ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 4 (2020). С. 31-41.

УДК 517.53

ПОРЯДОК РОСТА СУММЫ РЯДА ДИРИХЛЕ: ЗАВИСИМОСТЬ ОТ КОЭФФИЦИЕНТОВ И ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Г.А. ГАЙСИНА

Аннотация. Исследуется оптимальность условий, при выполнении которых порядок суммы ряда Дирихле, сходящегося лишь в некоторой полуплоскости, может быть подсчитан при помощи определенной формулы (зависящей только от коэффициентов и показателей). Для неограниченных аналитических в единичном круге функций формула такого типа в разные годы независимо была получена рядом специалистов, в том числе Н.В. Говоровым (1959), Маклейном (1966) и М.Н. Шереметой (1968). Позже был введен аналог этого понятия и для рядов Дирихле, абсолютно сходящихся в какой-то полуплоскости. Но соответствующая формула для порядка ряда Дирихле большинством авторов была установлена при существенных ограничениях. Во всех предшествующих работах были указаны условия, которые оказались только достаточными для справедливости этой формулы. В настоящей работе найдены условия, которые являются не только достаточными, но и необходимыми для того, чтобы порядок любого ряда Дирихле из рассматриваемого класса мог быть вычислен при помощи той же формулы.

Ключевые слова: ряды Дирихле, полуплоскость сходимости, формула для порядка.

Mathematics Subject Classification: 30D10

1. Введение

Целые функции являются непосредственным обобщением многочленов. Если

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

— целая функция, по принципу максимума модуля имеем

$$M_f(r) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|\le r} |f(z)|.$$

Так что $M_f(r)$ — неубывающая на $[0,\infty)$ функция, причем если $f(z) \not\equiv const$, то $M_f(r)$, строго возрастая, стремится к $+\infty$ при $r \to \infty$. Для многочлена f степени n

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\ln r} = n,$$

G.A. Gaisina, Growth order of sum of Dirichlet series: dependence on coefficients and exponents.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, дополнительное соглашение № 075-02-2020-1421/1 к соглашению № 075-02-2020-1421.

Поступила 11 июля 2020 г.

а для целых трансцендентных функций отношение $\frac{\ln M_f(r)}{\ln r}$ стремится к ∞. Поэтому рост $\ln M_f(r)$ сравнивают не с $\ln r$, а с более быстро растущими функциями, например, со степенными. Поступая таким образом, Э. Борель пришел к понятию порядка ρ целой функции, полагая

$$\rho = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}.$$

Из сопоставления результатов Ж. Адамара (1893) и Э. Бореля (1896) было показано, что порядок целой функции (1) равен

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{\ln|1/a_n|}.$$

Пусть функция f, определенная рядом (1), аналитична только в круге $D(0,1) = \{z\colon |z| < 1\}$ (в этом случае радиус сходимости ряда (1) равен единице). Будем предполагать, что функция f не ограничена в $D(0,1)$. Так что $M_f(r) \uparrow \infty$ при $r \uparrow 1$.

Порядком ρ неограниченной аналитической в круге $D(0,1)$ функции f называется величина

$$\rho = \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{\ln\ln M_f(r)}{-\ln(1-r)}.$$

Для таких функций независимо Н.В. Говоровым (1959), Г. Маклейном (1966) и М.Н. Шереметой (1968), была установлена следующая формула [1]–[3]:

$$\frac{\rho}{\rho+1} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln n}.$$

Если положить $z = e^{-s}(s = \sigma + it)$, то имеем:

$$F(s) = f(e^{-s}) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ns}. \tag{2}$$

Так как при указанной замене полуплоскость Π_0^+ отображается в единичный круг $D(0,1)$, то

$$M(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma+it)| = M_f(r),$$

где $\sigma > 0, r = e^{-\sigma} < 1$. Проверяется, что $-\ln(1-r) \sim -\ln\sigma$ при $r \uparrow 1$ (при этом, очевидно, $\sigma \downarrow 0$). Учитывая это, имеем:

$$\rho = \rho_F \stackrel{\text{def}}{=} \varlimsup_{\sigma\downarrow 0} \frac{\ln\ln M(\sigma)}{-\ln\sigma}.$$

Таким образом, порядок ρ функции f в круге $D(0,1)$ равен соответствуюшей характеристике ρ_F роста ряда Тейлора-Дирихле (2). Ее называют обычным порядком или просто порядком функции F — суммы ряда (2). Это наблюдение приводит к понятию порядка общего ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \tag{3}$$

с произвольной последовательностью показателей $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$, сходящегося абсолютно (или просто равномерно) в некоторой полуплоскости

$$\Pi_b = \{s = \sigma + it\colon\ \sigma > b\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, возникает задача о связи порядка функции F, аналитической в Π_b, с коэффициентами разложения этой функции в ряд Дирихле (3).

Следуя работе [4] Х. Бора, через σ_c, σ_a, σ_u будем обозначать абсциссы простой, абсолютной и равномерной сходимости ряда (3) соответственно. Как показал Г. Валирон (см. [5], [6]),

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} \le \sigma_c \le \sigma_u \le \sigma_a \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} + L, \tag{4}$$

где

$$L = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n}. \tag{5}$$

Вообще говоря (в отличие от степенных рядов), величины σ_c, σ_a, σ_u могут быть различными. Как видно из соотношений (4), при $L = 0$ они все совпадут. Может оказаться, что $\sigma_u \ne \sigma_a$ (тогда ряд (3) сходится только равномерно, а не абсолютно). В этом случае актуальна формула М. Кунияда [7]:

$$\sigma_u = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{T(x)}{x}, \quad T(x) = \sup_{|t|<\infty} \left| \sum_{[x]\le\lambda_n<x} a_n e^{-i\lambda_n t} \right|,$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Если $\sigma_u = -\infty$, то сумма ряда Дирихле (3) представляет собой целую функцию F. В этой ситуации наиболее подходящей и удобной характеристикой роста функции F оказалось так называемое понятие R–порядка ρ_R, введенное Дж. Риттом (1928) [8].

По определению,

$$\rho_R = \varlimsup_{\sigma\to-\infty} \frac{\ln\ln M_F(\sigma)}{-\sigma},$$

где величина $M_F(\sigma)$ определена так же, что и выше[1]. В предположении, что $\sigma_a = -\infty$, т.е. когда ряд Дирихле (3) сходится во всей плоскости абсолютно, Дж. Риттом была доказана следующая формула, позволяющая вычислять ρ_R (порядок по Ритту) через коэффициенты разложения:

$$-\frac{1}{\rho_R} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n \ln\lambda_n}. \tag{6}$$

В работе [10] этот результат был перенесен на случай полуплоскости Π_0, а в [11] — на ограниченную выпуклую область $G \subset \mathbb{C}$. В последнем случае речь идет о рядах с комплексными показателями — рядах экспонент, — область абсолютной сходимости которых, как известно, всегда выпукла [9]. В обоих случаях указаны достаточные условия, при выполнении которых имеют место аналоги формулы Ритта (6), зависящие еще и от опорной функции области сходимости.

Приведенные выше результаты работ [1]–[3] в свое время были обобщены для класса $D_0(\Lambda)$ аналитических функций, представимых рядами Дирихле (3), абсолютно сходящимися лишь в полуплоскости Π_0. В 1970–1980 гг. этой задачей занимались, в основном, математики Индии, Китая, а также Советского Союза. Более подробный обзор этих многочисленных исследований приведем позже. Суть этих работ заключалась, например, в том, чтобы найти ограничения на показатели ряда (3), при выполнении которых была бы верна формула

$$\frac{\rho_F}{\rho_F+1} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln\lambda_n} \tag{7}$$

для порядка

$$\rho_F = \varlimsup_{\sigma\to0+} \frac{\ln\ln M_F(\sigma)}{-\ln\sigma} \quad (\sigma > 0)$$

(предполагается, что $M_F(\sigma) \to \infty$ при $\sigma \downarrow 0$). Эти требования на показатели λ_n оказались самыми разными, порой неоправданно жесткими. При этом почти ни в одной работе не

[1]Функция $\ln M_F(\sigma)$ является выпуклой по переменной $\sigma \in \mathbb{R}$ [9].

ставился вопрос о точности этих ограничений. В статье [12] все же было указано наиболее слабое условие на λ_n, существенность которого подтверждалась и примером, однако частного характера. В относительно недавней работе [13], выполненной в Институте математики Чешской академии наук в 2012 г., результат работы [12] был передоказан, хотя и в несколько иных терминах (в этом мы убедимся ниже). Таким образом, эта достаточно простая, но безусловно важная задача по сей день продолжает привлекать внимание некоторых специалистов, но до сих пор является не доведенной до конца.

В настоящей статье, в частности, и будет доказана необходимая часть теоремы из статьи [12].

В работе А.Ф. Леонтьева [14] было введено понятие порядка ρ аналитической функции F в ограниченной выпуклой области $G \subset \mathbb{C}$. В случае когда G — выпуклый многоугольник, им было доказано, что любую функцию F, аналитическую в G и удовлетворяющую в G оценке

$$|F(z)| \leq e^{\left(\frac{1}{r}\right)^{\rho+\varepsilon}}, \quad r = d(z) = \inf_{\xi \in \partial G} |z - \xi|, \tag{8}$$

$r < r_0(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ — любое, можно представить в области G рядом экспонент

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z},$$

причем так, что ряд из модулей будет удовлетворять той же оценке (8). При $\rho > 1$ этот результат был распространен Р.С. Юлмухаметовым на произвольную выпуклую область [15].

Однако в работах [14], [15] нельзя было ставить вопрос о какой-либо формуле типа (7), ибо нет единственности разложения в ряд экспонент, поэтому и нет формул для коэффициентов ряда. В этом как раз и отличие этого случая от полуплоскости.

Решение данной задачи представлено в работе [16], однако оценки для порядка ρ, полученные в [16], не точны. Недавно нами были получены неулучшаемые двусторонние оценки для этого порядка, но об этом речь будет идти в другой работе.

Одна из задач настоящей статьи — найти оптимальные условия на показатели ряда (3), при выполнении которых была бы верна формула для вычисления порядка в случае полуплоскости.

2. Теоремы типа Говорова–Маклейна

1. Случай произвольных коэффициентов. Будем далее предполагать, что $L = 0$ (эта величина определена формулой (5)), $\sigma_c = 0$. Тогда ряд Дирихле (3) будет сходиться абсолютно и равномерно в полуплоскости Π_0, а его сумма F будет аналитична в Π_0. Считаем, что $M_F(\sigma) \to \infty$ при $\sigma \downarrow 0$, где $M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$ $(\sigma > 0)$. Пусть, по-прежнему, $D_0(\Lambda)$ — класс всех аналитических в полуплоскости Π_0 функций, представимых в ней рядами Дирихле (3). Величина

$$\rho_F = \varlimsup_{\sigma \downarrow 0} \frac{\ln \ln M_F(\sigma)}{-\ln \sigma}$$

называется порядком суммы ряда Дирихле (3). Именно так порядок определяется, например, в работах [12], [17]–[20]. В [21], [22] порядок функции $F \in D_0(\Lambda)$ определяется по формуле

$$\rho_F = \varlimsup_{\sigma \downarrow 0} \frac{\ln \ln M_F(\sigma)}{-\ln(1 - e^{-\sigma})},$$

что, очевидно, совпадает с введенным выше порядком. В перечисленных работах [18]–[22] без доказательства приводится формула

$$\frac{\rho_F}{\rho_F+1}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln\lambda_n}, \tag{9}$$

справедливость которой утверждается в них лишь при некоторых дополнительных ограничениях на показатели λ_n и коэффициенты a_n ряда (3). Эти ограничения весьма разные, порой очень жесткие. Так, в [21], [22] предполагается, что последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность, т.е.

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=\tau<\infty.$$

Это условие, как будет видно, слишком сильное. С другой стороны, в [20] утверждается, что формула (9) верна при выполнении условий

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|a_n|}{\lambda_n}=0.$$

Здесь же будет показано, что лишь при этих требованиях формула (9) не верна (см. также [12]). В статье [17] формула (9) доказана, но при

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\lambda_n}=\gamma<\infty. \tag{10}$$

В настоящей статье это условие может быть существенно ослаблено.

Обозначим

$$\alpha=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n}.$$

Положим также

$$\mu=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln\lambda_n}.$$

В статье [18] утверждается, что если $\alpha\le\mu$, то $\mu=\frac{\rho_F}{\rho_F+1}$, т.е. верна формула (9). Недостатком этого результата является то, что условие $\alpha\le\mu$ содержит дополнительное ограничение на коэффициенты a_n ряда Дирихле (3). Поэтому, согласно [18], формула для порядка ρ_F имеет место не для любой функции F из класса $D_0(\Lambda)$. Об этом и пойдет речь в пункте 2 настоящей статьи.

Равенство $\mu=\frac{\rho_F}{\rho_F+1}$ доказано в [12] при $\alpha=0$. А это условие слабее требования (10). Действительно, если $\gamma<\infty$, то, очевидно, $L=0$ и $\alpha=0$. Но существует последовательность Λ, для которой $\alpha=0$, $L=0$, но $\gamma=\infty$ (достаточно положить $\lambda_n=e^{\sqrt{n}}$, $n\ge1$).

В [12] показано еще следующее: существует последовательность Λ с $\alpha>0$, существует функция $F\in D_0(\Lambda)$, для которой $\mu\ne\frac{\rho_F}{\rho_F+1}$.

Наша цель — показать, что условие $\alpha=0$ на самом деле является необходимым. Верна следующая

Теорема 2.1. *Для того чтобы для любой функции $F\in D_0(\Lambda)$ порядок ρ_F вычислялся по формуле*

$$\frac{\rho_F}{\rho_F+1}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln\lambda_n}, \tag{11}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\alpha=0$, т.е.

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n}=0.$$

Из теоремы 1 как следствие вытекает формула Говорова–Маклейна–Шереметы для вычисления порядка ρ функции f, заданной в круге $D(0,1)$ рядом (1).

Отметим, что в работе [13], опубликованной в 2012 г., приводится доказательство равенства

$$\mu = \frac{\rho_F}{\rho_F + 1}$$

в предположении $\alpha_0 = 0$, где

$$\alpha_0 = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln(p_k+1)}{\ln k} = 0,$$

где $p_k + 1$ — число точек λ_n из полуинтервала $[k, k+1)$. Но это утверждение есть на самом деле только достаточная часть теоремы, полное доказательство которой приведено в [12] А.М. Гайсиным в 1981 г. Действительно, убедимся, что $\alpha_0 = 0$ в том и только в том случае, когда $\alpha = 0$. В самом деле, если $\alpha = 0$, то, очевидно, $\alpha_0 = 0$. Действительно, пусть λ_j — ближайшая слева к (k+1) точка. Тогда

$$\frac{\ln\ln(p_k+1)}{\ln k} \leq \frac{\ln\ln j}{\ln k} \leq \frac{\ln(k+1)}{\ln k}\,\frac{\ln\ln j}{\ln \lambda_j} \to 0$$

при $j \to \infty$. Значит, $\alpha_0 = 0$.

Обратно, пусть $\alpha_0 = 0$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ при $i > i_0(\varepsilon)$ имеем:

$$p_i + 1 < e^{i^\varepsilon}.$$

Пусть $\lambda_n \in [k, k+1)$. Тогда при $i > i_1(\varepsilon) > i_0(\varepsilon)$

$$n \leq n(i_0) + \sum_{i=i_0+1}^{k} e^{i^\varepsilon} \leq n(i_0) + e^{k^\varepsilon} k < 2\lambda_n e^{\lambda_n^\varepsilon}.$$

Отсюда видно, что $L = 0$. Значит, $\sigma_c = \sigma_a = \sigma_u = 0$. Более того, при $n > n_0(\varepsilon)$

$$\ln n < 2\lambda_n^\varepsilon.$$

Значит,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln n}{\ln \lambda_n} \leq \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ — любое, то отсюда заключаем, что $\alpha = 0$.

Доказательство. Приступим к доказательству теоремы 1.

Достаточность теоремы 1 доказана в [12]. При этом формула верна и для случая $\rho_F = \infty$.

Необходимость. Пусть, как и выше,

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln n}{\ln \lambda_n}.$$

Это означает, что для любого β, $0 < \beta < \alpha$, найдется последовательность $\{n_m\}$ натуральных чисел n_m, $n_m \uparrow \infty$, такая, что

$$\frac{\ln\ln n_m}{\ln \lambda_{n_m}} \geq \beta > 0. \tag{12}$$

Так как, по предположению, $L = 0$, то, как легко проверить, $\alpha \leq 1$. Но тогда $\beta < 1$.

Рассмотрим ряд

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (s = \sigma + it), \tag{13}$$

где $a_n = e$. Как и ранее, предполагаем, что выполнено условие $\ln n = o(\lambda_n)$ при $n \to \infty$. Ряд (13) сходится, в силу последнего условия и абсолютно, в правой полуплоскости Π_0.

Вычисляя порядок по формуле (11), имеем: $\rho_F = 0$. Убедимся, что на самом деле порядок $\rho_F > 0$. Это будет означать также, что сумма ряда (13) не ограничена в Π_0, т. е. $F \in D_0(\Lambda)$.

Действительно, так как $a_n > 0$, то

$$M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)| \geq |F(\sigma)| = e\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \sigma} \qquad (\sigma > 0).$$

С другой стороны, очевидно, что

$$M_F(\sigma) \leq e\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \sigma}.$$

Следовательно, $M_F(\sigma) = |F(\sigma)|$. Пользуясь оценкой $M_F(\sigma) \geq |F(\sigma)|$, для любого натурального N имеем:

$$M_F(\sigma) \geq e\sum_{n=[\frac{N}{2}]}^{N} e^{-\lambda_n \sigma} \geq e\frac{N}{2} e^{-\lambda_N \sigma} \geq N e^{-\lambda_N \sigma},$$

где $[a]$ — целая часть a. Учитывая (12), теперь положим $N = n_m$ $(m = 1, 2, ...)$. Тогда получим

$$M_F(\sigma) \geq n_m e^{-\lambda_{n_m} \sigma} = \exp[\ln n_m - \lambda_{n_m} \sigma] \qquad (\sigma > 0).$$

Далее, из соотношения (12) видно, что

$$\lambda_{n_m} \leq (\ln n_m)^{\frac{1}{\beta}} \qquad (m \geq 1).$$

Следовательно, из предыдущего имеем

$$M_F(\sigma) \geq \exp[\ln n_m - (\ln n_m)^{\frac{1}{\beta}} \sigma] \qquad (m \geq 1), \tag{14}$$

где $0 < \beta < \alpha \leq 1$, $\sigma > 0$ — любое.

Так как $\beta < 1$, то в качестве σ можем взять решение σ_m уравнения

$$\ln n_m = 2(\ln n_m)^{\frac{1}{\beta}} \sigma,$$

или, что то же самое,

$$2(\ln n_m)^{\frac{1}{\beta}-1} = \frac{1}{\sigma} \qquad (0 < \beta < 1). \tag{15}$$

Тогда, учитывая (15), из (14) получаем

$$\begin{aligned}\ln M_F(\sigma_m) \geq (\ln n_m)^{\frac{1}{\beta}}[(\ln n_m)^{1-\frac{1}{\beta}} - \sigma_m] = \\ = (\ln n_m)^{\frac{1}{\beta}} \sigma_m = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \left(\frac{1}{\sigma_m}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} \qquad (m \geq 1).\end{aligned} \tag{16}$$

Следовательно, из (16) получаем, что при $m \to \infty$

$$\ln M_F(\sigma_m) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \left(\frac{1}{\sigma_m}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}.$$

Отсюда окончательно имеем:

$$\ln\ln M_F(\sigma_m) \geq [1 + o(1)]\frac{\beta}{1-\beta} \ln \frac{1}{\sigma_m}, \qquad m \to \infty.$$

Так как $\sigma_m \to 0$ при $m \to \infty$, то

$$\rho_F = \overline{\lim_{\sigma \downarrow 0}} \frac{\ln\ln M_F(\sigma)}{-\ln \sigma} \geq \frac{\beta}{1-\beta} \quad (0 < \beta < \alpha \leq 1).$$

Поскольку $\beta < \alpha$ — любое положительное число, то отсюда видно, что если $\alpha = 1$, то $\rho_F = \infty$. При $\alpha < 1$ из предыдущего имеем: $\rho_F \geq \frac{\alpha}{1-\alpha} > 0 \quad (0 < \alpha < 1)$.

Покажем для полноты рассуждений, что порядок ρ_F равен $\frac{\alpha}{1-\alpha}$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ при $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\frac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n} < q, \quad q = \alpha + \varepsilon. \tag{17}$$

Так как $\alpha < 1$, то за счет выбора $\varepsilon > 0$ можем считать, что $q < 1$.

Таким образом,

$$M_F(\sigma) \leq e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp[(2\ln n - \lambda_n\sigma)] \leq \frac{\pi^2 e}{6}\exp[\max_{n\geq 1}(2\ln n - \lambda_n\sigma)] \quad (\sigma > 0). \tag{18}$$

Учитывая (17), (18), получим

$$M_F(\sigma) \leq \frac{\pi^2 e}{6}\exp[\max_{x\geq 0}(2x - x^{\frac{1}{q}}\sigma)].$$

Максимум достигается в точке x_0, не превосходящей x_1, где x_1 — корень уравнения $2x = x^{\frac{1}{q}}\sigma$, т.е. $2x^{\frac{q-1}{q}} = \sigma$. Отсюда

$$x_1 = 2^{\frac{q}{1-q}}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\frac{q}{1-q}}.$$

Так что

$$M_F(\sigma) \leq \frac{\pi^2 e}{6}e^{2x_1} = \frac{\pi^2 e}{6}\exp\left[2^{\frac{q}{1-q}}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\frac{q}{1-q}}\right].$$

Следовательно, учитывая соотношение $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$, имеем:

$$\frac{\ln\ln M_F(\sigma)}{-\ln\sigma} \leq [1 + o(1)]\frac{q}{1-q}.$$

Это означает, что $\rho_F \leq \frac{q}{1-q}$, $\quad q = \alpha + \varepsilon$. Но $\varepsilon > 0$ — любое. Следовательно, $\rho_F \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}$, и с учетом обратного неравенства заключаем, что действительно $\rho_F = \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

Поскольку, очевидно, $F \in D_0(\Lambda)$, необходимость теоремы полностью доказана. □

2. Случай согласованности показателей и коэффициентов. Докажем теперь аналогичную теорему при некотором условии согласования между λ_n и коэффициентами a_n ряда Дирихле.

Пусть, как и выше,

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n}. \tag{19}$$

Было показано, что $0 \leq \alpha \leq 1$. Обозначим

$$\mu = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln\lambda_n}. \tag{20}$$

В статье [18] утверждается, что если α фиксировано, а параметр μ удовлетворяет требованию $\mu \geq \alpha$, то $\mu = \frac{\rho_F}{\rho_F+1}$, т. е. верна формула (11). Полное доказательство этого утверждения приведено в [23]. Недостатком этого результата является то, что условие $\alpha \leq \mu$ при фиксированном Λ содержит дополнительное ограничение на коэффициенты a_n ряда Дирихле (3). Поэтому формула для порядка ρ_F может не иметь места для какой-то функции F из класса $D_0(\Lambda)$. Поэтому естественно ставить вопрос о существенности условия $\mu \geq \alpha$ для справедливости формулы (11). Ниже будет дан ответ на этот вопрос.

Пусть μ $(0 \leq \mu \leq 1)$, α $(0 \leq \alpha \leq 1)$ — заданные числа. Через $D_0(\mu, \alpha)$ обозначим подкласс класса $D_0(\Lambda)$ рядов Дирихле (3), коэффициенты a_n которых удовлетворяют равенству (20), а показатели λ_n – равенству (19). Как было сказано выше (см. [23]), при $\alpha \leq \mu$ порядок ρ_F любой функции $F \in D_0(\mu, \alpha)$ может быть вычислен при помощи формулы (11).

Отметим, что ограничения $0 \le \alpha \le 1$ и $0 \le \mu \le 1$ следуют из равенств (19), (20).

Для $\mu = 1$ формула (11) верна, так как в этом случае $\alpha \le \mu$. При этом $\mu = \frac{\rho_F}{\rho_F+1} = 1$, т. е. $\rho_F = \infty$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $\mu < 1$. Будет показано, что для любых чисел α $(0 \le \alpha \le 1)$, μ $(0 \le \mu < 1)$ таких, что $\mu < \alpha$, всегда существует функция $F \in D_0(\mu, \alpha)$, для которой порядок ρ_F не может быть найден по формуле (11). Это будет означать, что справедлива

Теорема 2.2. *Пусть заданы μ $(0 \le \mu < 1)$, α $(0 \le \alpha \le 1)$. Для того чтобы порядок ρ_F любой функции $F \in D_0(\mu, \alpha)$ вычислялся по формуле (11), необходимо и достаточно, чтобы $\alpha \le \mu$.*

Доказательство. Достаточность данной теоремы доказана в [23].

Необходимость условия $\alpha \le \mu$. Пусть $\mu < \alpha$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $\{n_m\}$ натуральных чисел n_m, $n_m \uparrow \infty$, такая, что

$$\beta_1 \le \frac{\ln\ln n_m}{\ln \lambda_{n_m}} \le \beta_2 \quad (m \ge 1), \tag{21}$$

где $\beta_1 = \alpha - \varepsilon$, $\beta_2 = \alpha + \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \alpha)$.

Фиксируя последовательность $\{n_m\}$, построим соответствующий пример функции $F \in D_0(\mu, \alpha)$. Для этого выберем коэффициенты a_n и показатели λ_n ряда Дирихле вида (3) специальным образом, но удовлетворяющим, соответственно, условиям (19) и (20).

Положим

$$a_n = \exp[(\ln n_m)^{\frac{\mu}{\alpha}}] \quad (0 \le \mu \le \alpha), \quad n_m \le n < n_{m+1} \quad (m \ge 1)$$

(показатели λ_n ряда (3) выберем позже). Ясно, что для этого ряда с такими коэффициентами область сходимости (и абсолютной сходимости) есть Π_0 [24]. Обозначая для выбранных таким образом коэффициентов a_n величину

$$\nu = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ |a_n|}{\ln \lambda_n},$$

убедимся, что $\nu = \mu$. Действительно, пусть $n_m \le n < n_{m+1}$. Тогда

$$\frac{\ln\ln |a_n|}{\ln \lambda_n} = \frac{\mu}{\alpha}\frac{\ln\ln n_m}{\ln \lambda_n} \le \frac{\mu}{\alpha}\frac{\ln\ln n_m}{\ln \lambda_{n_m}}.$$

Учитывая (21), отсюда получаем, что $\nu \le \frac{\mu}{\alpha}(\alpha + \varepsilon)$. Так как $\varepsilon > 0$ — любое, то $\nu \le \mu$. С другой стороны,

$$\nu \ge \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ |a_n|}{\ln \lambda_{n_m}} = \frac{\mu}{\alpha} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\ln\ln n_m}{\ln \lambda_{n_m}}.$$

Следовательно, учитывая левую оценку в (21), отсюда получаем, что $\nu \ge \frac{\mu}{\alpha}(\alpha - \varepsilon)$, т. е. $\nu \ge \mu$. Таким образом, действительно $\nu = \mu$.

Если бы порядок ρ_F ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it, \sigma > 0) \tag{22}$$

вычислялся бы по формуле (11), имели бы

$$\rho_F = \frac{\mu}{1-\mu}. \tag{23}$$

Убедимся, что при подходящем выборе показателей ряда (22) это не так. Действительно, так как $a_n > 0$, то имеем

$$M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)| \ge |F(\sigma)| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \sigma} \qquad (\sigma > 0).$$

Следовательно,

$$M_F(\sigma) \geq \sum_{n=n_m}^{2n_m} a_n e^{-\lambda_n \sigma} \geq n_m exp[(\ln n_m)^{\frac{\mu}{\alpha}} - \lambda_{2n_m}\sigma]. \tag{24}$$

Положим теперь $\lambda_n = (\ln n)^{\frac{1}{\alpha}}$ $(n \geq 2)$. Тогда для последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$ условие (19) выполнено, а $\lambda_{2n_m} = (\ln 2n_m)^{\frac{1}{\alpha}}$. Таким образом, из (24) получаем

$$\ln M_F(\sigma) \geq \ln n_m + (\ln n_m)^{\frac{\mu}{\alpha}} - (\ln 2n_m)^{\frac{1}{\alpha}}\sigma \quad (\sigma > 0). \tag{25}$$

Выберем $\sigma = \sigma_m$ как решение уравнения

$$(\ln n_m)^{\frac{\mu}{\alpha}} = (\ln 2n_m)^{\frac{1}{\alpha}}\sigma. \tag{26}$$

Так как $(\ln 2n_m)^{\frac{1}{\alpha}} = (1 + o(1))(\ln n_m)^{\frac{1}{\alpha}}$ при $m \to \infty$, то из (26) следует, что при $m \to \infty$

$$\frac{1}{\sigma} = (1 + o(1))(\ln n_m)^{\frac{1-\mu}{\alpha}}. \tag{27}$$

Таким образом, учитывая (26), (27) из (25) получаем, что при $m \to \infty$

$$\ln M_F(\sigma_m) \geq \ln n_m = (1 + o(1))\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\frac{\alpha}{1-\mu}}.$$

Это означает, что $\rho_F \geq \frac{\alpha}{1-\mu}$. Но, согласно (23), $\rho_F = \frac{\mu}{1-\mu}$. Значит, если учесть предыдущую оценку, то

$$\frac{\mu}{1-\mu} \geq \frac{\alpha}{1-\mu} \quad (0 \leq \mu < 1),$$

что противоречит предположению $\mu < \alpha$. □

Пример построен.

Пусть $D(0,1)$ — круг сходимости степенного ряда (1). Для ряда Тейлора–Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ns}$$

обычный порядок ρ_F совпадает с порядком ρ функции f вида (1). Так как в данном случае $\lambda_n = n$, то

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \ln n}{\ln \lambda_n} = 0,$$

и поэтому из теоремы 1 как следствие вытекает упомянутая в самом начале формула Говорова–Маклейна–Шереметы для вычисления порядка ρ функции f, заданной в круге $D(0,1)$ рядом (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Говоров Н.В. *О связи между ростом функции, аналитической в круге, и коэффициентами ее степенного разложения* // Труды Новочеркасск. политехн. ин-та. **100**, 101–115 (1959).
2. Мак-Лейн Г. *Асимптотические значения голоморфных функций.* М.: Мир, 1966.
3. Шеремета М.Н. *О связи между ростом целых или аналитических в круге функций нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений* // Изв. вузов. Математика. **6**, 115–121 (1968).
4. Bohr H. *Collected Mathematical Works.* Copenhagen, 1952.
5. Valiron G., *Sur e'abscisse de convergence des series de Dirichlet* // S. M. F. Bull. **52**, 166–174 (1924).
6. Valiron G., *Entire functions and Borel's directions* // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. **20**, 211–215 (1934).
7. Kuniyeda M. *Uniform convergence — abscissa of general Dirichlet series* // Tohoku Math. Journ. **9**, 7–27 (1916).

8. Ritt J.F. *On certain points in the theory of Dirichlet series* // Amer. Math. J. **50**, 73–86 (1928).
9. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976.
10. Гайсин А.М. *Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуполосе* // Матем. сб. **117(159)**:3, 412–424 (1982).
11. Гайсин А.М. *Поведение суммы ряда экспонент вблизи границы области регулярности* // Матем. заметки. **48**:3, 45–53 (1990).
12. Гайсин А.М. *О росте функции, представленной рядом Дирихле, вблизи прямой сходимости* // Исследования по теории аппроксимации функций. Уфа: Башкирский филиал АН СССР. 5–13 (1981).
13. Zhendog Gu, Daochun Sun. *The growth of Dirichlet series* // Czechoslovak Mathematical Journal. **62**:1, 29–38 (2012).
14. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент для функций с определенным ростом вблизи границы* // Изв. АН СССР. Сер.матем. **44**:6, 1308–1328 (1980).
15. Юлмухаметов Р.С. *Пространство аналитических функций, имеющих заданный рост вблизи границы* // Матем. заметки. **32**:1, 41–57 (1982).
16. Гайсин А.М., Гайсина Г.А. *Поведение коэффициентов ряда экспонент конечного порядка роста вблизи границы* // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обзоры. **162**, ВИНИТИ РАН, М., 15–24 (2019).
17. Дагене Е.Я. *О центральном показателе ряда Дирихле* // Литовский мат. сб. **8**:3, 504–521 (1968).
18. Бойчук В.С. *О росте абсолютно сходящихся в полуплоскости рядов Дирихле* // Мат. сб. К.: Наукова думка. 238–240 (1976).
19. Галь Ю.М., Шеремета М.Н. *О росте аналитических в полуплоскости функций, заданных рядами Дирихле* // ДАН УССР. Сер. А. 12, 1065–1067 (1978).
20. Yu-Chia-Yung. *Sur la croissance et la repartition de Dirichlet qui ne convergent que dans un demi-plan* // Comptus rendus Acad. Sci. **AB288**:19. A891–A893 (1979).
21. Krishna Nandan. *On the maximum terms and maximum modulus analytic functions represented by Dirichlet series* // Ann. Polon. Math. **28**, 213–222 (1973).
22. Krishna Nandan. *On the lower order of analytic functions represented by Dirichlet series* // Rev. roum. math. pures et appl. **21**:10, 1361–1368 (1976).
23. Гайсин А.М. *Поведение суммы ряда Дирихле вблизи границы области регулярности.* Дисс. канд. физ.-мат. наук. Уфа, 1982.
24. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука, 1983.

Галия Ахтяровна Гайсина,
Башкирский государственный университет,
З. Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: gaisinaga@mail.ru