ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 4 (2020). С. 3-19.

УДК 517.958

# О БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ РЕЗОНАНСОВ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ АСИМПТОТИКАМИ, ПОРОЖДЕННЫХ РАЗБЕГАЮЩИМИСЯ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

**Д.И. БОРИСОВ, М.Н. КОНЫРКУЛЖАЕВА**

**Аннотация.** Рассматривается одномерный оператор Шрёдингера с четырьмя потенциалами, разнесёнными на большие расстояния друг от друга. Все расстояния пропорциональны одному большому параметру. Исходные потенциалы имеют форму кинков, которые склеиваются друг с другом таким образом, что финальный потенциал обращается в нуль на бесконечности и между вторым и третьим потенциалами, и равен единице между первым и вторым, а также между третьим и четвертым потенциалами. Потенциалы не предполагаются вещественными и могут быть комплекснозначными. Показано, что при определенных, достаточно естественных и легко реализуемых условиях на исходные четыре потенциала, оператор с разбегающимися потенциалами имеет неограниченное число резонансов и/или собственных значений вида $\lambda = k_n^2$, $n \in \mathbb{Z}$, которые накапливаются вдоль заданного отрезка существенного спектра. Расстояние между соседними числами $k_n$ есть величина порядка обратной степени расстояния между потенциала, а мнимые части этих величин экспоненциально малы. Для чисел $k_n$ получены представления в виде пределов явно вычисляемых последовательностей и сумм бесконечных рядов и доказаны явные эффективные оценки на скорость сходимости последовательностей и для остатков рядов.

**Ключевые слова:** резонанс, экспоненциальная асимптотика, разбегающиеся возмущения, несамосопряженный оператор.

**Mathematics Subject Classification:** 34L05, 34D10, 34E10

## 1. Введение

Задачи с разбегающимися возмущениями имеют давнюю историю и достаточно активно исследуются. Классическим примером оператора с разбегающимися возмущениями является оператор Шрёдингера на оси с парой разнесённых потенциалов. В более общей постановке речь идёт об эллиптических дифференциальных операторах в неограниченных периодических областях, чьи коэффициенты содержат несколько разнесённых локализованных всплесков. Данные всплески, которые соединяются между собой периодическим фоном; на разных соединениях структура такого фона может быть разной. Поведение резольвент и изолированных собственных значений на сегодняшний день исследовано достаточно подробно, результаты общего характера для общих моделей были получены в [2], [3], [10], [11], [17], [18]; более ранние результаты для отдельных частных моделей можно найти в классических работах [5], [15], [16], [19], [20], [22], [23].

Поведение резонансов для операторов с разбегающимися возмущениями изучено в гораздо меньшей степени. Для классического случая оператора Шрёдингера в трёхмерном

---

D.I. Borisov, M.N. Konyrkulzhaeva, On infinite system of resonances and eigenvalues with exponential asymptotics generated by distant perturbations.



*Поступила 2 сентября 2020 г.*

пространстве с несколькими разнесёнными потенциалами поведение резонансов исследовалось в [21]. Одномерный случай с парой локализованных возмущений общего вида, не обязательно описываемых симметричными операторами, рассматривался в недавних работах [12], [13]. Отметим ещё схожую одномерную модель с обрезанным периодическим потенциалом [6], а также её дискретный аналог в [24]. В цитированных работах было обнаружено, что при увеличении расстояний между носителями разбегающихся возмущений, у рассматриваемых операторов в окрестности края существенного спектра может возникать неограниченно много резонансов, которые локализуются вдоль некоторых кривых. При этом расстояние от этих резонансов до существенного спектра было порядка обратной степени расстояния между разнесёнными потенциалами.

В статье [9] исследовалась задача в полосе для Лапласиана, где разнесённые потенциалы заменялись на комбинацию краевых условий Дирихле и Неймана. Схожая задача, но уже в многомерном цилиндре, изучалась в [1]. В последних двух работах было показано, что из собственных значений, вложенных в непрерывный спектр, возникает конечное число резонансов, имеющих экспоненциально малые асимптотики. В работе [14] этот эффект был выявлен в общем случае для произвольного эллиптического оператора с конечным числом разбегающихся возмущений в многомерном цилиндре.

Во всех исследованных моделях в случае возникновения и накопления вдоль некоторого отрезка существенного спектра неограниченного числа резонансов и/или собственных значений асимптотики последних всегда были степенными по расстоянию между разбегающимися потенциалами [6], [12], [13], [21], [24]. Если же речь шла о возмущении собственных значений, вложенных в существенный спектр, то здесь возникало лишь конечное число резонансов с экспоненциальными асимптотиками [1], [9], [14]. В связи с этим уместно поставить естественный вопрос: верно ли, что при возникновении неограниченного числа резонансов последние всегда имеют степенное поведение по расстоянию, а в случае возникновения конечного числа резонансов соответствующие асимптотики всегда экспоненциальные? В настоящей работе мы опровергаем данную гипотезу, приводя соответствующий пример. А именно, мы рассматриваем одномерный оператор Шрёдингера с четырьмя разнесёнными потенциалами. Потенциалы имеют форму кинков, которые склеиваются таким образом, что финальный потенциал обращается в нуль на бесконечности и между вторым и третьим потенциалами, и равен единице между первым и вторым, а также между третьим и четвертым потенциалами (рис. 1 и 2). Потенциалы не предполагаются вещественными и могут быть комплекснозначными. Поэтому в окрестности существенного спектра могут возникать не только резонансы, но и собственные значения.

Наш основной результат состоит в следующем. При определенных, достаточно естественных и легко реализуемых условиях на исходные четыре потенциала, оператор с разбегающимися потенциалами имеет неограниченное число резонансов и/или собственных значений вида $\lambda = k_n^2$, $n \in \mathbb{Z}$, которые накапливаются вдоль заданного отрезка существенного спектра. Расстояние между соседними числами $k_n$ есть величина порядка степени расстояния между потенциала, а мнимые части этих величин экспоненциально малы. На основе техники работы [13] для чисел $k_n$ получены представления в виде пределов явно вычисляемых последовательностей и сумм бесконечных рядов и доказаны явные эффективные оценки на скорость сходимости последовательностей и для остатков рядов.

## 2. Модель и результаты

Пусть $x \in \mathbb{R}$ – вещественная переменная, $V_i = V_i(x)$, $i = 1, \ldots, 4$, – кусочно-непрерывные комплекснозначные потенциалы, заданные на вещественной оси и удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} &V_i(x) = 0 \quad \text{при} \quad x < -x_0, \qquad V_i(x) = 1 \quad \text{при} \quad x > x_0, \quad i = 1, 3,\\ &V_i(x) = 1 \quad \text{при} \quad x < -x_0, \qquad V_i(x) = 0 \quad \text{при} \quad x > x_0, \quad i = 2, 4, \end{aligned}$$

где $x_0$ – некоторое фиксированное положительное число. Через $\ell$ обозначим большой положительный параметр, а через $\alpha_\pm$ – некоторые фиксированные положительные числа. Определим ещё один потенциал:

$$V_\ell(x) := \begin{cases} V_1\big(x + (2\alpha_- + 1)\ell\big) & \text{при} \quad x < -(\alpha_- + 1)\ell,\\ V_2(x + \ell) & \text{при} \quad -(\alpha_- + 1)\ell < x < 0,\\ V_3(x - \ell) & \text{при} \quad 0 < x < (\alpha_+ + 1)\ell,\\ V_4\big(x - (2\alpha_+ + 1)\ell\big) & \text{при} \quad x > (\alpha_+ + 1)\ell. \end{cases} \tag{2.1}$$

Схематичный график потенциалов $V_i$ и $V_\ell$ показан на рис. 1, 2. Основная особенность потенциала $V_\ell$ состоит в том, что при росте параметра $\ell$ промежутки непостоянства функции $V_\ell$ отдаляются друг от друга, а интервалы, где потенциал $V_\ell$ равен нулю или единице, увеличиваются по длине.

В работе рассматривается оператор Шрёдингера на оси с комплекснозначным потенциалом $V_\ell$:

$$\mathcal{H}_\ell := -\frac{d^2}{dx^2} + V_\ell.$$

Данный оператор рассматривается как неограниченный в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ на области определения $W_2^2(\mathbb{R})$. Он, очевидно, замкнут, а в случае вещественного потенциала $V_\ell$ ещё и самосопряжён. Основной целью работы является изучение поведения резонансов и собственных значений данного оператора при $\ell \to +\infty$.

Резонансы и собственные значения оператора $\mathcal{H}_\ell$ определим как значения $\lambda = k^2$, $k \in \mathbb{C}$, при которых уравнение

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_\ell\right)\psi = \lambda\psi \quad \text{в} \quad \mathbb{R} \tag{2.2}$$

имеет нетривиальное решение со следующим поведением на бесконечности:

$$\psi(x) = c_\pm e^{\pm \mathrm{i}kx}, \qquad x \to \pm\infty, \tag{2.3}$$

где $c_\pm$ – некоторые константы. Последние равенства очевидно согласованы с определением потенциала $V_\ell$, так как последний, по определению, обращается в нуль при $x < -\alpha_-\ell - x_0$ и $x > \alpha_+\ell + x_0$. При $\operatorname{Im} k > 0$ соотношения (2.3) описывают экспоненциально убывающее на бесконечности решение уравнения (2.2). Это решение является собственной функцией, соответствующей собственному значению $\lambda = k^2$. Если же $\operatorname{Im} k \leqslant 0$, то соотношения (2.3) описывают экспоненциально растущее либо неубывающее осциллирующее на бесконечности решение, и в этом случае величина $\lambda = k^2$ является резонансом. Отметим ещё, что данное определение резонанса эквивалентно определению последнего как полюса подходящего аналитического продолжения резольвенты через существенный спектр [25].

Для формулировки основных результатов нам понадобятся некоторые вспомогательные обозначения. Начнём с функций типа Йоста для потенциалов $V_i$, $i = 1, \ldots, 4$. А именно, через $X_i = X_i(x, k)$, $i = 1, \ldots, 4$, обозначим решения уравнений

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_j(x) - k^2\right)X_j = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R} \tag{2.4}$$

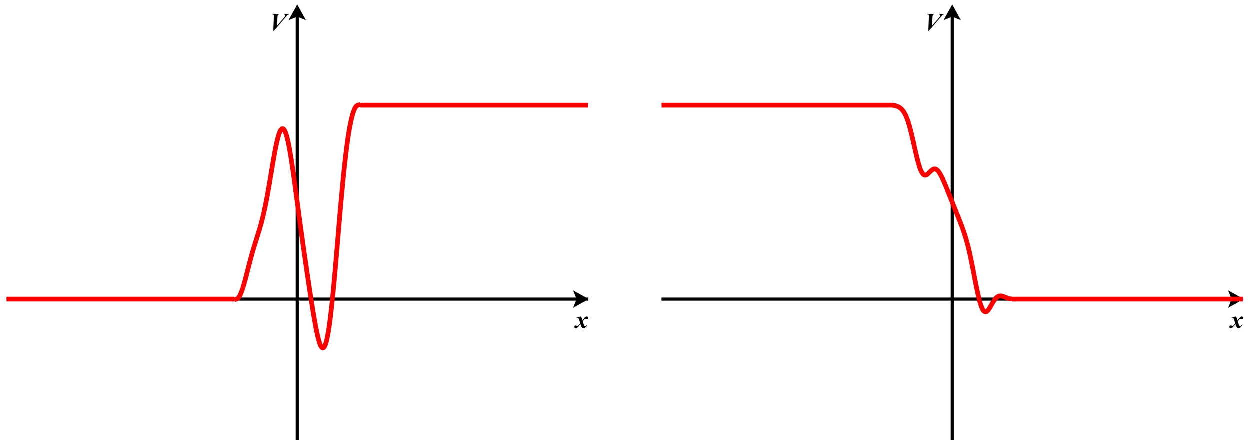


Рис. 1. Схематичные графики потенциалов $V_1$, $V_3$ на левом рисунке и потенциалов $V_2$, $V_4$ на правом рисунке

со следующим поведением на бесконечности:

$$\begin{aligned} &X_j(x,k)=e^{-\mathrm{i}kx} &&\text{при}\quad x<-x_0,\\ &X_j(x,k)=a_j(k)e^{-\sqrt{1-k^2}x}+b_j(k)e^{\sqrt{1-k^2}x} &&\text{при}\quad x>x_0, \end{aligned}\tag{2.5}$$

для $j=1,3$, и

$$\begin{aligned} &X_j(x,k)=e^{\mathrm{i}kx} &&\text{при}\quad x>x_0,\\ &X_j(x,k)=a_j(k)e^{-\sqrt{1-k^2}x}+b_j(k)e^{\sqrt{1-k^2}x} &&\text{при}\quad x<-x_0, \end{aligned}\tag{2.6}$$

для $j=2,4$. Здесь $a_j=a_j(k)$, $b_j=b_j(k)$ – некоторые функции, а ветвь корня выбирается из условия $\sqrt{1}=1$. Комплексный параметр $k$ считаем меняющимся по комплексной плоскости с парой разрезов вдоль двух вещественных полуосей, а именно,

$$k\in\Xi:=\mathbb{C}\setminus\{k:\ \pm k\in[1,+\infty)\}.$$

Обозначим:

$$f(k):=\frac{a_2(k)b_3(k)}{a_2(-k)b_3(-k)}.$$

Всюду в работе предполагается выполнение следующего условия: существует отрезок $[\beta_-,\beta_+]\in(-1,1)$ такой, что выполнены неравенства

$$a_2(-k)\neq0,\qquad b_1(k)\neq0,\qquad b_3(-k)\neq0,\qquad a_4(k)\neq0\quad\text{при}\quad k\in[\beta_-,\beta_+]\tag{2.7}$$

и равенство

$$|f(k)|=1\quad\text{при}\quad k\in[\beta_-,\beta_+].\tag{2.8}$$

Положим:

$$\varkappa_n(\ell):=\frac{\pi n}{2\ell},\qquad n\in\mathbb{Z}.$$

Через $h^{[m]}$ обозначим $m$-кратную суперпозицию функции $h$, т.е. $h^{[m]}:=\underbrace{h\circ h\circ\cdots\circ h}_{m\ \text{раз}}$, где символ $\circ$ обозначает суперпозицию функций, а именно, $h\circ g=h(g)$.

Существенный спектр оператора $\mathcal{H}_\ell$ определим в терминах характеристических последовательностей, т.е. комплексное число $\lambda$ попадает в существенный спектр $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{H}_\ell)$ оператора $\mathcal{H}_\ell$, если существует последовательность $u_n$ из области определения этого оператора, ограниченная и некомпактная в $L_2(\mathbb{R})$, такая что $(\mathcal{H}_\ell-\lambda)u_n\to0$ при $n\to+\infty$. Очевидно, что при таком определении существенный спектр оператора $\mathcal{H}_\ell$ совпадает с неотрицательной полуосью:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{H}_\ell)=[0,+\infty).\tag{2.9}$$

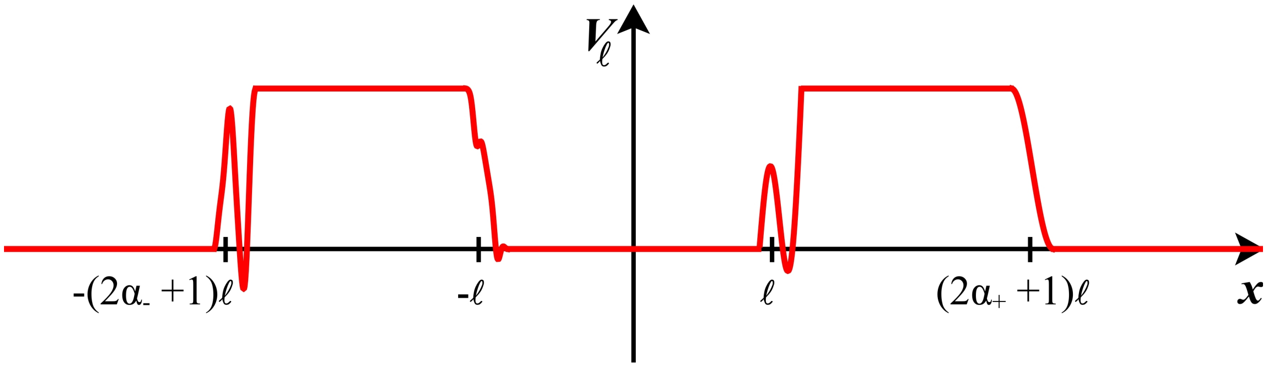


Рис. 2. Схематичные графики потенциала $V_\ell$

В четвёртом параграфе будет доказана следующая вспомогательная лемма.

**Лемма 2.1.** *Пусть выполнены условия (2.7), (2.8). В комплексной плоскости существует фиксированная односвязная окрестность $\Omega$ отрезка $[\beta_-,\beta_+]$, такая что функция*

$$h(k) := -\frac{\mathrm{i}}{4}\ln f(k) \tag{2.10}$$

*однолистна и голоморфна по $k\in\overline{\Omega}$, а также вещественна при $k\in[\beta_-,\beta_+]$. При достаточно больших $\ell$ уравнение*

$$e^{4\mathrm{i}k\ell}=f(k) \tag{2.11}$$

*имеет серию корней $k=K_n(\ell)$, где целочисленный параметр $n$ меняется по множеству $M_\ell$,*

$$M_\ell:=\{n\in\mathbb{Z}:\ \varkappa_n(\ell)\in I_\ell\}\,,\qquad I_\ell:=[\beta_- -\ell^{-1}h(\beta_-),\beta_+ -\ell^{-1}h(\beta_+)]. \tag{2.12}$$

*Эти корни представляются пределами*

$$K_n(\ell)=\varkappa_n(\ell)+\lim_{m\to+\infty}h_n^{[m]}(0,\ell),\qquad h_n(k,\ell):=\ell^{-1}h\big(k+\varkappa_n(\ell)\big), \tag{2.13}$$

*и суммами рядов*

$$K_n(\ell)=\varkappa_n(\ell)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!\ell^m}\frac{d^{m-1}h^m}{dk^{m-1}}(\varkappa_n(\ell))=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!\ell^m}\frac{d^{m-1}\big(\varkappa_n(\ell)+h\big)^m}{dk^{m-1}}(0). \tag{2.14}$$

*Верны оценки*

$$\big|K_n(\ell)-\varkappa_n(\ell)-h_n^{[m]}(0,\ell)\big|\leqslant M(M')^m\ell^{-m-1}, \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}\left|K_n(\ell)-\varkappa_n(\ell)-\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m!\ell^m}\frac{d^{m-1}h^m}{dk^{m-1}}(\varkappa_n(\ell))\right|&\leqslant\frac{1}{(p+1)!\ell^{p+1}}\max_{k\in\overline{\Omega_\ell}}\left|\frac{d^ph^{p+1}}{dk^p}(k)\right|\\&\leqslant\frac{|\partial\Omega|}{2\pi(p+1)}\left(\frac{M}{\rho\ell}\right)^{p+1},\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}&\left|K_n(\ell)-\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{(p+1)!\ell^{p+1}}\frac{d^{m-1}\big(\varkappa_n(\ell)+h\big)^m}{dk^{m-1}}(0)\right|\\&\qquad\leqslant\frac{1}{(p+1)!\ell^{p+1}}\max_{\overline{\Omega_\ell}}\left|\frac{d^p}{dk^p}\big(\varkappa_n(\ell)+h(k)\big)^{p+1}\right|\\&\qquad\leqslant\frac{|\partial\Omega|}{2\pi(p+1)}\left(\frac{M+\beta+1}{\rho\ell}\right)^{p+1},\end{aligned} \tag{2.17}$$

*где обозначено*

$$M:=\max_{k\in\overline{\Omega}}|h(k)|,\qquad M':=\max_{k\in\overline{\Omega}}|h'(k)|,$$

$$\rho:=\operatorname{dist}(\partial\Omega,[\beta_-,\beta_+])-M\ell^{-1},\qquad \beta:=\max\{|\beta_-|,|\beta_+|\},\qquad \alpha:=\min\{\alpha_-,\alpha_+\}.$$

Пусть $N(\ell)$ – число элементов во множестве $M_\ell$, и положим

$$\varkappa_{min}(\ell):=\min_{n\in M_\ell}\varkappa_n(\ell),\qquad \varkappa_{max}(\ell):=\max_{n\in M_\ell}\varkappa_n(\ell),$$

$$\Pi_\ell:=\left\{k\in\Omega:\ \varkappa_{min}(\ell)-\frac{\pi}{4\ell}\leqslant \operatorname{Re}k\leqslant \varkappa_{max}(\ell)+\frac{\pi}{4\ell}\right\}.$$

Определим функции:

$$\begin{aligned} g(k,\ell):=&\,g_-(k,\ell)e^{-4\alpha_-\sqrt{1-k^2}\ell}+g_+(k,\ell)e^{-4\alpha_+\sqrt{1-k^2}\ell}\\ &+g_-(k,\ell)g_+(k,\ell)e^{-4(\alpha_-+\alpha_+)\sqrt{1-k^2}\ell}, \end{aligned}\tag{2.18}$$

$$g_-(k,\ell):=-\frac{\mathrm{i}k}{\sqrt{1-k^2}}\cdot\frac{a_1(k)}{a_2(k)\big(a_2(-k)b_1(k)-b_2(-k)a_1(k)e^{-4\alpha_-\sqrt{1-k^2}\ell}\big)},$$

$$g_+(k,\ell):=-\frac{\mathrm{i}k}{\sqrt{1-k^2}}\cdot\frac{b_4(k)}{b_3(k)\big(b_3(-k)a_4(k)-a_3(-k)b_4(k)e^{-4\alpha_+\sqrt{1-k^2}\ell}\big)},$$

$$G(k,l):=-\frac{\mathrm{i}}{4\ell}\ln\big(1+g(k,\ell)\big),\tag{2.19}$$

$$L(k,\ell):=\ell^{-1}h(k)+G(k,\ell),\qquad L_n(z,\ell):=L\big(z+\varkappa_n(\ell),\ell\big),\tag{2.20}$$

где ветвь логарифма выбирается из условия $\ln 1=0$.

Наши основные результаты выглядят следующим образом.

**Теорема 2.1.** *Пусть выполнены условия (2.7), (2.8). Тогда при достаточно больших $\ell$ оператор $\mathcal{H}_\ell$ имеет ровно $N(\ell)$ собственных значений/резонансов $\lambda=k_n^2(\ell)$, $n\in M_\ell$, в области $\Pi_\ell$. Каждая величина $k_n(\ell)$ представляется пределом*

$$k_n(\ell)=\varkappa_n(\ell)+\lim_{m\to+\infty}L_n^{[m]}(0,\ell)\tag{2.21}$$

*и суммами рядов*

$$k_n(\ell)=\varkappa_n(\ell)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{d^{m-1}L^m}{dk^{m-1}}(\varkappa_n(\ell),\ell)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{d^{m-1}\big(\varkappa_n+L\big)^m}{dk^{m-1}}(0,\ell).\tag{2.22}$$

*Оба ряда сходятся абсолютно равномерно по $\ell^{-1}$. Верны оценки:*

$$\big|k_n(\ell)-\varkappa_n(\ell)-L_n^{[m]}(0,\ell)\big|\leqslant C_0\left(\frac{M+1}{\rho\ell}\right)^{m+1},\tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}\left|k_n(\ell)-\varkappa_n(\ell)-\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m!}\frac{d^{m-1}L^m}{dk^{m-1}}(\varkappa_n(\ell),\ell)\right|\leqslant&\frac{1}{(p+1)!}\max_{k\in\overline{\Omega}_\ell}\left|\frac{d^pL^{p+1}}{dk^p}(k,\ell)\right|\\ \leqslant&\frac{|\partial\Omega|}{2\pi(p+1)}\left(\frac{M+1}{\rho\ell}\right)^{p+1},\end{aligned}\tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}\left|k_n(\ell)-\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m!}\frac{d^{m-1}(\varkappa_n(\ell)+L\big)^m}{dk^{m-1}}(0,\ell)\right|\leqslant&\frac{1}{(p+1)!}\max_{k\in\overline{\Omega}_\ell}\left|\frac{d^p\big(\varkappa_n+L\big)^m}{dk^p}(k,\ell)\right|\\ \leqslant&\frac{|\partial\Omega|}{2\pi(p+1)}\left(\frac{M+\beta+1}{\rho\ell}\right)^{p+1},\end{aligned}\tag{2.25}$$

*где $C_0$ – некоторая константа, не зависящая от $\ell$, $m$ и $n$.*

Обозначим:

$$P_n(z,\ell) := \left(1 - \ell^{-1}\frac{h\big(z+K_n(\ell)\big) - h\big(K_n(\ell)\big)}{z}\right)^{-1} G\big(z+K_n(\ell),\ell\big). \tag{2.26}$$

**Теорема 2.2.** *Пусть выполнены условия (2.7), (2.8). Тогда для резонансов/собственных значений $\lambda = k_n^2(\ell)$, $n \in M_\ell$, оператора $\mathcal{H}_\ell$ в области $\Pi_\ell$, описанных в теореме 2.1, справедливы представления*

$$k_n(\ell) = K_n(\ell) + \lim_{m\to+\infty} P_n^{[m]}(0,\ell), \tag{2.27}$$

$$k_n(\ell) = K_n(\ell) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}\frac{d^{m-1}P_n^m}{dz^{m-1}}(0,\ell). \tag{2.28}$$

*Последний ряд сходится абсолютно равномерно по $\ell^{-1}$. Верны оценки:*

$$\left|k_n(\ell) - K_n(\ell) - P_n^{[m]}(0,\ell)\right| \leqslant C_1 C_2^{m+1} e^{-4(m+1)\alpha\kappa\ell}, \tag{2.29}$$

$$\left|k_n(\ell) - K_n(\ell) - \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m!}\frac{d^{m-1}P_n^m}{dz^{m-1}}(0,\ell)\right| \leqslant \frac{|\partial\Omega|}{2\pi(p+1)} C_2^{p+1} e^{-4(p+1)\alpha\kappa\ell}, \tag{2.30}$$

*где $C_1$, $C_2$ – некоторые константы, не зависящие от $\ell$, $p$, $m$ и $n$, а константа $\kappa$ определяется равенством:*

$$\kappa := \min_{k\in\overline{\Omega}} \operatorname{Re}\sqrt{1-k^2} > 0. \tag{2.31}$$

## 3. Обсуждение результатов

Обсудим модель и основные результаты. Потенциал $V_\ell$ составлен из четырёх разбегающихся возмущений, каждое из которых описывается потенциалом $V_i$, $i = 1,\ldots,4$. Потенциалы разнесены на расстояния порядка $\ell$ (см. рис. 2). При этом финальный потенциал $V_\ell$ равен нулю при $x < -(\alpha_- + 1)\ell - x_0$ и $x > (\alpha_+ + 1)\ell + x_0$. Это обеспечивает равенство (2.9). Основная же особенность потенциала состоит в том, что он обращается в нуль ещё и при $-\ell + x_0 < x < \ell - x_0$. Именно последнее обстоятельство приводит к возникновению серии резонансов/собственных значений $\lambda = k_n^2(\ell)$, $n \in M_\ell$; данное число $\lambda$ является резонансом, если $\operatorname{Im} k_n(\ell) \leqslant 0$, и собственным значением, если $\operatorname{Im} k_n(\ell) > 0$. Подчеркнём, что собственные значения могут возникать в связи с отсутствием вещественности потенциала $V_\ell$, что делает оператор $\mathcal{H}_\ell$ несамосопряжённым. В случае вещественного потенциала $V_\ell$ и самосопряжённого оператора $\mathcal{H}_\ell$ числа $k_n(\ell)$ могут соответствовать исключительно резонансам.

Механизм возникновения таких резонансов/собственных значений в целом тот же, что и в работах [6], [12], [13]; с физической точки зрения имеется выраженная аналогия с интерферометром Фабри-Перо. А именно, нетривиальные решения уравнения (2.2) осциллируют в зоне $-\ell + x_0 < x < \ell - x_0$, где потенциал $V_\ell$ равен нулю, и экспоненциально малы в соседних зонах $-(2\alpha_- + 1)\ell + x_0 < x < -\ell - x_0$ и $\ell + x_0 < x < (2\alpha_+ + 1)\ell - x_0$, где потенциал равен единице. Поэтому при больших $\ell$ эти нетривиальные решения аппроксимируются в средней зоне $-\ell + x_0 < x < \ell - x_0$ собственными функциями задачи Дирихле для оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[-\ell,\ell]$. Собственные значения последнего оператора как даются числами $\varkappa_n^2(\ell)$, что и объясняет участие этих чисел в качестве главных членов в равенствах (2.21), (2.22).

В работах [6], [12], [13] резонансы/собственные значения возникали вдоль некоторого отрезка существенного спектра; для большинства из них расстояния до этого отрезка были порядка $\ell^{-1}$. Расстояния между возникающими резонансами/собственными значениями также были порядка $\ell^{-1}$ и при росте параметра $\ell$ их общее количество возрастало; при этом они накапливались вдоль упомянутого отрезка. Следует отметить, что строгий анализ расположения возникающих резонансов/собственных значений был сделан лишь в работах [13], [12]; фактически было доказано существование некоторого отрезка существенного спектра, вдоль которого идёт процесс возникновения.

В нашем случае ситуация в целом похожа, но имеется пара принципиальных отличий. Первое из них состоит в том, что отрезок существенного спектра, вдоль которого происходит возникновение и накопление резонансов/собственных значений, выбирается априорно и достаточно произвольным образом – это отрезок $[\beta_-,\beta_+]$, задаваемый в терминах переменной $k$, который в терминах переменной $\lambda$ принимает вид $\Lambda := \{\lambda : \lambda = k^2,\, k \in [\beta_-,\beta_+]\}$. При этом условия (2.7), (2.8) не влияют на сам факт возникновения резонансов/собственных значений и в отсутствии таких условий картина была бы аналогична работам [12], [13], причём возникновение происходило бы вдоль отрезка $\Lambda$. Условия (2.7), (2.8) обеспечивают второе принципиальное отличие – мнимые части *всех* величин $k_n(\ell)$ *экспоненциально малы* по $\ell$. Остановимся на втором отличии подробнее.

Теорема 2.1 устанавливает сам факт возникновения и накопления резонансов/собственных значений. А именно, утверждается существование набора соответствующих значений $k_n(\ell)$, $n \in M_\ell$ вдоль заданного отрезка $[\beta_-,\beta_+]$. Данные величины представляются либо пределами (2.21), либо рядами (2.22). Оценки (2.23), (2.24), (2.25) показывают точность аппроксимации величин $k_n$ отдельными членами последовательности из (2.21) и частичными суммами рядов из (2.22). В частности, из оценки (2.24) следует, что величины $k_n(\ell)$ находятся в окрестностях чисел $\varkappa_n(\ell)$ и размеры этих окрестностей порядка $\ell^{-1}$. Вместе с тем, формулы (2.21), (2.22) не дают явного ответа о том, насколько малы мнимые части величин $k_n(\ell)$, так как фактически необходимо, например, анализировать мнимые части каждого члена рядов в (2.22), являющиеся степенными по $\ell^{-1}$. Этот вопрос эффективно решается в теореме 2.2. А именно, здесь приводятся аналогичные (2.21), (2.22) представления (2.27), (2.28) для разностей $k_n(\ell) - K_n(\ell)$, где $K_n$ – *вещественные корни* уравнения (2.11). Функция $P_n$ экспоненциально мала при больших $\ell$ благодаря наличию множителя $G$, так как из (2.18), (2.20) следует, что для функций $G$ и $P_n$ верны оценки

$$|G(k,\ell)| \leqslant C\ell^{-1}e^{-4\alpha\kappa\ell}, \qquad |P_n(k,\ell)| \leqslant C\ell^{-1}e^{-4\alpha\kappa\ell},$$

где $C$ – некоторые константы, не зависящие от $k$, $\ell$ и $n$. Аналогичные оценки верны и для всех производных этих функций. Ввиду неравенств (2.30) это означает, что все члены ряда (2.28) *экспоненциально малы* по $\ell$. Следовательно, числа $k_n(\ell)$ накапливаются вдоль отрезка $[\beta_-,\beta_+]$ на экспоненциально малых расстояниях, при этом расстояния между ними порядка $\ell^{-1}$. Отсюда следует, что мнимые части величин $k_n(\ell)$ экспоненциально малы. В частности, выполнены равенства

$$\begin{gathered} G(k,\ell) = -\frac{\mathrm{i}}{4\ell}g(k,\ell) + O\big(\ell^{-1}|g(k,\ell)|^2\big) = g_0(k,\ell) + O\big(e^{-8\alpha\sqrt{1-k^2}\ell}\big), \\ g_0(k,\ell) := -\frac{k}{4\ell\sqrt{1-k^2}}\left(\frac{a_1(k)e^{-4\alpha_-\sqrt{1-k^2}\ell}}{a_2(k)a_2(-k)b_1(k)} + \frac{b_4(k)e^{-4\alpha_+\sqrt{1-k^2}\ell}}{b_3(k)b_3(-k)a_4(k)}\right), \end{gathered}$$

и из оценки (2.30) с достаточно большим $p$, выбранным из условия

$$(p+1)\kappa > 2\sqrt{1-\beta^2},$$

следует, что

$$k_n(\ell) = K_n(\ell) + g_0\big(K_n(\ell),\ell\big) + O\big(e^{-8\alpha\sqrt{1-K_n^2(\ell)}\ell}\big),$$

где оценка остатка равномерна по $\ell$ и $n$. В силу определения функции $g_0$, второе слагаемое в правой части приведённого равенства экспоненциально мало при больших $\ell$.

Следует подчеркнуть, что условия (2.7), (2.8) не являются жёсткими и легко реализуются. Например, условие (2.8) автоматически выполняется в случае частичной вещественности потенциала $V_\ell$, а именно, если потенциалы $V_2$ и $V_3$ вещественны. В этом случае очевидно выполнены равенства

$$a_2(-k) = \overline{a_2(k)}, \qquad b_3(-k) = \overline{b_3(k)},$$

которые обеспечивают выполнение условия (2.8) для всех вещественных значений $k$. Выполнения условия (2.7) при произвольных потенциалах $V_i$ также легко добиться за счёт подбора подходящего отрезка $[\beta_-, \beta_+]$ – функции $a_i$, $b_i$ являются голоморфными, см. пятый параграф, а потому не могут тождественно обращаться в нуль.

Предположим, что функция $f$ удовлетворяет условию (2.8) на некотором отрезке $[\beta_-, \beta_+]$, а на большем отрезке $[\tilde\beta_-, \tilde\beta_+]$ вне $[\beta_-, \beta_+]$ это условие нарушается. Тогда можно показать, что в этом случае у оператора $\mathcal{H}_\ell$ имеется серия собственных значений/резонансов с экспоненциальными асимптотиками, накапливающихся вдоль отрезка $[\beta_-, \beta_+]$ и описанных в теоремах 2.1, 2.2, а также серию собственных значений/резонансов, которые накапливаются вдоль множества $[\tilde\beta_-, \tilde\beta_+] \setminus [\beta_-, \beta_+]$ и обладающие уже степенным поведением по $\ell^{-1}$, как это было описано в работах [12], [13]. Таким образом, возможно реализовать ситуацию, когда оператор с разбегающимися возмущениями имеет неограниченное число резонансов/собственных значений как со степенными, так и экспоненциально малыми мнимыми частями.

Отметим ещё, что диапазон значений $\ell$, для которых выполнено утверждение леммы 2.1 и теорем 2.1, 2.2, может быть указан достаточно явно. А именно, представление (2.13) и оценки (2.15) верны при

$$\ell > M'. \tag{3.1}$$

Сходимость первого ряда в (2.14) и выполнение оценок (2.16) обеспечивается неравенством $\rho\ell > M$. Второй ряд в (2.14) и оценки (2.17) гарантированы при $\rho\ell > M + \beta + 1$. Все эти условия очевидным образом следуют из оценок (2.15), (2.16), (2.17). Схожая ситуация и в утверждении теоремы 2.1; здесь диапазон значений $\ell$ определяется неравенствами

$$|L(k,\ell)| \leqslant (M+1)\ell^{-1}, \quad k \in \overline{\Omega}, \qquad \rho\ell > M+1,$$

Это гарантирует справедливость (2.21), первое равенство в (2.22) и оценки (2.23), (2.24). Второе равенство в (2.22) и оценки (2.25) выполнены, лишь только дополнительно предполагается, что $\rho\ell > M + \beta + 1$. И, наконец, утверждение теоремы 2.2 верно при $\ell$, удовлетворяющих неравенствам

$$\ell > M', \qquad |G(k,\ell)| \leqslant C_2 e^{-4\alpha\kappa\ell} < 1 - M'\ell^{-1}, \qquad \rho\ell > C_2.$$

## 4. Уравнение на резонансы и собственные значения

Нетривиальные решения уравнения (2.2), удовлетворяющие условиям (2.3), легко строятся явно в терминах функций $X_i$. А именно, если $\psi$ – такое нетривиальное решение, то ясно, что $c_\pm \neq 0$, так как иначе функция $\psi$ оказывалась бы тождественно равной нулю при $\pm x > x_0$, откуда уже немедленно следует, что $\psi$ тождественно обращается в нуль всюду на $\mathbb{R}$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $c_- = 1$. Ввиду определения потенциала $V_\ell$ тогда сразу заключаем, что

$$\psi(x,k,\ell) = X_1\big(x + (2\alpha_- + 1)\ell, k\big), \qquad x \leqslant -(\alpha_- + 1)\ell. \tag{4.1}$$

При $x > -(\alpha_- + 1)\ell + x_0$, в силу (2.5) выполнено:

$$X_1\big(x + (2\alpha_- + 1)\ell, k\big) = a_1(k) e^{-(2\alpha_- + 1)\sqrt{1-k^2}\ell} e^{-\sqrt{1-k^2}x} + b_1(k) e^{(2\alpha_- + 1)\sqrt{1-k^2}\ell} e^{\sqrt{1-k^2}x}. \tag{4.2}$$

Пусть $k\neq 0$. Тогда в силу равенств (2.6) функции $X_2(x,k)$ и $X_2(x,-k)$ линейно независимы и потому дают фундаментальную систему решений уравнения (2.4). Поэтому в силу определения (2.1) потенциала $V_\ell$, при $-(2\alpha_-+1)<\ell<x<0$ функция $\psi$ имеет вид

$$\psi(x,k,\ell)=A_2(k,\ell)X_2(x+\ell,k)+B_2(k,\ell)X_2(x+\ell,-k), \tag{4.3}$$

где $A_2=A_2(k,\ell)$ и $B_2=B_2(k,\ell)$ – некоторые константы. Согласно (2.6), при $x<-\ell-x_0$ также выполнено

$$X_2(x+\ell,\pm k)=a_2(\pm k)e^{-\sqrt{1-k^2}\ell}e^{-\sqrt{1-k^2}x}+b_2(\pm k)e^{\sqrt{1-k^2}\ell}e^{\sqrt{1-k^2}x}. \tag{4.4}$$

Подставляя эти соотношения в (4.3) и сравнивая результат с (4.2), видим, что требуемая гладкость функции $\psi$ эквивалентна выполнению следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
&a_1(k)e^{-(2\alpha_-+1)\sqrt{1-k^2}\ell}=\big(a_2(k)A_2(k,\ell)+a_2(-k)B_2(k,\ell)\big)e^{-\sqrt{1-k^2}\ell},\\
&b_1(k)e^{(2\alpha_-+1)\sqrt{1-k^2}\ell}=\big(b_2(k)A_2(k,\ell)+b_2(-k)B_2(k,\ell)\big)e^{\sqrt{1-k^2}\ell}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Эти соотношения однозначно определяют константы $A_2(k)$ и $B_2(k)$ при условии

$$\begin{vmatrix} a_2(k) & a_2(-k)\\ b_2(k) & b_2(-k)\end{vmatrix}\neq 0. \tag{4.6}$$

Докажем это неравенство. Сначала отметим, что в силу уравнения (2.4) вронскиан функций $X_2(x,-k)$ и $X_2(x,k)$ не обращается в нуль и не зависит от $x$. Вычисляя этот вронскиан при достаточно больших положительных и отрицательных $x$ на основе соотношений (2.6), получаем:

$$\begin{aligned}
2ik=&\sqrt{1-k^2}\left(\begin{vmatrix} a_2(-k) & b_2(k)\\ -a_2(-k) & b_2(k)\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_2(k) & b_2(-k)\\ -a_2(k) & b_2(-k)\end{vmatrix}\right)\\
=&-2\sqrt{1-k^2}\begin{vmatrix} a_2(k) & a_2(-k)\\ b_2(k) & b_2(-k)\end{vmatrix},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

откуда уже вытекает неравенство (4.6). Константы $A_2(k,\ell)$ и $B_2(k,\ell)$ теперь находятся однозначно по формулам:

$$\begin{aligned}
A_2(k,\ell):=&\,\mathrm{i}\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}\big(b_2(-k)a_1(k)e^{-2\alpha_-\sqrt{1-k^2}\ell}-a_2(-k)b_1(k)e^{2\alpha_-\sqrt{1-k^2}\ell}\big),\\
B_2(k,\ell):=&\,\mathrm{i}\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}\big(a_2(k)b_1(k)e^{2\alpha_-\sqrt{1-k^2}\ell}-b_2(k)a_1(k)e^{-2\alpha_-\sqrt{1-k^2}\ell}\big).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Отметим ещё, что согласно формулам (2.6), при $-\ell+x_0<x<0$ функция равенство (4.3) принимает следующий вид:

$$\psi(x,k,\ell)=A_2(k,\ell)e^{\mathrm{i}k\ell}e^{\mathrm{i}kx}+B_2(k,\ell)e^{-\mathrm{i}k\ell}e^{-\mathrm{i}kx}. \tag{4.9}$$

Определим теперь вид функции $\psi(x)$ при $x>0$. Согласно (2.3) и определению потенциала $V_\ell$, при $x>(2\alpha_++1)\ell+x_0$ функция $\psi$ должна иметь вид

$$\psi(x,k)=c_+e^{ikx},\qquad c_+\neq 0,$$

а потому в силу определения функции $X_4$ аналогично (4.1) сразу заключаем, что

$$\psi(x,k,\ell)=c_+X_4\big(x-(2\alpha_++1)\ell,k\big).$$

Аналогично (4.3), (4.4), (4.5), отсюда и из (2.5) получаем, что

$$\psi(x)=c_+\Big(A_3(k,\ell)X_3(x-\ell,k)+B_3(k,\ell)X_3(x-\ell,-k)\Big)\quad\text{при}\quad 0<x<\alpha_+\ell,$$

где $A_3 = A_3(k,\ell)$ и $B_3 = B_3(k,\ell)$ являются решением системы линейных уравнений

$$a_4(k)e^{(2\alpha_+ +1)\sqrt{1-k^2}\ell} = \big(a_3(k)A_3(k,\ell) + a_3(-k)B_3(k,\ell)\big)e^{\sqrt{1-k^2}\ell},$$
$$b_4(k)e^{-(2\alpha_+ +1)\sqrt{1-k^2}\ell} = \big(b_3(k)A_3(k,\ell) + b_3(-k)B_3(k,\ell)\big)e^{-\sqrt{1-k^2}\ell}.$$

Аналог равенства (4.7) здесь выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} -2ik =& \sqrt{1-k^2}\left(\begin{vmatrix} a_3(-k) & b_3(k) \\ -a_3(-k) & b_3(k)\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_3(k) & b_3(-k) \\ -a_3(k) & b_3(-k)\end{vmatrix}\right) \\ =& -2\sqrt{1-k^2}\begin{vmatrix} a_3(k) & a_3(-k) \\ b_3(k) & b_3(-k)\end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

а формулы для коэффициентов $A_3$, $B_3$ таковы:

$$\begin{aligned} A_3(k) &:= -\mathrm{i}\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}\big(b_3(-k)a_4(k)e^{2\alpha_+\sqrt{1-k^2}\ell} - a_3(-k)b_4(k)e^{-2\alpha_+\sqrt{1-k^2}\ell}\big), \\ B_3(k) &:= -\mathrm{i}\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}\big(a_3(k)b_4(k)e^{-2\alpha_+\sqrt{1-k^2}\ell} - b_3(k)a_4(k)e^{2\alpha_+\sqrt{1-k^2}\ell}\big). \end{aligned} \tag{4.11}$$

При $0 < x < \ell - x_0$ функция $\psi$ принимает вид:

$$\psi(x,k,\ell) = c_+\Big(A_3(k,\ell)e^{\mathrm{i}k\ell}e^{-\mathrm{i}kx} + B_3(k,\ell)e^{-\mathrm{i}k\ell}e^{\mathrm{i}kx}\Big). \tag{4.12}$$

В точке $x = 0$ функция $\psi$ должна быть непрерывна и иметь непрерывную производную. Эти условия проверяются на основе равенств (4.9), (4.12). Ясно, что тем самым определяется константа $c_+$ в (4.12) и возникает дополнительное уравнение на функции $A_2$, $B_2$, $A_3$, $B_3$:

$$A_2(k,\ell)A_3(k,\ell)e^{2\mathrm{i}k\ell} = B_2(k,\ell)B_3(k,\ell)e^{-2\mathrm{i}k\ell}. \tag{4.13}$$

Последнее уравнение определяет резонансы и собственные значения оператора $\mathcal{H}_\ell$. Хотя это уравнение было выведено в предположении $k \neq 0$, оно пригодно и для определения резонансов и собственных значений в точке $k = 0$. При этом формулы (4.9), (4.12) следует понимать в смысле предела при $k \to 0$.

Исследование разрешимости полученного уравнения и поведение его корней при больших значениях $\ell$ будет проведено в следующем параграфе.

## 5. Исследование уравнения на собственные значения и резонансы

В настоящем параграфе мы исследуем уравнение (4.13) и доказываем теоремы 2.1, 2.2. Вначале подставим выражения (4.8), (4.11) в это уравнение и перепишем его следующим образом:

$$e^{4\mathrm{i}k\ell} = F(k,\ell), \tag{5.1}$$

где обозначено

$$F(k,\ell) := \frac{a_2(k)b_1(k) - b_2(k)a_1(k)e^{-4\alpha_-\sqrt{1-k^2}\ell}}{a_2(-k)b_1(k) - b_2(-k)a_1(k)e^{-4\alpha_-\sqrt{1-k^2}\ell}} \cdot \frac{b_3(k)a_4(k) - a_3(k)b_4(k)e^{-4\alpha_+\sqrt{1-k^2}\ell}}{b_3(-k)a_4(k) - a_3(-k)b_4(k)e^{-4\alpha_+\sqrt{1-k^2}\ell}}.$$

Далее нам понадобится гладкость функций $a_i$ и $b_i$ по $k$. Переписывая стандартным образом уравнения (2.4) и условия (2.5) к интегральным уравнениям Вольтерра, легко проверить, что функции $a_i$ и $b_i$ голоморфны по $k \in \Xi$. Кроме того, в силу определения функции $k \mapsto \sqrt{1-k^2}$ выполнено

$$\operatorname{Re}\sqrt{1-k^2} > 0, \qquad k \in \Xi.$$

Пусть $\Omega$ – некоторая фиксированная открытая окрестность отрезка $[\beta_-, \beta_+]$ в комплексной плоскости, причём считаем, что $\overline{\Omega} \subset \Xi$. Тогда ясно, что окрестность $\Omega$ отделена от границ множества $\Xi$ на положительное расстояние, откуда следует положительность константы $\varkappa$ из (2.31).

Из голоморфности функций $a_j$ и $b_j$ по $k \in \overline{\Omega}$ и условия (2.7) вытекает, что функция $f(k)$ голоморфна по $k \in \overline{\Omega}$, если окрестность $\Omega$ не слишком велика. С учётом неравенства (2.31) также заключаем, что функции $F(k,\ell)$ и $g(k,\ell)$ голоморфны по $k \in \overline{\Omega}$ и выполнены равномерные оценки

$$|g(k,\ell)| \leqslant Ce^{-4\alpha\sqrt{1-k^2}\ell} \leqslant Ce^{-4\alpha\varkappa\ell}, \tag{5.2}$$

$$|g'(k,\ell)| \leqslant C\ell e^{-4\alpha\sqrt{1-k^2}\ell} \leqslant C\ell e^{-4\alpha\varkappa\ell}, \tag{5.3}$$

где $C$ – некоторая константа, не зависящая от $k$ и достаточно больших $\ell$. Кроме того, непосредственными вычислениями с использованием соотношений (4.7), (4.10) проверяем, что выполнено равенство

$$F(k,\ell) = f(k) + g(k,\ell)$$

Последнее равенство позволяет переписать уравнение (5.1) в следующем виде:

$$e^{4\mathrm{i}k\ell} = f(k) + g(k,\ell). \tag{5.4}$$

Для исследования последнего уравнения в области $\Omega$ рассмотрим вспомогательное уравнение (2.11).

**Лемма 5.1.** *Все корни уравнения (2.11), лежащие в $\Omega$, удовлетворяют оценке*

$$-\frac{1}{4\ell}\ln\max_{k\in\overline{\Omega}}|f(k)| \leqslant \operatorname{Im} k \leqslant -\frac{1}{4\ell}\ln\min_{k\in\overline{\Omega}}|f(k)|. \tag{5.5}$$

*Все корни уравнения (5.4), лежащие в $\Omega$, удовлетворяют оценке*

$$-\frac{1}{4\ell}\ln\max_{k\in\overline{\Omega}}|f(k)| - \frac{Ce^{-4\varkappa\alpha\ell}}{4\ell} \leqslant \operatorname{Im} k \leqslant -\frac{1}{4\ell}\ln\min_{k\in\overline{\Omega}}|f(k)| + \frac{Ce^{-4\varkappa\alpha\ell}}{4\ell},$$

*где константа $C$ – из (5.2).*

*Доказательство.* Если $k$ – корень уравнения (2.11), то верна элементарная априорная оценка

$$\min_{k\in\overline{\Omega}}|f(k)| \leqslant |e^{\mathrm{i}k\ell}| \leqslant \max_{k\in\overline{\Omega}}|f(k)|.$$

И так как $|e^{4\mathrm{i}k\ell}| = e^{-4\ell\operatorname{Im}k}$, то отсюда сразу следует утверждение леммы относительно корней уравнения (2.11). Требуемая оценка для корней уравнения (2.11) доказывается аналогично; необходимо лишь дополнительно воспользоваться оценкой (2.31). Лемма доказана. □

**Замечание 5.1.** *Из условия (2.8) следует, что*

$$\min_{k\in\overline{\Omega}}|f(k)| \leqslant 1 \leqslant \max_{k\in\overline{\Omega}}|f(k)|.$$

*Поэтому левая часть в (5.5) неположительна, а правая – неотрицательна.*

Ввиду условия (2.8) будем считать, что область $\Omega$ выбрана так, что

$$|f(k)| \geqslant c_0 > 0 \quad \text{при} \quad k \in \overline{\Omega}.$$

Это позволяет определить функцию $h(k)$ формулой (2.10), причём ветви логарифма в определении этой функции можно выбрать так, что функция $h$ оказывается голоморфной в области $\overline{\Omega}$. Для указанного выбора функции $h$ достаточно воспользоваться подходом, лежащем в основе определения понятия полной аналитической функции, см., например, [4, Гл. 8, §§4,5]. Отметим ещё, что в силу (2.8) функция $h(k)$ вещественна при $k \in [\beta_-, \beta_+]$.

В силу определения функции $h(k)$ верно

$$f(k) = e^{\mathrm{i}h(k)},$$

и уравнение (2.11) оказывается эквивалентным следующему:

$$k - \ell^{-1}h(k) = \varkappa_n(\ell), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{5.6}$$

Так как функция $h(k)$ вещественна при $k \in [\beta_-, \beta_+]$, то её производная также вещественна на этом отрезке и равномерно ограничена в силу гладкости функции $h$. Поэтому, при достаточно больших $\ell$,

$$\frac{d}{dk}\big(k - \ell^{-1}h(k)\big) = 1 - \ell^{-1}h'(k) > 0 \quad \text{при} \quad k \in [\beta_-, \beta_+],$$

и потому функция в левой части уравнения (5.6) оказывается монотонно возрастающей по $k \in [\beta_-, \beta_+]$. Её значения заметают отрезок $I_\ell$, определённый в (2.12), концы которого стремятся к $\beta_-$ и $\beta_+$ при $\ell \to +\infty$. Ясно, что при больших $\ell$ отрезок $I_\ell$ содержит большое количество точек $\varkappa_n(\ell)$ и каждой такой точке соответствует ровно один вещественный корень уравнения (5.6). Этот корень обозначим через $K_n = K_n(\ell)$, где $n \in \mathbb{M}_\ell$, и множество $\mathbb{M}_\ell$ определяется формулой (2.12).

Обозначим:

$$\Omega_\ell := \big\{k \in \Omega : \operatorname{dist}(k, [\beta_-, \beta_+]) \leqslant M\ell^{-1}\big\}. \tag{5.7}$$

Из определения множеств $\Omega_\ell$ и $\Omega$ следует, что при достаточно больших $\ell$ справедливо неравенство

$$\operatorname{dist}(\partial\Omega, \Omega_\ell) \geqslant \rho. \tag{5.8}$$

Из определения отрезка $I_\ell$ также следует, что $I_\ell \subset \Omega_\ell$, а из (5.5) вытекает, что все корни уравнения (2.11) с вещественными частями из отрезка $I_\ell$ попадают во множество $\Omega_\ell$.

**Лемма 5.2.** *При $\ell$, удовлетворяющих условию (3.1), и $n \in \mathbb{M}_\ell$ уравнение (5.6) имеет в области $\Omega_\ell$ только вещественные корни $K_n$, которые представляются пределом (2.13) и суммой рядов (2.14). Оба ряда сходятся абсолютно равномерно по $\ell^{-1}$. Верны оценки (2.15), (2.16) и (2.17).*

*Доказательство.* Для каждого $n \in \mathbb{M}_\ell$ и определим множество

$$S_n(\ell) := \big\{k : |\operatorname{Re} k - \varkappa_n(\ell)| \leqslant M\ell^{-1},\ |\operatorname{Im} k| \leqslant M\ell^{-1}\big\}.$$

Из определения константы $M$ и леммы 5.1 сразу следует, что множества $S_n(\ell)$ покрывают $\Omega_\ell$, т.е. $\Omega_\ell \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{M}_\ell} S_n(\ell)$. Из уравнения (5.6) вытекает априорная оценка для корней $K_n$:

$$|K_n(\ell) - \varkappa_n(\ell)| \leqslant |\ell^{-1}h(K_n(\ell))| \leqslant M\ell^{-1}$$

и потому корень $K_n$ является точкой множества $S_n(\ell)$.

Сделаем замену переменной $z := k - \varkappa_n(\ell)$. Тогда при изменении переменной $k$ по множеству $S_n(\ell)$, новая переменная $z$ меняется по множеству $S_0(\ell)$. Верны оценки

$$\begin{aligned}
&|\operatorname{Re}\ell^{-1}h\big(z+\varkappa_n(\ell)\big)| \leqslant M\ell^{-1}, \qquad |\operatorname{Im}\ell^{-1}h\big(z+\varkappa_n(\ell)\big)| \leqslant M\ell^{-1}, \qquad z \in S_0(\ell),\\
&|\ell^{-1}h\big(z_1+\varkappa_n(\ell)\big) - \ell^{-1}h\big(z_2+\varkappa_n(\ell)\big)| \leqslant \ell^{-1}\max_{k\in\overline{\Omega}}|h'(k)||z_2 - z_1|, \qquad z_1, z_2 \in S_0(\ell).
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Из этих оценок следует, что функция $z \mapsto \ell^{-1}h\big(z+\varkappa_n(\ell)\big)$ отображает компактное множество $S_0(\ell)$ в себя и является сжимающим отображением при $\ell$, удовлетворяющих условию (3.1). Поэтому уравнение (5.6) имеет единственное решение во множестве $S_n(\ell)$, которое необходимо совпадает с $K_n$. Представление (2.13) является прямым следствием принципа сжимающих отображений. Представления (2.14), оценки (2.15) и первые оценки остатков в (2.16), (2.17) доказываются так же, как были установлены аналогичные представления и оценки в теореме 1 в [13]. Вторые оценки остатков в (2.16), (2.17) следуют из стандартных оценок для производных голоморфных функций, вытекающих из интегральной формулы Коши и неравенства (5.8):

$$\begin{aligned}&\max_{k\in\overline{\Omega}_\ell}\left|\frac{d^p h^{p+1}}{dk^p}(k)\right|\leqslant\frac{p!|\partial\Omega|}{2\pi}\left(\frac{M}{\rho}\right)^{p+1},\\&\max_{\overline{\Omega}_\ell}\left|\frac{d^p}{dk^p}\big(\varkappa_n(\ell)+h(k)\big)^{p+1}\right|\leqslant\frac{p!|\partial\Omega|}{2\pi}\left(\frac{M+\beta+1}{\rho}\right)^{p+1}.\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.1 является прямым следствием доказанной леммы.

Перейдём к изучению основного уравнения (5.4) и докажем теоремы 2.1, 2.2.

*Доказательство теоремы 2.1.* Перепишем уравнение (5.4) в виде

$$e^{4\mathrm{i}k\ell-4\mathrm{i}h(k)}=1+e^{-4\mathrm{i}h(k)}g(k,\ell). \tag{5.10}$$

Так как в силу оценки (5.2) функция $g$ экспоненциально мала, то функция $G(k,\ell)$ из (2.18) определена корректно, голоморфна по $k\in\Omega$, однолистна и экспоненциально мала согласно очевидной оценке

$$|G(k,\ell)|\leqslant C\ell^{-1}|e^{-4\mathrm{i}h(k)}g(k,\ell)|\leqslant C\ell^{-1}e^{-4\alpha\kappa\ell}, \tag{5.11}$$

где $C$ – некоторая константа, не зависящая от $\ell$ и $k$. Это позволяет переписать уравнение (5.10) в следующем виде

$$k=\varkappa_n(\ell)+L(k,\ell),\qquad n\in\mathbb{Z}, \tag{5.12}$$

где функция $L$ – из (2.20). Далее мы исследуем полученное уравнение, повторяя фактически идеи доказательства леммы 5.2.

Из определения константы $M$ в (5.7) и оценки (5.11) следует, что

$$\max_{k\in\overline{\Omega}}|L(k,\ell)|\leqslant(M+1)\ell^{-1} \tag{5.13}$$

при достаточно больших $\ell$. Из оценок (5.2), (5.3) и определения (2.18) функции $G$ также вытекает, что

$$|G'(k,\ell)|\leqslant Ce^{-4\alpha\kappa\ell},\qquad k\in\Omega, \tag{5.14}$$

где $C$ – некоторая константа, не зависящая от $\ell$ и $k$.

Сделаем замену переменной $z=k-\varkappa_n(\ell)$. Аналогично оценкам (5.9), с использованием неравенств (5.11), (5.13), (5.14) проверяем, что

$$\begin{aligned}&|\operatorname{Re}L_n(z,\ell)|\leqslant(M+1)\ell^{-1},\qquad|\operatorname{Im}L_n(z,\ell)|\leqslant(M+1)\ell^{-1},\qquad z\in S_L(\ell),\\&|L_n(z_1,\ell)-L_n(z_2,\ell)|\leqslant C\ell^{-1}|z_2-z_1|,\qquad z_1,z_2\in S_L(\ell),\end{aligned}$$

где $C$ – некоторая константа, не зависящая от $z_1$, $z_2$ и $\ell$, а множество $S_L(\ell)$ имеет вид

$$S_L(\ell):=\big\{z:\ |\operatorname{Re}z|\leqslant(M+1)\ell^{-1},\ |\operatorname{Im}z|\leqslant(M+1)\ell^{-1}\big\}.$$

Следовательно, функция $z\mapsto L_n(z,\ell)$ отображает множество $S_L(\ell)$ на себя и является сжимающим отображением. Отсюда немедленно следует, что уравнение (5.12) имеет ровно один корень в $S_L(\ell)$, которое обозначаем через $k_n(\ell)$. Согласно принципу сжимающих отображений, этот корень можно найти как предел соответствующей последовательности в (2.21). И вновь аналогично доказательству теоремы 1 в [13] устанавливаются представления (2.22), проверяется абсолютная равномерная по $\ell^{-1}$ сходимость этих рядов и выводятся неравенства (2.23) и оценки остатков:

$$\begin{aligned}
&\left|k_n(\ell)-\varkappa_n(\ell)-\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m!}\frac{d^{m-1}L^m}{dk^{m-1}}(\varkappa_n(\ell),\ell)\right|\leqslant\frac{1}{(p+1)!}\max_{k\in\overline{\Omega_\ell}}\left|\frac{d^pL^{p+1}}{dk^p}(k,\ell)\right|,\\
&\left|k_n(\ell)-\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m!}\frac{d^{m-1}\big(\varkappa_n(\ell)+L\big)^m}{dk^{m-1}}(0,\ell)\right|\leqslant\frac{1}{(p+1)!}\max_{k\in\overline{\Omega_\ell}}\left|\frac{d^p\big(\varkappa_n+L\big)^m}{dk^p}(k,\ell)\right|.
\end{aligned}\tag{5.15}$$

Упомянутые выше стандартные оценки производных голоморфных функций вновь позволяют продолжить полученные оценки и с учётом (5.8), (5.13) выводим:

$$\begin{aligned}
&\left|k_n(\ell)-\varkappa_n(\ell)-\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m!}\frac{d^{m-1}L^m}{dk^{m-1}}(\varkappa_n(\ell),\ell)\right|\leqslant\frac{|\partial\Omega|}{2\pi(p+1)}\left(\frac{M+1}{\rho\ell}\right)^{p+1},\\
&\left|k_n(\ell)-\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m!}\frac{d^{m-1}\big(\varkappa_n(\ell)+L\big)^m}{dk^{m-1}}(0,\ell)\right|\leqslant\frac{|\partial\Omega|}{2\pi(p+1)}\left(\frac{M+\beta+1}{\rho\ell}\right)^{p+1},
\end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы 2.1. □

Опишем теперь разности $k_n(\ell)-K_n(\ell)$ и докажем теорему 2.2.

*Доказательство теоремы 2.2.* Рассмотрим уравнение (5.12) и сделаем замену $z=k-K_n(\ell)$. Тогда с учётом уравнения (5.6), для новой неизвестной $z$ получаем:

$$z=\ell^{-1}\Big(h\big(z+K_n(\ell)\big)-h\big(K_n(\ell)\big)\Big)+G\big(z+K_n(\ell),\ell\big).$$

Перепишем это уравнение следующим образом:

$$\left(1-\ell^{-1}\frac{h\big(z+K_n(\ell)\big)-h\big(K_n(\ell)\big)}{z}\right)z=G\big(z+K_n(\ell),\ell\big),$$

откуда выводим ещё одно уравнение:

$$z=P_n(z,\ell),\tag{5.16}$$

где функция $P_n$ – из (2.26). Определим множество $S:=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|\leqslant\delta\}$, где $\delta$ – некоторое достаточно малое фиксированное число. В силу голоморфности функции $h$ и неравенств (5.2), (5.3) заключаем, что функция $P_n(\cdot,\ell)$ голоморфна в $\overline{S}$ и удовлетворяет равномерным оценкам:

$$|P_n(z,\ell)|\leqslant Ce^{-4\alpha\kappa\ell},\qquad |P_n'(z,\ell)|\leqslant C\ell e^{-4\alpha\kappa\ell},\tag{5.17}$$

где $C$ – некоторая константа, не зависящая от $k$ и достаточно больших $\ell$. Теперь аналогично оценкам (5.9) легко убедиться, что функция $z\mapsto P_n(z,\ell)$ отображает множество $\overline{S}$ в себя и является на нем сжимающим отображением. Соответствующая неподвижная точка – корень уравнения (5.16) – может быть найдена как предел соответствующей последовательности, удовлетворяющий оценкам (2.29), либо как сумма рядов аналогичных (2.22) с оценками остатков аналогичных (5.15). Это даёт представления (2.27), (2.28) для корней $k_n(\ell)$ и следующие оценки остатков

$$\left|k_n(\ell)-K_n(\ell)-\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m!}\frac{d^{m-1}P_n^m}{dz^{m-1}}(0,\ell)\right|\leqslant\frac{1}{(p+1)!}\max_{z\in\overline{S}}\left|\frac{d^pP_n^{p+1}}{dz^p}(z,\ell)\right|\tag{5.18}$$

Из последней оценки с $p=1$ и оценок (5.17) следует, что

$$|k_n(\ell)-K_n(\ell)|\leqslant C\ell e^{-4\alpha\kappa\ell},$$

где $C$ – некоторая константа, не зависящая от $\ell$ и $n$. Полученная оценка означает, что корни уравнения (5.16) экспоненциально близки к нулю. В свою очередь это позволяет улучшить оценку (5.18), вновь повторив соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 1 в [13]:

$$\left|k_n(\ell)-K_n(\ell)-\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m!}\frac{d^{m-1}P_n^m}{dz^{m-1}}(0,\ell)\right|\leqslant\frac{1}{(p+1)!}\max_{|z|\leqslant C\ell e^{-4\alpha\kappa\ell}}\left|\frac{d^pP_n^{p+1}}{dz^p}(z,\ell)\right|. \tag{5.19}$$

Функцию $P_n$ можно выразить в терминах переменной $k$:

$$P_n(z,\ell)=\left(1-\ell^{-1}\frac{h(k)-h\big(K_n(\ell)\big)}{k-K_n(\ell)}\right)^{-1}G(k,\ell).$$

Это дает нам возможность переписать максимум по $z$ в (5.19) через соответствующий максимум по $k$ и вновь воспользоваться упомянутыми выше оценками производных голоморфных функций. В результате окончательная оценка остатка приобретает вид (2.30). Теорема 2.2 полностью доказана. □

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Д.И. Борисов, А.М. Головина. *О возникновении резонансов из кратного собственного значения оператора Шрёдингера в цилиндре с разбегающимися возмущениями* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН. **163**, 3–14 (2019).
2. Д.И. Борисов, А.М. Головина. *О резольвентах периодических операторов с разбегающимися возмущениями* // Уфимс. матем. журн. **4**:2, 65–73 (2012).
3. А.М. Головина. *О спектре периодических эллиптических операторов с разбегающимися возмущениями в пространстве* // Алг. ан. **25**:5, 32–60 (2013).
4. А.И. Маркушевич. *Теория аналитических функций. Том 2.* Наука, Москва (1967).
5. T. Aktosun, M. Klaus, and Cornelis van der Mee. *On the number of bound states for the one-dimensional Schrödinger equation* // J. Math. Phys. **39**:9, 4249–4259 (1998).
6. F. Barra and P. Gaspard. *Scattering in periodic systems: from resonances to band structure* // J. Phys. A: Math. Gen. **32**:18, 3357–3375 (1999).
7. D. Borisov and P. Exner. *Exponential splitting of bound states in a waveguide with a pair of distant windows* // J. Phys. A: Math. Gen. **37**:10, 3411–3428 (2004).
8. D. Borisov and P. Exner. *Distant perturbation asymptotics in window-coupled waveguides. I. The non-threshold case* // J. Math. Phys. **47**:11, 113502 (2006).
9. D. Borisov, P. Exner and A. Golovina. *Tunneling resonances in systems without a classical trapping* // J. Math. Phys. **54**:1, 012102 (2013).
10. D.I. Borisov. *Distant perturbations of the Laplacian in a multi-dimensional space* // Ann. H. Poincaré. **8**:7, 1371–1399 (2007).
11. D. Borisov. *Asymptotic behaviour of the spectrum of a waveguide with distant perturbation* // Math. Phys. Anal. Geom. **10**:2, 155–196 (2007).
12. D.I. Borisov, D.A. Zezyulin. *Spacing gain and absorption in a simple $\mathcal{PT}$-symmetric model: spectral singularities and ladders of eigenvalues and resonances* // J. Phys. A. Math. Theor. **52**:44, 445202 (2019).
13. D.I. Borisov, D.A. Zezyulin. *Sequences of closely spaced resonances and eigenvalues for bipartite complex potentials* // Appl. Math. Lett. **100**, 106049 (2020).
14. D.I. Borisov, A.M. Golovina. *On finitely many resonances emerging under distant perturbations in multi-dimensional cylinders* // J. Math. Anal. Appl., to appear (2021).
15. E.B. Davies. *The twisting trick for double well Hamiltonians* // Comm. Math. Phys. **85**:3, 471–479 (1982).
16. V. Graffi, E.M. Harrell II and H.J. Silverstone. *The $\frac{1}{R}$ expansion for $H_2^+$: analyticity, summability and asymptotics* // Ann. Phys. **165**:2, 441–483 (1985).
17. A.M. Golovina. *On the resolvent of elliptic operators with distant perturbations in the space* // Russ. J. Math. Phys. **19**:2, 182–192 (2012).

18. A.M. Golovina. *Discrete eigenvalues of periodic operators with distant perturbations* // J. Math. Sci. **189**:3, 342–364 (2013).
19. E.M. Harrell. *Double wells* // Comm. Math. Phys. **75**:3, 239–261 (1980).
20. E.M. Harrell and M. Klaus. *On the double-well problem for Dirac operators* // Ann. de l'Inst. H. Poincaré. **38**:2, 153–166 (1983).
21. R. Høegh-Krohn and M. Mebkhout. *The* $\frac{1}{r}$ *expansion for the critical multiple well problem* // Comm. Math. Phys. **91**:1, 65–73 (1983).
22. M. Klaus. *Some remarks on double-wells in one and three dimensions* // Ann. de l'Inst. H. Poincaré. **34**:4, 405–417 (1981).
23. M. Klaus and B. Simon. *Binding of Schrödinger particles through conspiracy of potential wells* // Ann. de l'Inst. H. Poincaré, sect. A. **30**:2, 83–87 (1979).
24. F. Klopp. *Resonances for large one-dimensional "ergodic" systems* // Anal. PDE. **9**:2, 259–352 (2016).
25. M. Zworski, S. Dyatlov. *Mathematical theory of scattering resonances.* Amer. Math. Soc., Providence, RI (2019).



Денис Иванович Борисов,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия

Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450000, г. Уфа, Россия

University of Hradec Králové,
Rokitanskeho, 62
50003, Hradec Králové, Czech Republic
E-mail: BorisovDI@yandex.ru

Марал Нурлановна Коныркулжаева,
Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
пр. аль-Фараби 71,
050040, г. Алматы, Казахстан

Международный университет информационных технологий,
ул. Манаса 8,
050000, г. Алматы, Казахстан
E-mail: maralkulzha@gmail.com