ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 4 (2020). С. 92-100.

УДК 517.984.4 + 517.547

О НЕОБХОДИМОМ И ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ В ТЕОРИИ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ

З.Ю. ФАЗУЛЛИН, Н.Ф. АБУЗЯРОВА

Аннотация. Настоящая работа посвящена изучению формул регуляризованных следов симметрических L_0-компактных возмущений дискретного самосопряженного полуограниченного снизу оператора L_0 в сепарабельном гильбертовом пространстве. Исследования формул регуляризованных следов возмущений абстрактных самосопряженных дискретных операторов до сих пор, в основном, были направлены на нахождение достаточного условия, при котором равна нулю регуляризованная сумма со скобками с вычетом первой или нескольких поправок теории возмущений. Это условие формулируется в терминах спектральных характеристик невозмущенного оператора L_0 в зависимости от принадлежности определенному классу оператора возмущения V. В частности, в последнее время интенсивно изучаются формулы следов двумерных модельных операторов математической физики, возмущенных оператором умножения на функцию. Здесь мы исследуем необходимое и достаточное условие для двух случаев: равенства нулю и равенства конечному числу — суммы регуляризованного следа со скобками с вычетом первой поправки теории возмущений. При этом рассматривается конкретная скобка суммирования, которая, как правило, возникает при исследовании формул регуляризованных следов возмущений дифференциальных операторов в частных производных.

Ключевые слова: след оператора, резольвента, формула следов, теория возмущений, дискретный спектр.

Mathematics Subject Classification: 47A55, 47B02, 47B10, 47A10

1. Введение

Начало теории регуляризованных следов дискретных операторов было положено И.М. Гельфандом и Б.М. Левитаном в работе [1], где они для оператора Штурма-Лиувилля задачи Дирихле на отрезке $[0,\pi]$ с потенциалом $V(x)$ получили формулу, названную впоследствии формулой следа Гельфанда-Левитана:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k - k^2 - c_0) = -\frac{V(0)+V(\pi)}{4} + \frac{c_0}{2}, \tag{1.1}$$

где $c_0 = \pi^{-1}\int\limits_0^{\pi} V(x)dx$.

В равенстве (1.1) μ_k собственные числа оператора Штурма-Лиувилля, а $k^2 = \lambda_k$ – собственные числа этой же задачи при $V(x) \equiv 0$.

Z.U. Fazullin, N.F. Abuzyarova, On necessary and sufficient condition in theory of regularized traces.

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2020-0027) (Абузярова Н.Ф.) и в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, доп. согл. № 075-02-2020-1421/1 к согл. № 075-02-2020-1421 (Фазуллин З.Ю.).

Поступила 21 августа 2020 г.

И почти сразу Л.А. Дикий в работе [2] показал, что формула (1.1) эквивалентна следующему тождеству

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k - \lambda_k - (Vf_k, f_k)) = 0, \tag{1.2}$$

где $f_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx$ – ортонормированные собственные функции оператора Штурма-Лиувилля задачи Дирихле, при $V(x) \equiv 0$.

А именно, из тождества (1.2), поскольку

$$(Vf_k, f_k) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} V(x)dx - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} V(x)\cos 2kxdx$$

главный член, образующий расходящийся ряд, оставляя в левой части тождества (1.2), а сходящуюся часть просуммировав и сумму записывая в правую часть получим (1.1).

Именно такой подход, при котором член (Vf_k, f_k), первая поправка теории возмущений, обязательно исследуется, от него отделяется расходящая составляющая, а все остальное суммируется и заносится в правую часть, долгое время был центральным в многочисленных исследованиях формул следов возмущений как регулярных, так и сингулярных обыкновенных дифференциальных операторов. Достаточно подробный обзор приведен в работе [3] . Причем авторы весьма успешно разрабатывали прямые методы получения формул следов вида (1.1), минуя равенство (1.2).

С конца 70-х годов на первый план выдвигается изучение следов возмущений операторов в частных производных. Однако, даже первую поправку теории возмущений (Vf_k, f_k) из-за сложной структуры спектра (например, кратности ν_k собственных значений λ_k неограниченно возрастают при $k \to \infty$, отсутствуют растущие лакуны в спектре) операторов в частных производных не всегда удается эффективно исследовать, не говоря о последующих поправках теории возмущений. Поэтому прямые методы получения формул следов возмущений дифференциальных операторов в частных производных, основанные на асимптотических формулах (представлениях) для собственных чисел μ_k возмущенных обыкновенных дифференциальных операторов, не работают. В связи с этим возобновились активные исследования формул вида (1.2) и близких к ней (с вычитанием нескольких поправок теории возмущений) в общем положении – для возмущений абстрактных дискретных самосопряженных операторов.

Итак, пусть L_0 — дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – спектр оператора L_0, пронумерованные в порядке возрастания с учетом их кратностей ($\lambda_k \leqslant \lambda_{k+1}, k = 1, 2...$), $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис из собственных функций оператора L_0. Далее, пусть V симметрический L_0 – компактный оператор в H, тогда по хорошо известной теореме Като-Реллиха оператор $L = L_0 + V$ замкнут в области определения оператора L_0 и имеет дискретный спектр. Пусть $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ – собственные числа оператора L, занумерованные в порядке роста с учетом кратностей ($\mu_k \leqslant \mu_{k+1}, k = 1, 2...$).

Отметим, что поскольку как оператор L_0, так и оператор $L = L_0 + V$ полуограничены снизу, то, без ограничения общности, можно считать, что для любого k $\lambda_k \geq \delta > 0$, $\mu_k \geq \delta > 0$.

Для дискретных операторов в общем положении ставится следующая задача.

При каких условиях на операторы L_0 и V существует подпоследовательность натуральных чисел $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{n_m}[\lambda_k + (Vf_k, f_k) - \mu_k] = 0. \tag{1.3}$$

Равенство (1.3) принято называть формулой регуляризованного следа со скобками с вычетом первой поправки теории возмущений, которое является обобщением тождества (1.2) для абстрактных дискретных операторов.

Пионерской в общей постановке задачи и доказательства соотношения (1.3) была работа В.А. Садовничего, В.В. Дубровского, В.А. Любишкина [4]. Далее приведем лишь наиболее значимые достижения в этом направлении.

В работе [5] В.А. Садовничий и В.Е. Подольский для произвольных ограниченных возмущений V доказали справедливость равенства (1.3), если $R_0(z) = (L_0 - zI)^{-1}$ — ядерный оператор, для возмущений V, являющихся оператором Гильберта-Шмидта, равенство (1.3) в этой работе доказано, если в спектре оператора L_0 существует расширяющиеся лакуны, т.е. существует подпоследовательность $\{\lambda_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что $\lambda_{n_{m+1}} - \lambda_{n_m} \to \infty$ при $m \to \infty$. Отметим, что метод доказательства в этой работе и предыдущих многочисленных работах В.А. Садовничего, В.А. Любишкина, В.В. Дубровского и других авторов был основан на применении оператора $\operatorname{tr}(-\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma_m} z(\cdot)dz)$ к резольвентному тождеству

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z)VR_0(z) + (R_0(z)V)^2R(z),$$

где $\Gamma_m = \{z :\mid z \mid= 2^{-1}(\lambda_{n_m} + \lambda_{n_{m+1}})\}$, $R(z) = (L - zI)^{-1}$.

Следующее существенное продвижение в этой тематике было сделано в работе Муртазина Х.Х. и Фазуллина З.Ю. [6]. С целью формулировки результатов этой работы, касающихся равенства (1.3) и метода доказательства его, введём еще поточечную нумерацию спектра оператора L_0:

$$\sigma(L_0) = \{\bar\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad \bar\lambda_k < \bar\lambda_{k+1}, \quad k = 1, 2....$$

Обозначим через P_k ортогональный проектор на собственное подпространство оператора L_0, соответствующее собственному числу $\bar\lambda_k$, и пусть $\nu_k = \dim \operatorname{Ran} P_k$ – кратность собственного числа $\bar\lambda_k$, так что

$$P_k(\cdot) = \sum_{i=1}^{\nu_k} (\cdot, f_{k_i})f_{k_i},$$

где $\{f_{k_i}\}_{i=1}^{\nu_k}$ – базис из собственных функций оператора L_0 в подпространстве P_kH. Далее, пусть $\mu_i^{(k)}$, $i = \overline{1, \nu_k}$ группа собственных чисел оператора L, на которые расщепляется собственное число $\bar\lambda_k$ оператора L_0 при возмущении оператором V, пронумерованные в порядке их роста с учетом кратностей.

Всюду далее будем предполагать выполненным следующее условие: *оператор* $K_0(\lambda) = (R_0(-\lambda)V)^2R_0(-\lambda)$ $\lambda > 0$ *— ядерный, т.е.*

$$\operatorname{tr} K_0(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{mk}}{(\bar\lambda_k + \lambda)^2(\bar\lambda_m + \lambda)} < \infty, \tag{1.4}$$

где $a_{mk} = \operatorname{tr} P_kVP_mV$.

В работе [6] на основе того, что для любого $t \in K$ – компакт в $\mathbb{R}$ справедливо неравенство [6, Лемма 1.4]

$$0 \leqslant \rho(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_k<t} [\lambda_k + (Vf_k, f_k) - \mu_k] = \sum_{\bar\lambda_k<t} \left[\sum_{i=1}^{\nu_k} (\bar\lambda_k - \mu_i^{(k)}) + \operatorname{tr} P_kV\right], \tag{1.5}$$

для симметрических, L_0 – компактных возмущений V, т.е. $\|R_0(-\lambda)V\| \to 0$ при $\lambda \to +\infty$ доказано [6, Теорема 1.3] следующее асимптотическое равенство

$$\int_0^\infty \frac{\omega(t)dt}{(t+\lambda)^4} = \int_0^\infty \frac{\nu(t)dt}{(t+\lambda)^4}[1 + O(\|R_0(-\lambda)V\|)], \tag{1.6}$$

где

$$\omega(t) = 2\int_0^t \rho(\tau)d\tau + \sum_{\lambda_k < t}(\lambda_k - \mu_k)^2,$$

$$\nu(t) = 2\int_0^t \tau(s)ds + \sum_{\bar\lambda_k < t} a_{kk},$$

$$\tau(s) = \sum_{\bar\lambda_k < s}\sum_{\bar\lambda_m \geq s} a_{mk}(\bar\lambda_m - \bar\lambda_k)^{-1}.$$

Причем, отметим, что если $K_0(\lambda)$ ядерный, то [6, формула 1.47]

$$f(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr} K_0(\lambda) = 3\int_0^\infty \frac{\nu(t)}{(t+\lambda)^4}dt. \tag{1.7}$$

Используя равенства (1.6) и (1.7), доказано [6, Лемма 1.10], если при $\lambda \gg 1$

$$f(\lambda) = o(\lambda^{-2}), \tag{1.8}$$

то существует подпоследовательность $\{n_m\}_{m=1}^\infty \subseteq \mathbb{N}$ такая, что имеет место равенство (1.3).

Следует отметить, что условие (1.8) изначально не связано конкретным классом возмущений V.

На основе этого утверждения, т. е. леммы 1.10 работы [6], получены достаточные условия справедливости равенства (1.3) для различных классов возмущений V. Для полноты изложения приведем теорему 1.5 работы [6].

Теорема А. *Пусть $L_0 = L_0^*$ – дискретный полуограниченный снизу, а V – симметрический L_0 – компактный операторы в H. И пусть выполнено одно из нижеследующих условий:*

(1) $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{(V^2 f_k, f_k)}{\lambda_k} < \infty$;
(2) V *– ограниченный и* $N(t) = \bar{o}(t)$ *при* $t \to \infty$;
(3) V *– компактный и* $N(t) = O(t)$ *при* $t \to \infty$;
(4) $V \in \sigma_p$, $2 < p \in \mathbb{N}$ *и* $N(\bar t) = \bar{o}(t^{\frac{p}{p-2}})$ *при* $t \to \infty$;
(5) $V \in \sigma_2$.

Тогда существует подпоследовательность натуральных чисел $\{n_m\}_{m=1}^\infty$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{n_m}(\lambda_k + (Vf_k, f_k) - \mu_k) = 0.$$

Здесь σ_p, $p \in \mathbb{N}$ класс компактных операторов Шатена-фон Неймана, в частности σ_2 – класс операторов Гильберта-Шмидта.

Отметим, что утверждения теоремы А перекрывают все ранее известные результаты в случае симметрических L_0 – компактных возмущений V.

В настоящей работе впервые изучается необходимое и достаточное условие равенства нулю и конечному числу отличного от нуля суммы ряда, в одном из способов расстановки скобок суммирования. А именно рассматривается ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{\nu_k}(\bar{\lambda}_k - \mu_i^{(k)}) + \operatorname{tr} P_k V\right]. \tag{1.9}$$

Как правило, такая расстановка скобок возникает при исследовании, например, формул следов возмущений модельных операторов в частных производных математической физики [см. работы [7], [9], [6], [11], [12], [13]].

2. Критерий для значения суммы регуляризованного следа

Преобразуем равенство (1.6). Вначале заметим, что если оператор L_0-компактен и выполнено условие (1.4), то из теоремы 1.2 работы [6] получаем, что

$$2\int_0^{\infty}\frac{\rho(t)dt}{(t+\lambda)^3} < \operatorname{tr} K_0(\lambda) < \infty. \tag{2.1}$$

Справедлива

Лемма 1. *Пусть оператор $K_0(\lambda)$ ядерный, а V – симметрический L_0 – компактный оператор. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{(\bar{\lambda}_k+\lambda)^2} = 2\int_0^{\infty}\frac{\rho(t)dt}{(t+\lambda)^3}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Из определения $\rho(t)$, поскольку $\rho(t)\geq 0$, для любого $n\in\mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(\lambda_k+\lambda)^2} = \int_0^{\bar{\lambda}_n}\frac{d\rho(t)}{(t+\lambda)^2} = \frac{\rho(\bar{\lambda}_n+0)}{(\bar{\lambda}_n+\lambda)^2} + 2\int_0^{\bar{\lambda}_n}\frac{\rho(t)}{(t+\lambda)^3}dt. \tag{2.3}$$

Справедливость равенства (2.2) будет следовать из равенства (2.3), если покажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\rho(\bar{\lambda}_n+0)}{(\bar{\lambda}_n+\lambda)^2} = 0.$$

Допустим противное, т.е. что (так как $\rho(t)\geq 0$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\rho(\bar{\lambda}_n+0)}{(\bar{\lambda}_n+\lambda)^2} = a > 0.$$

Тогда для всех $n\geq n_0(\varepsilon)$

$$\rho(\bar{\lambda}_n+0) \geq (a-\varepsilon)(\bar{\lambda}_n+\lambda)^2, \quad \varepsilon = \frac{a}{2}$$

Откуда, так как $\rho_n(t)$ ступенчатая и неотрицательная функция будем иметь

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^{r}\frac{\rho(t)}{(t+\lambda)^3}dt = +\infty,$$

что противоречит неравенству (2.1).
Лемма 1 доказана. □

Совершенно аналогично, интегрированием по частям, доказывается равенство

$$2\int_0^{+\infty}\frac{\rho(t)}{(t+\lambda)^3}dt = 3\int_0^{\infty}\frac{2\int_0^t\rho(\tau)d\tau}{(t+\lambda)^4}dt. \tag{2.4}$$

Теперь из равенства (1.6), (2.2), (2.4), при этом учитывая лемму 1.7 работы [6], выводим, что при $\lambda \gg 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(\bar{\lambda}_k + \lambda)^2} = f_1(\lambda)[1 + O(\|R_0(-\lambda)V\|)], \tag{2.5}$$

где

$$f_1(\lambda) = 3 \int_0^{+\infty} \frac{2\int_0^t \tau(s)ds + \sum_{\bar{\lambda}_k < t}[a_{kk} - \sum\limits_{i=1}^{\nu_k}(\bar{\lambda}_k - \mu_i^{(k)})^2]}{(t+\lambda)^4} dt.$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть ряд (1.9) сходится. Тогда для равенства нулю суммы ряда (1.9) необходимо и достаточно, чтобы*

$$f_1(\lambda) = \bar{o}(\lambda^{-2}) \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty. \tag{2.6}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = 0$.
Покажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{(\bar{\lambda}_k + \lambda)^2} a_k$$

сходится равномерно для всех $\lambda > 0$. Действительно, так как функциональная последовательность

$$b_k(\lambda) = \frac{\lambda^2}{(\bar{\lambda}_k + \lambda)^2}$$

монотонна и равномерно ограничена на множестве $\lambda > 0$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то исследуемый ряд равномерно сходится на множестве $\lambda > 0$ по признаку равномерной сходимости Абеля. Следовательно,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(\bar{\lambda}_k + \lambda)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2}{(\bar{\lambda}_k + \lambda)^2} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0. \tag{2.7}$$

Поскольку оператор $V - L_0$ компактный, т. е. $\|R_0(-\lambda)V\| \to 0$ при $\lambda \to +\infty$ из равенств (2.5) и (2.7) вытекает справедливость соотношения (2.6).

Достаточность. Пусть выполнено условие (2.6). Поскольку, как отметили выше $\|R_0(-\lambda)V\| \to 0$ при $\lambda \to +\infty$, из равенства (2.5) вытекает, что при $\lambda \gg 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(\bar{\lambda}_k + \lambda)^2} = o(\lambda^{-2}). \tag{2.8}$$

Допустим противное, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = c_0 > 0$ (постоянная $c_0 > 0$, в силу неравенства (1.5)).

Поскольку, как отметили выше, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{(\bar{\lambda}_k + \lambda)^2} a_k$ сходится равномерно при всех $\lambda > 0$, имеем, что

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(\bar{\lambda}_k + \lambda)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2}{(\bar{\lambda}_k + \lambda)^2} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = c_0. \tag{2.9}$$

Откуда, вытекает равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(\bar{\lambda}_k+\lambda)^2} = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad \lambda \to +\infty$$

которое противоречит (2.8). □

Теорема 2. *Пусть ряд (1.9) сходится. Тогда для справедливости соотношения*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = c_0 > 0 \tag{2.10}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$f_1(\lambda) \sim c_0\lambda^{-2} \quad \textit{при} \quad \lambda \to +\infty. \tag{2.11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть выполнено (2.10). Так как оператор V L_0-компактен, имеем $\|R_0(-\lambda)V\| \to 0$ при $\lambda \to +\infty$. Следовательно,

$$f_1(\lambda)[1+\|VR_0(-\lambda)\|] \sim f_1(\lambda) \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty. \tag{2.12}$$

Теперь, умножив обе части равенства (2.5) на $\lambda^2 \cdot c_0^{-1}$ и переходя в полученном равенстве к пределу при $\lambda \to +\infty$, согласно равенству (2.9), получим, что

$$1 = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{f_1(\lambda)[1+\|VR_0(-\lambda)\|]}{c_0\cdot\lambda^{-2}},$$

т. е.

$$\frac{c_0}{\lambda^2} \sim f_1(\lambda)[1+\|VR_0(-\lambda)\|].$$

Отсюда, с учетом соотношения (2.12), выводим справедливость (2.11).

Достаточность. Пусть $f_1(\lambda) \sim c_0\cdot\lambda^{-2}$ при $\lambda \to +\infty$, где c_0 — положительная постоянная. Тогда, умножив обе части равенства (2.5) на λ^2, получим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{(\bar{\lambda}_k+\lambda)^2} a_k = \lambda^2 f_1(\lambda)[1+O\|R_0(-\lambda)V\|] \tag{2.13}$$

Напомним, что выше был отмечен факт равномерной при $\lambda > 0$ сходимости ряда, стоящего в левой части равенства (2.13). Учитывая этот факт и эквивалентности (2.11) и (2.12), перейдем к пределу при $\lambda \to +\infty$ в обеих частях равенства (2.13). Получим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = c_0.$$

□

В дальнейшем мы планируем установить справедливость оценок (2.6) и (2.11) для функции $f_1(\lambda)$ в случае конкретных классов возмущений V. При этом поскольку мы не будем требовать существования расширяющихся лакун в спектре оператора L_0 (это связано с конкретным выбором расстановки скобок суммирования), мы будем вынуждены накладывать условие на собственные числа $\mu_i^{(k)}$, $i=\overline{1,\nu_k}$ оператора L: $\mu_i^{(k)}$ при $k \gg 1$ лежат в окрестности собственного числа $\bar{\lambda}_k$, т. е. $|\mu_i^{(k)} - \bar{\lambda}_k| < r_k$, $i=\overline{1,\nu_k}$, где

$$r_k = \min\{(\bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_{k-1})\cdot 2^{-1}, (\bar{\lambda}_{k+1}-\bar{\lambda}_k)\cdot 2^{-1}\}.$$

Пусть $R_{0k}(z) = R_0(z) - (z-\bar{\lambda}_k)^{-1}P_k$ – приведенная резольвента оператора L_0 в окрестности собственного числа $\bar{\lambda}_k$. Тогда, если

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{|z-\bar{\lambda}_k|\leqslant r_k} \|R_{0k}(z)V\| = 0,$$

то не сложно доказать, что при $t \gg 1$

$$\gamma(t) := \sum_{\bar{\lambda}_k<t} [a_{kk} - \sum_{i=1}^{\nu_k} (\bar{\lambda}_k - \mu_i^{(k)})^2] = \vec{o}(t).$$

Следовательно,

$$f_1^{(2)}(\lambda) = 3\int\limits_0^\infty \frac{\gamma(t)}{(t+\lambda)^4}dt = o(\lambda^{-2}), \quad \lambda \to +\infty.$$

Поэтому справедливость оценок (2.6) и (2.11) для различных классов возмущений V нужно установить для функции

$$f_1^{(1)}(\lambda) = 3\int\limits_0^\infty \frac{2\int_0^t \tau(s)ds}{(t+\lambda)^4}dt,$$

так как

$$f_1(\lambda) = f_1^{(1)}(\lambda) + f_1^{(2)}(\lambda).$$

В заключение сформулируем следующую задачу:

доказать, что существует подпоследовательность натуральных чисел $\{n_m\}_{m=1}^\infty$ *такая, что*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n_m} [\lambda_k + (Vf_k, f_k) - \mu_k] = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$f_1(\lambda) = o(\lambda^{-2}) \quad \textit{при} \quad \lambda \to +\infty.$$

Отметим, что доказательство достаточности не представляет трудности и нам известно. Обоснование необходимости в настоящий момент не завершено и требует дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан. *Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка* // ДАН СССР. **88**, 593–596 (1953).
2. Л. А. Дикий. *Об одной формуле Гельфанда–Левитана* // УМН. **8**:2 119–123 (1953).
3. В.А. Садовничий, В.Е. Подольский. *Следы операторов* // УМН. **61**:5, 89–156 (2006).
4. В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, В.А. Любишкин. *Следы дискретных операторов* // Докл. АН СССР. **264**:4, 830–832 (1982).
5. В.А. Садовничий, В.Е. Подольский. *Следы операторов с относительно компактным возмущением* // Матем. сб. **193**:2, 129–152 (2002).
6. Х.Х. Муртазин, З.Ю. Фазуллин. *Неядерные возмущения дискретных операторов и формулы следов* // Матем. сб. **196**:12, 123–156 (2005).
7. В.А. Садовничий, В.В. Дубровский. *Классическая формула регуляризованного следа для собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на сфере* S^2 // Докл. АН СССР. **319**:1, 61–62 (1991).
8. В.А. Садовничий, З.Ю. Фазуллин. *Формула первого регуляризованного следа для возмущения оператора Лапласа-Бельтрами* // Дифф. уравнения. **37**:3, 402–409 (2001).
9. З.Ю. Фазуллин, Х.Х. Муртазин. *Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора* // Матем. сб. **192**:5, 87–124 (2001).

10. Х.Х. Муртазин, З.Ю. Фазуллин. *Спектр и формула следов для двумерного оператора Шредингера в однородном магнитном поле* // Доклады РАН. **390**: 6, 743–745 (2003).
11. E. Korotyaev, A. Pushniski. *A trace formula and high-energy spectral asymptotics for the perturbed Landau hamiltonian* // Func. Anal. **217**:1, 221–248 (2004).
12. А.И. Атнагулов, В.А. Садовничий, З.Ю. Фазуллин. *Свойства резольвенты оператора Лапласа на двумерной сфере и формула следов* // Уфимск. матем. журн. **8**:3, 22–40 (2016).
13. З.Ю. Фазуллин, И.Г. Нугаева. *Спектр и формула следов финитного возмущения двумерного гармонического осциллятора в полосе* // Дифф. уравнения. **55**:5, 691–701 (2019).

Зиганур Юсупович Фазуллин,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: fazullinzu@mail.ru

Наталья Фаирбаховна Абузярова,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: abnatf@gmail.com