - x_{k-1} = \frac{1}{(k+1)k}$, c_0 – положительная постоянная, не зависящая от ε и λ .

Доказательство. Полагая $Y = (y, y')^T$, будем иметь $Y = Y_k \cdot C_k$, $x \in [x_{k-1}; x_k]$, $k = 1, 2, \dots$, где

$$Y_k = T_k W D_k, \quad T_k = \operatorname{diag}(1, i\varepsilon^{-1} p_k), \quad D_k = \operatorname{diag}(e^{i\varepsilon^{-1} p_k x}, e^{-i\varepsilon^{-1} p_k x}), \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из условия непрерывности Y в точке x_{k-1} имеем

$$Y_k(x_{k-1}) C_k = Y_{k-1}(x_{k-1}) C_{k-1},$$

откуда

$$C_k = \Omega_k C_{k-1}, \quad \text{где} \quad \Omega_k = Y_k^{-1}(x_{k-1}) Y_{k-1}(x_{k-1}).$$

Следовательно, $C_k = \Omega_k \cdots \Omega_2 C_1$. Далее, поскольку $Y(0) = (0, 1)^T$, то $C_1 = \varepsilon / (2ip_1) (1, -1)^T$. Подставляя вместо Y_k его выражение, получим

$$\Omega_k = D_k^{-1}(x_{k-1}) \Phi_k D_{k-1}(x_{k-1}), \quad \text{где} \quad \Phi_k = I + \beta_k \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta_k = \frac{p_k - p_{k-1}}{2p_k}.$$

Таким образом,

$$Y(x_{m(\varepsilon)}) = T_{m(\varepsilon)} W \left(\prod_{k=m(\varepsilon)}^2 D_k(\Delta_k) \Phi_k \right) D_1(x_1) C_1. \quad (2.8)$$

Пусть $\lambda \in U_\delta(\lambda_0)$ и $0 < \varepsilon \ll 1$. Тогда

$$D_k(\Delta_k) = \begin{cases} e^{-i\varepsilon^{-1}p_k\Delta_k} \left[\text{diag}(0, 1) + O\left(e^{-2\delta_k\varepsilon^{-1}}\right) \right], & k = \overline{1, n-1}, \\ e^{i\varepsilon^{-1}p_k\Delta_k} \left[\text{diag}(1, 0) + O\left(e^{-\delta_k\varepsilon^{-1}}\right) \right], & k = \overline{n+1, m(\varepsilon)}, \end{cases} \quad (2.9)$$

где

$$\delta_k = \min \left\{ \left| \text{Im} \sqrt{i(q_n - q_{n-1} + \nu)} \right|, \left| \text{Im} \sqrt{i(q_{n+1} - q_{n+2} + \nu)} \right| \right\} \Delta_k. \quad (2.10)$$

Из соотношения (2.10) видно, что при всех $\lambda \in U_\delta(\lambda_0)$ $\delta_k \geq Cm(\varepsilon)^{-2}$, где $C = C(n, \delta, \lambda_0) > 0$. Подставляя соотношения (2.9) в (2.8) и учитывая последнюю оценку для δ_k , получим (2.7). Лемма доказана. \square

Выберем теперь в (2.5)

$$b(\varepsilon) = x_{m(\varepsilon)} = 1 - 1/([\varepsilon^{-\sigma}] + 1), \quad \text{где } 1/(\gamma + 1) < \sigma < 1/2.$$

Заменив в (2.5) y_1 и y_2 их асимптотиками (2.7) и (2.6) (с учетом замечания 2.1), получим

$$y_1(1, \lambda, \varepsilon) := \Phi(\lambda, \varepsilon) = e^{-2i\varepsilon^{-1}p_n\Delta_n} - \alpha_n + O(\exp(-c_n\varepsilon^{-1+2\sigma})), \quad (2.11)$$

где

$$\alpha_n = \frac{(p_{n+1} + p_n)(p_n - p_{n-1})}{(p_n + p_{n-1})(p_{n+1} - p_n)}.$$

Введем функцию $\Phi_0(\lambda, \varepsilon) = e^{2i\varepsilon^{-1}p_n\Delta_n} - \alpha_n$ и обозначим через $\{\mu_k^n(\varepsilon)\}_{k=1}^\infty$ ее нули в полуполосе $\Pi_n(c) = \{\lambda = x - iy, q_n < x < q_{n+1}, y > c\}$, пронумерованные в порядке неубывания модулей. Применяя теорему Руше к функции Φ_0 , получим, что, начиная с некоторого номера K_n , каждое собственное значение оператора $L(\varepsilon)$ из $\Pi_n(c)$ лежит в круге с центром в точке $\mu_k^n(\varepsilon)$ и радиусом $r_k^n = M_n e^{-\sigma_n k^\delta}$, где M_n, σ_n, δ – положительные числа. Это означает, что $\lambda_k^n = \mu_{k+m_n}^n + O(e^{-\sigma_n k^\delta})$, $k \geq K_n$, m_n – целое число, зависящее только от n . Отсюда следует утверждение Теоремы 2.1.

3. ПОТЕНЦИАЛЫ КОНЕЧНОЙ ГЛАДКОСТИ

В этом пункте мы будем рассматривать потенциалы вида

$$q(x) = \begin{cases} q_1(x), & x \in [0; a), \\ q_2(x), & x \in (a; 1], \end{cases} \quad (3.1)$$

где функции q_1 и q_2 удовлетворяют следующим условиям:

- 1) функция q вещественна, не убывает на $[0, 1]$;
- 2) функции q_1 и q_2 голоморфны в некоторых окрестностях Ω_1 и Ω_2 промежутков $[0; a)$ и $(a; 1]$ соответственно;
- 3) при некотором $n \geq 2$ существуют конечные пределы $l_{jk} := \lim_{x \rightarrow a} q_j^{(k)}(x)$ ($k = \overline{0, n}$) так, что $l_{1k} = l_{2k}$ ($k = \overline{0, n-1}$) и $l_{1n} \neq l_{2n}$.

Чтобы сформулировать дополнительное условие, введем обозначения.

Пусть

$$c > 0, \quad \lambda \in \Pi_c = \{z \in \Pi : \text{Im } z < -c\}, \quad \xi_j(z) = \int_a^z \sqrt{i(\lambda - q_j(t))} dt, \quad z \in \Omega_j \quad (j = 1, 2),$$

$\beta_1(\lambda)$ и $\beta_2(\lambda)$ – кривые, в которые функции ξ_1 и ξ_2 отображают отрезки $[a, 0]$ и $[a, 1]$ соответственно. Далее обозначим через $D_j (j = 1, 2)$ область, ограниченную кривой $\beta_j(\lambda)$ и отрезком, соединяющим ее концы¹. Тогда дополнительное условие на q заключается в следующем:

4) при достаточно большом $c > 0$ для любого $\lambda \in \Pi_c$ существуют окрестности $\omega_1(\lambda)$ и $\omega_2(\lambda)$ интервалов $(a, 0)$ и $(a, 1)$, такие, что отображения $\xi_j : \overline{\omega_j} \rightarrow \overline{D_j} (j = 1, 2)$ являются биекциями.

Введем функции

$$Q_1(\lambda) = \int_0^a \sqrt{i(\lambda - q(t))} dt, \quad Q_2(\lambda) = \int_a^1 \sqrt{i(\lambda - q(t))} dt, \quad \lambda \in \overline{\Pi},$$

и кривые

$$\gamma_i(c) = \{\lambda \in \Pi_c : \text{Im}(Q_i(\lambda)) = 0\}, \quad i = 1, 2.$$

Легко проверить (как при доказательстве Леммы 2.2 из [2]), что при любых $c \geq 0$ кривые $\gamma_1(c)$ и $\gamma_2(c)$ являются графиками функций относительно мнимой оси.

Теорема 3.1. При выполнении условий 1) – 4) и достаточно больших $c > 0$ $\Gamma(c) = \gamma_1(c) \cup \gamma_2(c)$.

Доказательство. При сделанных предположениях удобнее от задачи

$$i\varepsilon^2 y'' + qy = \lambda y, \quad x \in [0, 1], \quad (3.2)$$

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (3.3)$$

перейти к задаче Штурма–Лиувилля на кривой $\beta(\lambda)$ с перераспределением ролей параметров λ и ε . Зафиксируем $\lambda \in \Pi_c (c > 0)$ и положим

$$\xi = \xi(\lambda, x) = \int_0^x \sqrt{i(\lambda - q)} dt / Q(\lambda), \quad x \in [0, 1], \quad (3.4)$$

$$V = V(\lambda, \xi) = \frac{iQ^2}{4(\lambda - q)} \left[\frac{q''}{\lambda - q} + \frac{5}{4} \left(\frac{q'}{\lambda - q} \right)^2 \right] \Bigg|_{x=x(\lambda, \xi)}, \quad (3.5)$$

$$s = s(\lambda, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} Q(\lambda), \quad (3.6)$$

где функция Q определена по (1.2), $\beta(\lambda)$ – образ отрезка $[0, 1]$ при отображении (3.4), $x(\lambda, \xi)$ – функция, обратная к функции $\xi(\lambda, x)$. Из (3.4) следует, что при всех λ из Π_c кривая $\beta(\lambda)$ является графиком функции, выпуклой вверх на отрезке $[0, 1]$ и равной 0 на его концах. Обозначим через $E(\lambda)$ область, ограниченную кривой $\beta(\lambda)$ и ломаной $P(\lambda) = [0, A_\lambda] \cup [A_\lambda, 1]$, где $A_\lambda = Q_1(\lambda)/Q(\lambda)$.

Подстановка

$$y = (\lambda - q)^{-1/4} v(\xi) \quad (3.7)$$

преобразует задачу (3.2)–(3.3) в следующую

$$-v'' + V(\lambda, \xi)v = s^2 v, \quad \xi \in \beta(\lambda), \quad (3.8)$$

$$v(0) = v(1) = 0, \quad (3.9)$$

где штрих означает производную функции v по ξ вдоль кривой $\beta(\lambda)$.

¹Легко проверить, что при каждом $\lambda \in \Pi_c (c > 0)$ области D_1 и D_2 выпуклы.

Пусть $c > 0$. Обозначим через D_c образ Π_c при отображении $\lambda \mapsto Q(\lambda)$. Как показано в [2, лемма 2.3], при любом $c \geq 0$ отображение $Q : \Pi_c \rightarrow D_c$ конформно и взаимно однозначно.

Согласно соотношениям (3.2)–(3.9) $\lambda \in \Pi_c$ ($c > 0$) является собственным значением задачи (3.2)–(3.3) тогда и только тогда, когда s^2 — собственное число задачи (3.8)–(3.9), удовлетворяющее условию $s\varepsilon \in D_c$.

Введем функцию

$$\Phi(\lambda, s) = \varphi(1, \lambda, s), \quad (3.10)$$

где $\varphi(\xi, \lambda, s)$ — решение уравнения (3.8), удовлетворяющее условиям

$$\varphi(0, \lambda, s) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda, s) = 1.$$

Тогда спектр задачи (3.8)–(3.9) совпадает с квадратами нулей функции $\Phi(\lambda, \cdot)$.

Чтобы понять, как устроен спектр задачи (3.8)–(3.9), заметим следующее: в силу условий 2) и 4) и равенства (3.4) образ области $\Omega_1 \cup \Omega_2$ при отображении функцией $\xi(\lambda, \cdot)$ ($\lambda \in \Pi_c$, $c \gg 1$) целиком содержит замыкание области $E(\lambda)$ и функция $\xi(\lambda, \cdot)$ обратима в области $\overline{E(\lambda)}$, обратная ей функция $z(\lambda, \cdot)$ голоморфна в $E(\lambda)$ и непрерывна на ее замыкании. Из (3.5) видно, что такими же свойствами обладает и функция V , так что по теореме о монодромии спектр задачи (3.8)–(3.9) не меняется при деформировании кривой $\beta(\lambda)$ в ломаную $P(\lambda)$. Далее, используя условие 3) и формулу (3.5), нетрудно убедиться, что функция $V \in C^{(n-1)}(P_\lambda)$ и $V^{(n)}$ терпит скачок в точке A_λ . Тогда функция V удовлетворяет всем условиям теоремы 3 из [5], согласно которой спектр задачи (3.8)–(3.9) разбивается на 2 серии, имеющие асимптотики

$$s_k^{(j)} \sim \left(\frac{\pi k Q(\lambda)}{Q_j(\lambda)} + O(\ln k) \right)^2, \quad j = 1, 2, \quad k \rightarrow +\infty. \quad (3.11)$$

Отсюда, используя формулу (3.6), убеждаемся, что спектр оператора $L(\varepsilon)$ разбивается на 2 серии $\{\lambda_k^{(j)}\}$ ($j = 1, 2$), для которых справедливы оценки

$$Q_j \left(\lambda_k^{(j)} \right) = \pi k \varepsilon (1 + o(1)), \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

откуда в соответствии с определением кривых $\gamma_j(c)$ следует утверждение теоремы. \square

4. БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Согласно лемме 2.1 из работы [6], если функция (3.1) удовлетворяет условиям 1) – 4), то при каждом $\lambda \in \Pi_c$ ($c > 0$) функцию (3.10) можно представить в виде

$$\Phi(\lambda, s) = \frac{\sin s}{s} + \frac{1}{s} \int_{P(\lambda)} e^{2ist} H(\lambda, t) dt, \quad (4.1)$$

где $P(\lambda)$ — параллелограмм с вершинами в точках $\pm i$, $\pm(2A - 1)i$, функция $H(\lambda, \cdot)$ на $P(\lambda) \setminus \{\pm i\}$ имеет гладкость такого же порядка, что и первообразная q

$$Q(\lambda, z) = \int_{P(\lambda, i, z)} q(t) dt,$$

где $P(\lambda, i, z)$ — кратчайшая часть $P(\lambda)$, соединяющая точки i и z . Отсюда в силу условия 3) следует, что $(n+1)$ -я производная H в точках $\pm(2A - 1)i$ терпит скачок, благодаря чему удается «выбить» асимптотику $\Phi(\lambda, s)$, когда s уходит в бесконечность по любому лучу. В случае, когда функция q бесконечно дифференцируема в точке a , то из формулы (4.1) ничего определенного о поведении $\Phi(\lambda, s)$ при больших s извлечь не удастся. Если только не допустить голоморфность q так, чтобы условие 4) выполнялось для всего интервала $(0, 1)$. Действительно, в этом случае спектр задачи (3.8)–(3.9) не меняется, если кривую $\beta(\lambda)$ продеформировать в отрезок $[0, 1]$. Соответственно параллелограмм $P(\lambda)$ в формуле (4.1)

превращается в отрезок и при разумных требованиях на V (достаточна суммируемость) поведение $\Phi(\lambda, s)$ при больших s будет определяться первым членом в правой части (4.1). Это означает, что спектр задачи (3.8)–(3.9) имеет асимптотику $s_n \sim \pi n$ ($n \rightarrow \infty$), то есть на бесконечности локализуется около одного луча, потому естественно ожидать, что $\Gamma(c)$ при достаточно больших $c > 0$ будет состоять из одной кривой.

Вместе с тем существует кусочно-голоморфная бесконечно дифференцируемая на некоторой гладкой кривой β функция V [7, пример 1], что спектр соответствующей задачи (3.8)–(3.9) на бесконечности локализуется около двух лучей. Это наводит на мысль, что бесконечной дифференцируемости не достаточно для того, чтобы $\Gamma(c)$ состояла из одной кривой.

В связи с этим возникают 2 вопроса:

- 1) выяснить, каковы «разумные требования» на V , что то же самое, на q ?
- 2) насколько требование голоморфности функции q необходимо для реализации $\Gamma(c)$ в виде одной кривой?

Второй вопрос фактически является обратной задачей: по некоторым спектральным данным оператора $L(\varepsilon)$ (при малых ε) выявить голоморфность q вблизи $(0, 1)$. Чтобы понять, что брать в качестве спектральных данных, естественно начать с прямой задачи, причем в качестве «разумных требований» можно взять как раз голоморфность q вблизи $(0, 1)$. Таким образом, возникает

Задача 4.1. Пусть выполнено условие

(i') функция q вещественна, возрастает на $[0, 1]$ и голоморфна в некоторой окрестности G отрезка $[0, 1]$.

Описать поведение спектра оператора $L(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ по сектору $|\arg \varepsilon| \leq \pi/4$.

Отметим, что выход на комплексную ε -плоскость оправдан не только стремлением извлечь из условия (i') максимум информации о ПСГ, но и тем, что

$$L(\varepsilon) = -i\varepsilon^2 H(i/\varepsilon^2),$$

где

$$H(\beta) = H_0 + \beta Q, \quad H_0 = -d^2/dx^2, \quad D(H_0) = \{y \in W_2^2[0, 1] : y(0) = y(1) = 0\},$$

Q — оператор умножения на функцию q . Из ограниченности функции q следует, что H_0 -грань оператора Q равна 0, поэтому $H_0 + \beta Q$ является голоморфным семейством типа (A) [9, гл. VII, § 2].

Отметим также, что ограничение $|\arg \varepsilon| \leq \pi/4$ несущественно, поскольку при $\pi/4 < |\arg \varepsilon| \leq \pi/2$ вместо $L(\varepsilon)$ можно рассматривать оператор $-L(\varepsilon)$, который устроен также.

Поскольку функция q непрерывна, то

$$(L(\varepsilon)y, y) = -i\varepsilon^2 \|y'\|^2 + (qy, y),$$

откуда в силу вещественности q следует, что спектр оператора $L(\varepsilon)$ целиком лежит в нижней полуплоскости $P_- = \{\operatorname{Im} z < 0\}$.

Для решения задачи 4.1 предварительно докажем 2 леммы о 2 биекциях. В первой из них речь пойдет о P_- и функции (1.2).

Лемма 4.1. Пусть функция q непрерывно дифференцируема и возрастает на $[0, 1]$. Тогда функция Q голоморфна в P_- , непрерывна на $\overline{P_-}$ и взаимно-однозначно отображает P_- на область D , граница которой состоит из лучей $\sigma_1 = \{z = e^{i\pi/4}s, s \geq |Q(M)|\}$ и $\sigma_2 = \{z = e^{-i\pi/4}s, s \geq |Q(m)|\}$, соединенных кривой σ_3 , такой, что D выпукла и отделена от 0.

Доказательство. То, что Q голоморфна в P_- и непрерывна вплоть до интервалов $(-\infty, m)$ и $(M, +\infty)$ следует непосредственно из (1.2). Далее прямыми вычислениями легко проверить, что предел функции Q в любой точке t из отрезка $[m, M]$ по любому некасательному пути существует и равен

$$z = z(t) := e^{i\pi/4} \int_0^{q^{-1}(t)} \sqrt{t - q(x)} dx + e^{-i\pi/4} \int_{q^{-1}(t)}^1 \sqrt{q(x) - t} dx, \quad t \in [m, M]. \quad (4.2)$$

Отсюда и из соотношений

$$Q(\lambda) = \begin{cases} e^{i\pi/4} \int_0^1 \sqrt{\lambda - q} dx & \text{при } \lambda \geq M, \\ e^{-i\pi/4} \int_0^1 \sqrt{q - \lambda} dx & \text{при } \lambda \leq m. \end{cases}$$

следует, что отображение $Q : \partial P_- \rightarrow \partial D$ – биекция.

Обозначим через D^* образ D при отображении $z \mapsto 1/z$. Тогда функция $f(\lambda) = 1/Q(\lambda)$ голоморфна в P_- , непрерывна на $\overline{P_-}$ и взаимно однозначно отображает границу P_- (ось Ox) на границу D^* . Отсюда согласно обратному принципу соответствия границ [8, § 13, п. 41] отображение $f : P_- \rightarrow D^*$, а значит, и $Q : P_- \rightarrow D$ – биекция.

Далее, из (4.2) видно, что аргумент $z(t)$ непрерывно убывает на $[m, M]$ от $3\pi/4$ до $\pi/4$, следовательно, D выпукла. Докажем, что

$$d := \inf_{z \in D} |z| > 0. \quad (4.3)$$

В силу (4.2)

$$|z(t)|^2 = \left| \int_0^{q^{-1}(t)} \sqrt{t - q(x)} dx \right|^2 + \left| \int_{q^{-1}(t)}^1 \sqrt{q(x) - t} dx \right|^2 > 0, \quad t \in [m, M],$$

и, поскольку z непрерывна, то $\min_{t \in [m, M]} |z(t)| > 0$. Отсюда следует (4.3). \square

По условию (i') функция q возрастает на $[0, 1]$. При доказательстве теоремы 3.1 было замечено, что при любом $\lambda \in P_-$, $\beta(\lambda)$ – образ отрезка $[0, 1]$ при отображении (3.4) – является графиком функции, строго выпуклой вверх. Введем обозначения:

$$P_-(c) = \{re^{i\varphi} : r \geq c, -\pi \leq \varphi \leq 0\}, \quad (4.4)$$

$E(\lambda)$ – область, ограниченная кривой $\beta(\lambda)$ и отрезком $[0, 1]$.

Лемма 4.2. Пусть условие (i') выполнено. Тогда существует $c_1 > 0$, что при всех λ из $P_-(c_1)$ найдется кривая $\alpha(\lambda)$ с параметризацией $z = t + i\alpha(\lambda, t)$ ($t \in [0, 1]$), где $\alpha(\lambda, \cdot)$ бесконечно дифференцируема на $[0, 1]$, отрицательна на $(0, 1)$, равна 0 в точках 0 и 1 и такова, что компакт $K(\lambda)$, ограниченный кривой $\alpha(\lambda)$ и отрезком $[0, 1]$, отображается функцией (3.4) взаимно однозначно и конформно на замыкание области $E(\lambda)$.

Доказательство. Пусть G_1 – область, такая, что $[0, 1] \subset \overline{G_1} \subset G$. В силу (3.4) найдется $c_1 > 0$, что функция $\xi(\lambda, z)$ голоморфна в области $P_-(c) \times \overline{G_1}$ и

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k} \xi(\lambda, z) = z^{1-k} + R_k(\lambda, z), \quad k = 0, 1, \quad (4.5)$$

$$\sup_{(t, \lambda, z) \in X} \left| \frac{R_0(\lambda, z)}{z - t} \right| < 1, \quad \sup_{(\lambda, z) \in Y} \left| \frac{\partial}{\partial z} R_1(\lambda, z) \right| < 1, \quad (4.6)$$

где $X = [0, 1] \times Y$, $Y = P_-(c) \times \overline{G_1}$. Применим теорему Руше к уравнению

$$\xi(\lambda, z) - t = 0, \quad (t, \lambda) \in [0, 1] \times P_-(c),$$

пользуясь (4.5)–(4.6) при $k = 0$. В результате найдем единственную точку $z(\lambda, t) \in G_1$, такую, что $\xi(\lambda, z(\lambda, t)) = t$. Обозначим через $\alpha(\lambda)$ кривую с параметризацией $z = z(\lambda, t)$, $t \in [0, 1]$. Выше было отмечено, что все внутренние точки кривой $\beta(\lambda)$ лежат вне $[0, 1]$. Учитывая это, легко проверить, что таким же свойством обладает кривая $\alpha(\lambda)$. Тогда кривые $\omega(\lambda) = \alpha(\lambda) \cup [0, 1]$ и $\omega^*(\lambda) = \beta(\lambda) \cup [0, 1]$ – замкнуты и жордановы. Обозначим через $K(\lambda)$ – компакт, ограниченный кривой $\omega(\lambda)$. По построению отображение $\xi(\lambda, \cdot) : \omega(\lambda) \rightarrow \omega^*(\lambda)$ – биекция. Отсюда, поскольку функция $\xi(\lambda, \cdot)$ голоморфна на $K(\lambda)$, то по обратному принципу соответствия границ [8, § 13, п. 41] отображение $\xi(\lambda, \cdot) : K(\lambda) \rightarrow \overline{E(\lambda)}$ – биекция. Конформность следует из оценки (4.5)–(4.6) при $k = 1$, то, что $\alpha(\lambda, x)$ отрицательна при $x \in (0, 1)$ – из конформности, а бесконечная дифференцируемость функции $\alpha(\lambda, \cdot)$ – из голоморфности на $[0, 1]$ функции $z(\lambda, \cdot)$. \square

Из доказанной леммы следует, что при всех $\lambda \in P_-(c_1)$, где $c_1 > 0$ – постоянная, удовлетворяющая условиям леммы, спектр задачи (3.8)–(3.9) не меняется при замене кривой $\beta(\lambda)$ на отрезок $[0, 1]$. Обозначим через $T(\lambda)$ оператор, порожденный в $L^2(0, 1)$ дифференциальным выражением $-d^2/d\xi^2 + V(\lambda, \cdot)$ и краевыми условиями (3.9).

Лемма 4.3. *Существуют числа $B > 0$ и $c_2 \geq c_1$, такие, что при каждом λ из $P_-(c_2)$ спектр оператора $T(\lambda)$ состоит из простых собственных чисел $\{(s_n(\lambda))^2\}_{n=1}^\infty$, для которых справедлива оценка*

$$s_n = \pi n + \frac{a_n(\lambda)}{n\lambda}, \quad |a_n(\lambda)| < B \quad \text{для всех } n \geq 1 \quad \text{и } \lambda \in P_-(c_2). \quad (4.7)$$

Доказательство. Согласно формуле (3.5) и лемме 4.2 потенциал оператора $T(\lambda)$ имеет вид

$$V(\lambda, \xi) = \frac{Q^2}{\lambda - p} \left[\frac{p_1}{\lambda - p} + \left(\frac{p_2}{\lambda - p} \right)^2 \right],$$

где p, p_1, p_2 – функции, голоморфные на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, существуют $c' \geq c_1$ и $B' > 0$, такие, что

$$|V(\lambda, \xi)| \leq \frac{B'}{\lambda} \quad \text{при всех } \lambda \in P_-(c') \quad \text{и } \xi \in [0, 1]. \quad (4.8)$$

Собственные числа оператора $T(\lambda)$ – корни уравнения $\varphi(1, s, \lambda) = 0$, где $\varphi(\xi, s, \lambda)$ – решение уравнения $-v'' + V(\lambda, \cdot)v = s^2v$, удовлетворяющее условиям $\varphi(\lambda, s, 0) = 0$, $\varphi'(\lambda, s, 0) = 1$. Функция $\varphi_1 = s\varphi$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi_1(\xi, s, \lambda) = \sin s\xi + \frac{1}{s} \int_0^\xi \sin s(\xi - \eta)V(\lambda, \eta)\varphi_1(\eta, s, \lambda)d\eta.$$

Применяя к этому уравнению стандартный метод последовательных приближений (см., например, [10, п. 22.25]), с учетом оценки (4.8) приходим к уравнению для спектра

$$\sin s + f(\lambda)/s\lambda = 0, \quad \text{где } f \text{ ограничена на } P_-(c').$$

Отсюда видно, что существуют $c_2 > c'$ и $B > 0$, такие, что при всех $\lambda \in P_-(c_2)$ и $n \in \mathbb{N}$ к кружкам $|s - \pi n| = B(n|\lambda|)^{-1}$ можно применить теорему Руше, откуда и будет следовать (4.7). \square

Введем обозначения. Согласно лемме 4.1 для любого ε из сектора

$$\mathcal{E} = \{re^{i\varphi} : r > 0, |\arg \varepsilon| \leq \pi/4\} \quad (4.9)$$

и любого $c > 0$ найдется единственное натуральное число $m(c, \varepsilon)$, что при всех натуральных $n \geq m(c, \varepsilon)$ уравнение

$$Q(\mu) = \pi n \varepsilon, \quad |\mu| \geq c, \quad (4.10)$$

имеет единственный корень. Эти корни будем обозначать $\{\mu_n(\varepsilon)\}_{n=m(c, \varepsilon)}^{\infty}$.

Далее пусть $\sigma(c, \varepsilon)$ ($\varepsilon \in \mathcal{E}$) – часть спектра оператора $L(\varepsilon)$, лежащая в области $P_-(c)$.

Теорема 4.1. Пусть выполнено условие (i'). Тогда найдутся положительные числа c, τ и A , такие, что при всех ε из сектора $\mathcal{E}(\tau) = \{\varepsilon \in \mathcal{E} : |\varepsilon| < \tau\}$

$$\sigma(c, \varepsilon) = \{\lambda_n(\varepsilon)\}_{n=l(c, \varepsilon)}^{\infty}, \quad m(c, \varepsilon) - 2 \leq l(c, \varepsilon) \leq m(c, \varepsilon) + 1, \quad (4.11)$$

$$\lambda_n(\varepsilon) = \mu_n(\varepsilon) + \delta_n(\varepsilon), \quad |\delta_n(\varepsilon)| \leq A|\varepsilon|^2. \quad (4.12)$$

Доказательство. Пусть c_2 – постоянная, определенная в лемме 4.3. Выберем $c \geq c_2$ так, что

$$\int_0^1 \sqrt{i(\lambda - q)} dx = \sqrt{i\lambda} [1 + r(\lambda)], \quad |r(\lambda)| < 1/2 \quad \text{при всех } \lambda \in P_-(c), \quad (4.13)$$

$$\left| \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\lambda_1 - q} + \sqrt{\lambda_2 - q}} \right| > \frac{1}{3 \max \{ \sqrt{|\lambda_1|}, \sqrt{|\lambda_2|} \}} \quad \text{при всех } \lambda_1, \lambda_2 \in P_-(c). \quad (4.14)$$

Возьмем произвольное ε из сектора $\mathcal{E}(\tau)$, где τ – положительное число, значение которого уточним ниже. Далее выберем любое $\lambda \in \sigma(c, \varepsilon)$ и покажем, что для него найдется единственный номер n , такой, что λ совпадает с $\lambda_n(\varepsilon)$, для которого выполняется (4.12). Положим $s = Q(\lambda)/\varepsilon$. Согласно формулам (3.2) – (3.9) s^2 является собственным значением задачи (3.8) – (3.9), удовлетворяющим условию

$$s\varepsilon \in D(c), \quad (4.15)$$

где $D(c)$ – образ $P_-(c)$ при отображении $\lambda \mapsto Q(\lambda)$. Так как $c > c_1$, то по лемме 4.2 число s^2 является собственным значением оператора $T(\lambda)$. Далее, поскольку $c > c_2$, то по лемме 4.3 найдется номер $n \geq l(c, \varepsilon)$, такой, что $s = s_n$ и для s_n справедлива оценка (4.7). Здесь $l(c, \varepsilon)$ – наименьший из всех n , при которых s_n удовлетворяет (4.15). Таким образом,

$$\frac{Q(\lambda)}{\varepsilon} = \pi n + \frac{a_n(\lambda)}{n\lambda}. \quad (4.16)$$

Отсюда, учитывая оценки (4.7), (4.13) и то, что $\varepsilon \in \mathcal{E}(\tau), \lambda \in P_-(c)$, будем иметь

$$\frac{\sqrt{c}}{2\tau} < \frac{|Q(\lambda)|}{|\varepsilon|} = \left| \pi n + \frac{a_n(\lambda)}{n\lambda} \right| < \pi n + \frac{B}{c}.$$

Потребуем теперь $\tau < c^{3/2}/4B$. Тогда $\sqrt{c}/4\tau > B/c$, поэтому

$$\pi n > \frac{|Q(\lambda)|}{|\varepsilon|} - \frac{B}{c} > \frac{|Q(\lambda)|}{2|\varepsilon|},$$

откуда, снова учитывая (4.13), получим $n > \sqrt{|\lambda|}/4\pi|\varepsilon|$. Тогда соотношение (4.16) можно записать в виде

$$Q(\lambda) = \pi n \varepsilon + \frac{b_n(\lambda)}{\lambda^{3/2}} \varepsilon^2, \quad \text{где } |b_n(\lambda)| \leq 4\pi B$$

при всех $n \geq l(c, \varepsilon)$ и $\lambda \in P_-(c)$. Отсюда и из (4.10), пользуясь оценкой (4.14), получим

$$\lambda = \mu_n(\varepsilon) + \delta_n(\varepsilon), \quad \text{где } |\delta_n(\varepsilon)| \leq A|\varepsilon|^2, \quad n \geq l(c, \varepsilon),$$

A – постоянная, не зависящая ни от ε , ни от n . Тем самым утверждение о существовании n с требуемым свойством доказано. Осталось доказать неравенства

$$m(c, \varepsilon) - 2 \leq l(c, \varepsilon) \leq m(c, \varepsilon) + 1. \quad (4.17)$$

Далее для упрощения записи вместо $m(c, \varepsilon)$ и $l(c, \varepsilon)$ будем писать m и l . Согласно определению l – наименьший из всех n , при которых $\lambda_n(\varepsilon) \in P_-(c)$. Сначала докажем, что найдется $d > 0$, такое, что

$$|\mu_{m+1}(\varepsilon)| \geq c + d|\varepsilon| \quad \text{при всех } c \gg 1 \text{ и } \varepsilon \in \mathcal{E}. \quad (4.18)$$

Из равенства (4.10) следует, что для произвольного $\delta > 0$ найдется постоянная $c_1 = c_1(\delta) > 0$, такая, что

$$\mu_n(\varepsilon) = \frac{(\pi n \varepsilon)^2}{i} (1 + \sigma_1(n, \varepsilon)), \quad \text{где } |\sigma_1(n, \varepsilon)| < \delta \text{ и } n \geq m(c_1, \varepsilon). \quad (4.19)$$

Далее, снова воспользовавшись (4.10), учитывая при этом (4.19), найдем $c_2 = c_2(\delta) > 0$, что

$$\mu_{m+1}(\varepsilon) - \mu_m(\varepsilon) = \frac{\pi^2 \varepsilon^2 m}{i} (1 + \sigma_2(\varepsilon)), \quad \text{где } |\sigma_2(\varepsilon)| < \delta \text{ и } m = m(c_2, \varepsilon). \quad (4.20)$$

Положим $c(\delta) = \max\{c_1(\delta), c_2(\delta)\}$ и $m = m(c(\delta), \varepsilon)$. Используя соотношения (4.19) и (4.20), легко убедиться, что при малых $\delta > 0$ аргументы чисел $\mu_m(\varepsilon)$ и $\mu_{m+1}(\varepsilon) - \mu_m(\varepsilon)$ мало отличаются друг от друга. С другой стороны, поскольку $|\mu_m(\varepsilon)| \geq c$, то $m|\varepsilon| \geq c/\pi$, так что из (4.20) имеем $|\mu_{m+1}(\varepsilon) - \mu_m(\varepsilon)| \geq d'|\varepsilon|$, где $d' > 0$ – не зависит от ε . Из сказанного легко следует (4.18).

Пусть $c > 0$ и τ таковы, что верны оценки обе оценки (4.18) и (4.12). Выберем τ настолько малым, чтобы при всех $\varepsilon \in \mathcal{E}(\tau)$ выполнялось неравенство $A|\varepsilon|^2 < d|\varepsilon|$, где A и d , постоянные в оценках (4.12) – и (4.18). Тогда $|\lambda_{m+1}| > c$, следовательно, $l(c, \varepsilon) \leq m(c, \varepsilon) + 1$. Точно так же доказывается первое из неравенств (4.17). □

5. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В этом пункте мы решаем обратную задачу. В качестве спектральных данных мы берем свойство локализации спектра оператора $L(\varepsilon)$ при малых $\varepsilon \in \mathcal{E}$ около корней уравнения (4.10) в смысле, более мягком, чем оценка в (4.12).

Теорема 5.1. Пусть функция q вещественна, возрастает на $[0, 1]$, дифференцируема и $q' \in AC[0, 1]$. Далее, пусть существует такое $c > 0$, что при стремлении ε к 0 по сектору (4.9) $\sigma(c, \varepsilon)$ – спектр оператора $L(\varepsilon)$ в области $P_-(c)$ – локализуется следующим образом:

$$\sigma(c, \varepsilon) = \{\lambda_n(\varepsilon)\}_{n_1(c, \varepsilon)}^\infty \quad (5.1)$$

$$\lambda_n(\varepsilon) = \mu_n(\varepsilon) + o(1), \quad (5.2)$$

где $\mu_n(\varepsilon)$ – корни уравнения (4.10), оценка $o(1)$ равномерна по n . Тогда функция q допускает голоморфное продолжение в некоторую окрестность интервала $(0, 1)$.

Доказательство. Пусть $c > 0$ – постоянная, фигурирующая в условии теоремы. Возьмем произвольную точку λ_0 из $P_-(c)$, лежащую на кривой $\text{Im } Q(\lambda) = 0$. Подстановка (3.4) и (3.7) преобразует задачу (3.2) – (3.3) в задачу (3.8) – (3.9) на кривой $\beta(\lambda_0)$. Обозначим через α_0 и α_1 углы между кривой $\beta(\lambda_0)$ и осью абсцисс в точках 0 и 1 соответственно. Выше (при доказательстве теоремы 3.1) было замечено, что кривая $\beta(\lambda_0)$ является графиком выпуклой вверх функции, поэтому $0 < \alpha_0 < \pi/2$ и $-\pi/2 < \alpha_1 < 0$. Известно [7], что в этом случае спектр задачи (3.8) – (3.9) за исключением конечного числа лежит в угле

$-2\alpha_0 < \arg z < -2\alpha_1$. Покажем, что в условиях теоремы собственные числа $\{s_k^2\}$ этой задачи при больших k концентрируются около луча $\arg s = 0$ в следующем смысле:

$$\arg s_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty. \quad (5.3)$$

Предположим противное: пусть существует подпоследовательность номеров $\{k_j\}$ ($j = 1, 2, \dots$), такая, что $\arg s_{k_j} \rightarrow \alpha$, $j \rightarrow +\infty$, при некотором $\alpha \in (-\alpha_0, 0) \cup (0, -\alpha_1)$. Положим $\varepsilon_j = Q(\lambda_0)/s_{k_j}$, $n_j = \lfloor |s_{k_j}|/\pi \rfloor$, где $\lfloor x \rfloor$ означает целую часть числа x .

В силу соотношений (3.4)–(3.9), если s^2 – собственное значение задачи (3.8)–(3.9) и точка ε из \mathcal{E} удовлетворяет условию (4.15), то $\lambda \in \sigma(c, \varepsilon)$. Имеем $s_{k_j}\varepsilon_j = Q(\lambda_0) \in D(c)$, так что $\lambda_0 \in \sigma(c, \varepsilon_j)$. Отсюда в силу условий (5.1)–(5.2) будем иметь $\lambda_0 = \mu_{n_j}(\varepsilon_j) + \delta_j$, где $\delta_j \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$. Тогда

$$Q(\mu_{n_j}(\varepsilon_j)) \sim Q(\lambda_0) + \delta_j \int_0^1 \sqrt{\frac{i}{2(\lambda_0 - q)}} dx, \quad j \rightarrow \infty,$$

следовательно, $\arg Q(\mu_{n_j}(\varepsilon_j)) \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$. С другой стороны, согласно (4.10) $\arg Q(\mu_{n_j}(\varepsilon_j)) \rightarrow -\beta$ при $j \rightarrow \infty$. Полученное противоречие доказывает (5.3).

Из (5.3) согласно критерию локализации спектра оператора Штурма–Лиувилля на кривой [11, теорема 3] заключаем, что функция V (см. (3.5)) допускает мероморфное продолжение \tilde{V} в область $E(\lambda_0)$, ограниченную кривой $\beta(\lambda_0)$ и отрезком $[0, 1]$. Полюса \tilde{V} могут иметь предельные точки только на отрезке $[0, 1]$, так что функция \tilde{V} голоморфна в некоторой области $G(\lambda_0)$, ограниченной отрезком $[0, 1]$ и кривой $\beta(\lambda_0)$, гомотопной $[0, 1]$ в $E(\lambda_0)$, непрерывна вплоть до любой дуги кривой $\beta(\lambda_0)$ с концами, отличными от 0 и 1, и совпадает там с V .

Докажем, что отсюда будет следовать голоморфность функции q в некоторой окрестности интервала $(0, 1)$. Положим

$$p = p(\xi) = (\lambda_0 - q(x))^{1/4} \Big|_{x=x(\lambda_0, \xi)}, \quad \xi \in \beta(\lambda_0),$$

Из формул (3.4) и (3.4) видно, что функция p является решением задачи Коши

$$-\frac{d^2 v}{d\xi^2} + V(\lambda_0, \xi)v = 0, \quad v(0) = (\lambda_0 - m)^{1/4}, \quad \frac{dv}{d\xi}(0) = \frac{Q(\lambda_0)q'(0)}{4i(\lambda_0 - m)^{1/4}}.$$

Так как V голоморфна в области $G(\lambda_0)$, то функция p голоморфна там же. Следовательно, функция $(\lambda_0 - q(z))^{1/4} = p(\lambda_0, \xi(z))$ голоморфна в области W — прообразе $G(\lambda_0)$ при отображении (3.4). Область W содержится в нижней или верхней полуплоскости z , и ее граница содержит весь интервал $(0, 1)$. Применяя принцип Шварца, получаем окрестность интервала $(0, 1)$, в которой голоморфна функция q . \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степин С.А. *Несамосопряженные сингулярные возмущения и спектральные свойства задачи Орра – Зоммерфельда* // Мат. сборник. **188**:1, 129–146 (1997).
2. Шкалик А.А. *Спектральные портреты оператора Орра–Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса* // Труды международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 11–17 августа, 2002). Часть 3. СМФН. **3**. М.: МАИ. 89–112 (2003).
3. Туманов С.Н., Шкалик А.А. *О локализации спектра задачи Орра–Зоммерфельда для больших чисел Рейнольдса* // Мат. заметки. **72**:4, 561–569 (2002).
4. Покотило В.И., Шкалик А.А. *Квазиклассическое приближение для несамосопряженной задачи Штурма–Лиувилля с параболическим потенциалом* // Мат. заметки. **86**:3, 469–473 (2009).
5. Ишкин Х.К. *О локализации спектра задачи с комплексным весом* // Фундаментальная и прикладная математика. **12**:5, 49–64 (2006).

6. Ишкин Х.К., Резбаев А.В. *К формуле Дэвиса о распределении собственных чисел несамо-сопряженного дифференциального оператора* // Комплексный анализ. Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. **153**, 84–93 (2018).
7. Ишкин Х.К. *О необходимых условиях локализации спектра задачи Штурма–Лиувилля на кривой* // Матем. заметки. **78**:1, 72–84 (2005).
8. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ*. Ч. 1. М.: Наука. 1985.
9. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов*. М.: Мир. 1972.
10. Титчмарш Э.Ч. *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка*. Том 2. М.: ИИЛ. 1960–1961.
11. Ишкин Х.К. *Критерий локализации спектра оператора Штурма–Лиувилля на кривой* // Алгебра и анализ. **28**:1, 52–88 (2016).

Хабир Кабирович Ишкин,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: Ishkin62@mail.ru

Рустем Ильдарович Марванов,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: rsmar1v@gmail.com