УДК 517.5

ГЕОМЕТРИЯ РАДИАЛЬНЫХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ, ДОПУСКАЮЩИХ БЕЗУСЛОВНЫЕ БАЗИСЫ ИЗ ВОСПРОИЗВОДЯЩИХ ЯДЕР

К.П. ИСАЕВ, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. В данной работе авторы рассматривают геометрию абстрактных радиальных функциональных гильбертовых пространств, устойчивых относительно деления, в которых существуют безусловные базисы из значений воспроизводящего ядра. Получено простое необходимое условие существования таких базисов в терминах последовательности $\|z^n\|,\ n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Получено достаточное условие для того, чтобы норма и функция Бергмана пространства восстанавливались через последовательность норм мономов. Доказаны два основных утверждения. Пусть H — радиальное функциональное гильбертово пространство целых функций, устойчивое относительно деления и в нем система мономов $\{z^n\},\ n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, полна.

1. Если пространство H допускает безусловный базис из значений воспроизводящего ядра, то

$$\|z^n\| \asymp e^{u(n)}, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

где последовательность $u(n)$ выпуклая, то есть

$$u(n+1)+u(n-1)-2u(n) \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Пусть $u_{n,k} = u(n)-u(k)-(u(n)-u(n-1))(n-k)$. Если $\mathcal{U}$ — матрица с элементами $e^{2u_{n,k}}$, $n,k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, и

$$\|\mathcal{U}\| := \sup_n \left(\sum_k e^{2u_{n,k}}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

то

2.1. пространство H как банахово пространство изоморфно пространству целых функций с нормой

$$\|F\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} |F(re^{i\varphi})|^2 e^{-2\widetilde{u}(\ln r)} d\varphi d\widetilde{u}'_+(\ln r),$$

где $\widetilde{u}$ — функция, сопряженная по Юнгу к кусочно линейной функции $u(t)$;

2.2. функция Бергмана пространства H удовлетворяет условию

$$K(z) \asymp e^{2\widetilde{u}(\ln|z|)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ключевые слова: гильбертовы пространства, целые функции, безусловные базисы, воспроизводящие ядра.

Mathematics Subject Classification: 46E22, 30D10

K.P. Isaev, R.S. Yulmukhametov, Geometry of radial Hilbert spaces with unconditional bases of reproducing kernels.

Работа первого автора выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, дополнительное соглашение № 075-02-2020-1421/1 к соглашению № 075-02-2020-1421, работа второго автора поддержана РФФИ (проект 18-01-00095 А).

Поступила 17 сентября 2020 г.

1. Введение

Во всей статье будем считать, что H — функциональное гильбертово пространство целых функций, устойчивое относительно деления в смысле:

1) все точечные функционалы $\delta_z : f \to f(z)$ являются непрерывными;

2) если $F \in H$, $F(z_0) = 0$, то $F(z)(z - z_0)^{-1} \in H$.

Из функциональности пространства следует, что оно допускает воспроизводящее ядро $k(\lambda, z)$:

$$f(z) = (f(\lambda), k(\lambda, z)), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall f \in H.$$

Через $K(z)$ обозначим $k(z, z)$. Тогда функция Бергмана пространства H — это $\|\delta_z\|_H = (K(z))^{\frac{1}{2}}$ (см. [1]).

Базис $\{e_k,\ k = 1, 2, ...\}$ в гильбертовом пространстве называется безусловным базисом (см. [2]), если найдутся числа $c, C > 0$, такие, что для любого элемента $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in H$ выполняется соотношение

$$c \sum_{j=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 \le \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_k e_k \right\|^2 \le C \sum_{j=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2.$$

Вопрос о существовании и конструировании безусловных базисов из значений воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых функций в последние годы активно изучается.

Эта задача восходит к двум тесно связанным между собой классическим задачам: представление функций посредством рядов экспонент и интерполяция целыми функциями. Представление посредством рядов экспонент активно развивалось А. Ф. Леонтьевым и его учениками, основные результаты и аналитические методы изложены в монографии [3]. Ю. Ф. Коробейником и его учениками развивались функционально аналитические методы, им создана теория абсолютно представляющих систем в локально выпуклых пространствах голоморфных функций, основные результаты этой теории изложены в работе [4]. В теории абсолютно представляющих систем естественным образом важное значение имеет степень тонкости топологии пространства. В работах [5], [6] доказаны теоремы о существовании представляющих систем экспонент в проективных и индуктивных пределах весовых пространств, в которых оператор дифференцирования действует непрерывно.

Дальнейшее продвижение в этой задаче в смысле тонкости топологии предполагает уже изучение нормированных пространств, т.е. конструирование (безусловных) базисов. Как оказалось, базисы из экспонент — явление редкое. Насколько известно авторам — это базисы в классическом пространстве L_2 и в пространствах Соболева L_2^s (см. [7]), базисы в пространствах Смирнова ([8]) и Бергмана ([9]) на выпуклых многоугольниках. Соответственно, имеется ряд работ об отсутствии базисов из экспонент. Так на пространствах Смирнова и Бергмана на областях с гладкой границей базисов из экспонент не может быть (см. [10], [11]). Базисов из экспонент не бывает также и в весовых пространствах, когда весовая функция растет быстрее степенной функции ([12]) или сравнима со степенной ([13]).

В работах [14]–[16] в терминах интерполяции целыми функциями показано отсутствие безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра в классическом пространстве Баргмана и в пространствах Фока

$$\mathcal{F}_\varphi = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) :\ ||f||^2 := \int_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2 e^{-2\varphi(\lambda)} dm(\lambda) < \infty \right\},$$

с радиальными весами φ, растущими быстрее $|\lambda|^2$. В работе [17] доказано отсутствие безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра уже в пространствах с весами, удовлетворяющими условию $(\ln_+ r)^2 = o(\varphi(r))$, $r \to \infty$, и с некоторой регулярностью роста. В этой же работе получен неожиданный результат о существовании безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра в пространствах Фока $\mathcal{F}_{\varphi_\alpha}$ с весами $\varphi_\alpha(\lambda) = (\ln_+ |\lambda|)^\alpha$ при $\alpha \in (1;2]$. В дальнейшем в статье [18] доказано существование безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра в пространствах Фока с радиальными весами существенно более общего вида.

Далее будем пользоваться следующими обозначениями. Запись $A(x) \asymp B(x)$, $x \in X$, для положительных функций A, B означает, что для некоторых констант $C, c > 0$ для всех $x \in X$ выполняются оценки $cB(x) \le A(x) \le CB(x)$, символ $A(x) \prec B(x)$, $x \in X$, $(A(x) \succ B(x),\ x \in X)$, означает существование константы $C > 0$ такой, что $A(x) \le CB(x)$ $(B(x) \le CA(x))$.

Функциональное гильбертово пространство H будем называть радиальным, если для любого $F \in H$ и $\varphi \in \mathbb{R}$ функция $F(ze^{i\varphi})$ лежит в H, причем

$$\|F(ze^{i\varphi})\| = \|F\|.$$

Очевидно, что в радиальном гильбертовом пространстве $K(ze^{i\varphi}) \equiv K(z),\ \ z \in \mathbb{C},\ \ \varphi \in \mathbb{R}$.

В данной работе авторы рассматривают абстрактные радиальные функциональные гильбертовы пространства, устойчивые относительно деления, и доказывают следующие утверждения.

1. Если H — радиальное функциональное гильбертово пространство, устойчивое относительно деления и допускающее безусловный базис из значений воспроизводящего ядра, то существует выпуклая последовательность $u(n)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, такая, что $\|z\|^n \asymp e^{u(n)}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Выпуклость $\{u(n)\}$ означает, что

$$u(n+1) + u(n-1) - 2u(n) \ge 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(См. теорему 1).

2. Пусть $u_{n,k} = u(n) - u(k) - (u(n) - u(n-1))(n-k)$. Если $\mathcal{U}$ — матрица с элементами $e^{2u_{n,k}}$, $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и

$$\|\mathcal{U}\| := \sup_n \left(\sum_k e^{2u_{n,k}} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

то

2.1. пространство H как банахово пространство изоморфно пространству целых функций с нормой

$$\|F\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |F(re^{i\varphi})|^2 e^{-2\widetilde{u}(\ln r)} d\varphi d\widetilde{u}'_+(\ln r),$$

где $\widetilde{u}$ — функция, сопряженная по Юнгу к кусочно линейной функции $u(t)$;

2.2. функция Бергмана пространства H удовлетворяет условию

$$K(z) \asymp e^{2\widetilde{u}(\ln |z|)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

2. Описание нормы и функции Бергмана

Следующая теорема доказана в работе [19] (Теорема 1).

Теорема 1. *Если в радиальном функциональном гильбертовом пространстве H, устойчивом относительно деления и содержащем все мономы z^n, $n = 0, 1, 2, ...$, существует безусловный базис из значений воспроизводящего ядра, то существует выпуклая последовательность $u(n)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, такая, что $\|z\|^n \asymp e^{u(n)}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. При этом*

$$\lim_{n\to+\infty}(u(n+1) - u(n)) = \lim_{n\to+\infty}\frac{u(n)}{n} = +\infty.$$

Если в радиальном гильбертовом пространстве система мономов z^n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, полна, то пространство вполне определяется последовательностью $u(n) = \ln\|z^n\|$, $n = 0, 1, 2, ...$. Это следует из следующего утверждения.

Лемма 1. *Пусть H — радиальное гильбертово пространство целых функций и $z^n, z^m \in H$, $n \neq m$. Тогда*

$$(z^n, z^m) = 0.$$

Доказательство. Из радиальности пространста следует, что для любого $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\|z^n + z^m\|^2 = \|(ze^{i\varphi})^n + (ze^{i\varphi})^m\|^2 = \|z^n\|^2 + 2\mathrm{Re}\ e^{i(n-m)\varphi}(z^n, z^m) + \|z^m\|^2,$$

т.е.

$$\mathrm{Re}\ e^{i(n-m)\varphi}(z^n, z^m) \equiv \mathrm{Const},$$

что возможно только при ортогональности z^n и z^m. Лемма 1 доказана. □

Пространство целых функций с нормой

$$\|F\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{F^{(n)}(0)}{n!}\right|^2 e^{2u(n)}$$

также радиальное гильбертово пространство, в котором система мономов z^n, $n = 0, 1, ...$, ортогональна и полна. Значит, в обоих пространствах эта система образует ортогональный базис, и эти пространства совпадают как банаховы пространства.

Теорема 2. *Если в радиальном функциональном гильбертовом пространстве H, устойчивом относительно деления, полиномы полны и для некоторой выпуклой на $\mathbb{R}$ функции $u(x)$*

$$\|z^n\| \asymp e^{u(n)}, \quad n = 0, 1, ...,$$
$$U(x) = \int_0^\infty e^{2xt-2u(t)}dt, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$\widetilde{u}(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}}(xt - u(t)), \quad x \in \mathbb{R},$$

то пространство H как банахово пространство изоморфно пространству

$$\left\{F \in H(\mathbb{C}) :\ \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{|F(re^{i\varphi})|^2 d\varphi d\widetilde{u}'_+(\ln r)}{U(\ln r)} < \infty\right\}.$$

Доказательство. В работе [20] введена характеристика выпуклых функций

$$\rho_{\widetilde{u}}(x) = \sup\left\{t > 0 :\ \int_{x-t}^{x+t}|\widetilde{u}'_+(\tau) - \widetilde{u}'_+(t)|d\tau \leq 1\right\},$$

и доказано (Лемма 2), что

$$e^{-2}e^{2u(t)} \le \int_{-\infty}^{\infty} e^{2xt-2\widetilde{u}(x)}\rho_{\widetilde{u}}(x)d\widetilde{u}'_+(x) \le \frac{\pi}{2}e^2e^{2u(t)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

По [21, теорема 2]

$$U(x) \asymp \frac{1}{\rho_{\widetilde{u}}(x)}e^{2\widetilde{u}(x)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2xt}}{U(x)}d\widetilde{u}'_+(x) \asymp \int_{-\infty}^{\infty} e^{2xt-2\widetilde{u}(x)}\rho_{\widetilde{u}}(x)d\widetilde{u}'_+(x) \asymp e^{2u(t)}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Для $F \in H$ положим

$$\|F\|_0^2 := \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{|F(re^{i\varphi})|^2 d\varphi d\widetilde{u}'_+(\ln r)}{U(\ln r)}.$$

Тогда в силу (1)

$$\|z^n\|_0^2 = \int_0^\infty \frac{|r|^{2n}d\widetilde{u}'_+(\ln r)}{U(\ln r)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nx}d\widetilde{u}'_+(x)}{U(x)} \asymp e^{2u(n)} \asymp \|z^n\|^2, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Поскольку система мономов образует ортогональный базис, то нормы эквивалентны. Теорема 2 доказана. □

Не уменьшая общности далее будем считать, что последовательность $\ln\|z^n\|$, $n = 0, 1, ...$, возрастающая выпуклая и $\ln\|z^0\| = 0$.

Лемма 2. *Пусть $u(t)$, $u(n) = \ln\|z^n\|$, $n = 0, 1, 2, ...,$ — кусочно линейная неубывающая функция с изломами в целых неотрицательных точках, т.е.*

$$u(t) = u(n) + (u(n+1) - u(n))(t - n), \quad t \in [n; n+1], \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

и

$$u'_+(n) = u'_-(n+1) = u(n+1) - u(n), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Тогда сопряженная по Юнгу $\widetilde{u}(x)$ также будет кусочно линейной с изломами в точках $x_n = u(n) - u(n-1) = u'_+(n-1)$, $n \in \mathbb{N}$.

Производная $\widetilde{u}'_+(x)$ будет функцией скачков с единичными скачками в этих точках x_n, $n \in \mathbb{N}$, в частности,

$$\widetilde{u}(x_n) = x_n n - u(n), \quad \widetilde{u}'_+(x_n) = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(x) &= \sup_{t\ge 0}(xt - u(t)) = \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \sup_{\tau\in[0;1]} (x(n+\tau) - (u(n) + (u(n+1) - u(n))\tau) = \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} (xn - u(n) + \sup_{\tau\in[0;1]} (x - (u(n+1) - u(n))\tau))\end{aligned}$$

и внутренний супремум достигается на концах интервала $[0; 1]$, то

$$\widetilde{u}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} (xn - u(n)), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Таким образом, сопряженная по Юнгу $\widetilde{u}(x)$ как верхняя огибающая последовательности линейных функций также будет кусочно линейной с изломами в точках

$x_n = u(n) - u(n-1) = u'_+(n-1)$, $n \in \mathbb{N}$, или более подробно

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 = u(1) - u(0), \\ 1 \cdot x - u(1), & x_1 \le x \le x_2 = u(2) - u(1), \\ ... \\ nx - u(n), & x_n \le x \le x_{n+1} = u(n+1) - u(n), \\ ... \end{cases} \tag{3}$$

Лемма 2 доказана. □

По лемме 2 $\widetilde{u}'_+(\ln r)$ — функция скачков с единичными скачками в точках $R_n = e^{x_n}$ и норма $\|F\|_0$ превращается в сумму ряда

$$\|F\|_0^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{U(\ln R_n)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(R_n e^{i\varphi})|^2 d\varphi \right). \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть $K(\lambda)$ — функция Бергмана радиального функционального гильбертового пространства H, устойчивого относительно деления, в котором система мономов полна. Если числа*

$$u_{n,k} = u(n) - u(k) - u'_+(n-1)(n-k), \quad n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

удовлетворяют условию

$$\sup_n \sum_k e^{2u_{n,k}} := A < \infty, \tag{5}$$

то

$$K(\lambda) \asymp e^{2\widetilde{u}(\ln|\lambda|)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. В условиях теоремы $\left\{ \frac{z^n}{\|z^n\|},\ n = 0, 1, ... \right\}$ образует ортонормированный базис. Следовательно,

$$k(\lambda, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \overline{z}^k}{\|z^k\|^2}, \quad K(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z^k|^2}{\|z^k\|^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Докажем требуемое соотношение на критических окружностях $|\lambda| = R_n$,

$$1 \le K(R_n) R_n^{-2n} \|z^n\|^2 \asymp \sum_{k=0}^{\infty} R_n^{2(k-n)} \exp\left(-2u(k) + 2u(n)\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $\ln R_n = x_n = u'_+(n-1)$, то

$$R_n^{2(k-n)} \exp\left(-2u(k) + 2u(n)\right) = \exp\big(2(u(n) - u(k) - u'_+(n-1)(n-k))\big) = e^{2u_{n,k}},$$

и по условию теоремы

$$K(R_n) \asymp \frac{R_n^{2n}}{\|z^n\|^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

По формуле (3) получим

$$K(R_n) \asymp \exp\left(2\widetilde{u}(\ln R_n)\right).$$

Функция $\ln K(e^x)$ выпуклая и по доказанному

$$\ln K(e^{x_n}) \le \mathrm{Const} + 2\widetilde{u}(x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку функция $\widetilde{u}(t)$ линейна между точками x_n, то это соотношение верно для всех x:

$$K(\lambda) \prec \exp\left(2\widetilde{u}(\ln|\lambda|)\right), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

С другой стороны, по определению функции Бергмана и по формуле (2)

$$K(\lambda)=\sup_{F\in H}\frac{|F(\lambda)|^2}{\|F\|^2}\geq\sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\frac{|\lambda^n|^2}{\|\lambda^n\|^2}=\exp\left(2\sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}(n\ln|\lambda|-u(n))\right)=$$
$$=\exp\left(2\widetilde{u}(\ln|\lambda|)\right).$$

Отсюда и из (6) следует утверждение теоремы 3. Теорема 3 доказана. □

Следствие 1. *Пусть последовательность $u(n)$ удовлетворяет условию: для некоторого $p\in\mathbb{N}$*

$$\inf_n(u'_+(n+p)-u'_+(n)):=\sigma>0. \tag{7}$$

Тогда

$$K(\lambda)\asymp e^{2\widetilde{u}(\ln|\lambda|)},\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

По теореме 3 для доказательства этого следствия достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 3. *Из условия (7) вытекает условие (5).*

Доказательство. Возьмем $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и пусть $k>n$. Для кусочно линейной функции

$$u'_+(n)=u(n+1)-u(n),$$

и

$$u(k)-u(n)=\sum_{j=0}^{k-n-1}(u(n+j+1)-u(n+j))=\sum_{j=0}^{k-n-1}u'_+(n+j).$$

По условию (u')

$$u'_+(n+j)\geq u'_+(n-1)+\left[\frac{j}{p}\right]\sigma,\quad n=1,2,...,\quad j=0,1,...,$$

где $[x]$ обозначает целую часть x.

Значит,

$$u(k)-u(n)\geq(k-n)u'_+(n-1)+\sigma\sum_{j=0}^{k-n-1}\left[\frac{j}{p}\right]\geq$$
$$\geq(k-n)u'_+(n-1)+\frac{\sigma p}{2}\left(\left[\frac{k-n-1}{p}\right]-1\right)\left[\frac{k-n-1}{p}\right],$$

тем самым,

$$u(n)-u(k)-u'_+(n-1)(n-k)\leq-\frac{\sigma p}{2}\left(\left[\frac{k-n-1}{p}\right]-1\right)\left[\frac{k-n-1}{p}\right],\quad k\geq n.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=n}^{\infty}e^{2u_{n,k}}\leq\sum_{j=0}^{\infty}\exp\left(-\sigma p\left(\left[\frac{j}{p}\right]-1\right)\left[\frac{j}{p}\right]\right):=C(\sigma,p),\quad n\in\mathbb{N}. \tag{8}$$

Пусть $k<n$, тогда

$$u(n)-u(k)-u'_+(n-1)(n-k)=\sum_{j=1}^{n-k}(u(n-j+1)-u(n-j)-u'_+(n-1))=$$
$$=\sum_{j=1}^{n-k}(u'_+(n-j)-u'_+(n-1)).$$

Поскольку для $j = sp+1, ..., (s+1)p$, $s = 0, 1, 2, ...$,

$$u'_+(n-j) - u'_+(n-1) \le -s\sigma,$$

то

$$u(n) - u(k) - u'_+(n-1)(n-k) \le -\frac{p\sigma}{2}\left[\frac{n-k}{p}\right]\left(\left[\frac{n-k}{p}\right]-1\right), \quad k < n.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2u_{n,k}} \le \sum_{j=0}^{\infty} \exp\left(-p\sigma\left[\frac{j}{p}\right]\left(\left[\frac{j}{p}\right]-1\right)\right) = C(\sigma, p), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда и из (8) следует выполнение условия (5). Лемма 3 доказана. □

Теорема 4. *Пусть H — радиальное функциональное гильбертово пространство, устойчивое относительно деления, в котором система мономов полна. Если выполнено условие (5), то норма пространства H эквивалентна норме*

$$\|F\|_0^2 := \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\widetilde{u}(\ln R_n)} \int_0^{2\pi} |F(R_n e^{i\varphi})|^2 d\varphi.$$

Доказательство. По теореме 1 и формуле (4) нам достаточно показать, что при выполнении условия (5),

$$U(x_n) \asymp e^{2\widetilde{u}(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Нижняя оценка выполняется всегда. В самом деле, в силу линейности функции $u(t)$ в интервалах $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$U(x_n) = \int_0^{\infty} e^{2(x_n t - u(t))} dt \ge \int_{n-1}^{n} e^{2(x_n t - (u(n-1) + u'_+(n-1)(t-n+1)))} dt, \quad n \in \mathbb{N},$$

и поскольку по утверждению 2

$$x_n = u'_+(n-1),$$

то, учитывая формулу (3), имеем

$$U(x_n) \ge e^{2(x_n(n-1) - u(n-1))} = e^{2\widetilde{u}(x_n)}. \tag{9}$$

Верхнюю оценку докажем на основании теоремы 3. Функция $x_n t - u(t)$ — вогнута по переменной t, достигает максимума в точке $t = n$. Значит, в интервале $(n; \infty)$ функция не возрастает, поэтому

$$\int_n^{\infty} e^{2(x_n t - u(t))} dt = \sum_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} e^{2(x_n t - u(t))} dt \le \sum_{k=n}^{\infty} e^{2(x_n k - u(k))} = e^{2\widetilde{u}(x_n)} \sum_{k=n}^{\infty} e^{2u_{n,k}}.$$

В интервале $(0; n)$ эта функция не убывает, поэтому

$$\int_0^{n} e^{2(x_n t - u(t))} dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} e^{2(x_n t - u(t))} dt \le \sum_{k=1}^{n} e^{2(x_n k - u(k))} = e^{2\widetilde{u}(x_n)} \sum_{k=1}^{n} e^{2u_{n,k}}.$$

Из последних двух оценок и условия (5) вытекает

$$U(x_n) \prec e^{2\widetilde{u}(x_n)}.$$

Отсюда и из оценки (9) получим утверждение теоремы 4. Теорема 4 доказана. □

Следствие 2. *Пусть H — радиальное функциональное гильбертово пространство, устойчивое относительно деления, в котором система мономов полна. Если выполнено условие (7), то норма пространства H эквивалентна норме*

$$\|F\|_0^2 := \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\widetilde{u}(\ln R_n)} \int\limits_0^{2\pi} |F(R_n e^{i\varphi})|^2 d\varphi.$$

Данное утверждение следует из теоремы 4 и леммы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. N. Aronszajn *Theory of reproducing kernels* // Transactions of the American Mathematical Society. **68**:3, 337–404 (1950).
2. S.V. Hruščev, N.K. Nikol'skii, B.S. Pavlov *Unconditional Bases of exponentials and of reproducing kernels* // Complex Analysis and Spectral Theory. Lecture Notes in Mathematics. **864**, 214–335 (1981).
3. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука. 1976.
4. Коробейник Ю.Ф. *Представляющие системы* // УМН. **36**:1(217), 73–126 (1981).
5. Исаев К.П. *Представляющие системы экспонент в пространствах аналитических функций* // Комплексный анализ. Целые функции и их применения, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **161**, ВИНИТИ РАН, М., 2019, 3–64.
6. Исаев К.П., Трунов К.В., Юлмухаметов Р.С. *Представляющие системы экспонент в проективных пределах весовых подпространств $H(D)$* // Изв. РАН. Сер. матем. **83**:2, 40–60 (2019).
7. D.L. Russell *On exponential bases for the Sobolev spaces over an interval* // J. Math.Anal. Appl. **87**:2, 528–550 (1982).
8. Левин Б.Я., Любарский Ю.И. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. АН СССР. Сер. мат. **39**:3, 657–702 (1975).
9. Исаев К.П. *Базисы Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках* // Уфимск. матем. журн. **2**:1, 71–86 (2010).
10. Луценко В.И. *Безусловные базисы из экспонент в пространствах Смирнова* // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН. 1992.
11. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *Об отсутствии безусловных базисов из экспонент в пространствах Бергмана на областях, не являющихся многоугольниками* // Изв. РАН. Сер. матем. **71**:6, 69–90 (2007).
12. Башмаков Р.А., Махота А.А., Трунов К.В. *Об условиях отсутствия безусловных базисов из экспонент* // Уфимск. матем. журн. **7**:2, 19–34 (2015).
13. K.P. Isaev *On unconditional exponential bases in weighted spaces on interval of real axis* // Lobachevskii Journal of Mathematics. **38**:1, 48–61 (2017).
14. K. Seip *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space I* // Reine Angew. Math. **429**:1, 91–106 (1992).
15. K. Seip, R. Wallsten *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space II* // Reine Angew. Math. **429**:1, 107–113 (1992).
16. A. Borichev, R. Dhuez, K. Kellay *Sampling and interpolation in large Bergman and Fock spaces* // Journal of Functional Analysis. **242**:2, 563–606 (2007).

17. A. Borichev, Yu. Lyubarskii *Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces* // Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu. **9**, 449–461 (2010).
18. A. Baranov, Yu. Belov, A. Borichev *Fock type spaces with Riesz bases of reproducing kernels and de Branges spaces* // Studia Mathematica. **236**:2, 127–142 (2017).
19. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *Безусловные базисы в радиальных гильбертовых пространствах* // Владикавк. матем. журн. **22**:3, 85–99 (2020).
20. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Пэли–Винера на весовые пространства* // Матем. заметки. **48**:5, 80–87 (1990).
21. Башмаков Р.А., Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *О геометрических характеристиках выпуклых функций и интегралах Лапласа* // Уфимский мат. журн. **2**:1, 3–16 (2010).

Константин Петрович Исаев,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
Башкирский государственный университет,
З. Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: orbit81@list.ru

Ринад Салаватович Юлмухаметов,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: Yulmukhametov@mail.ru