УДК 517.929

ОБ АНТИПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Г.Г. ПЕТРОСЯН

Аннотация. Рассматривается краевая задача для полулинейного дифференциального включения с дробной производной Капуто и отклоняющимся аргументом в банаховом пространстве. Предполагается, что линейная часть включения порождает ограниченную C_0-полугруппу. Нелинейная часть включения представляет из себя многозначное отображение, зависящее от времени и предыстории функции до данного момента времени. Краевое условие является функциональным и антипериодическим, в смысле равенства одной функции другой, взятой с противоположным знаком. Для разрешения поставленной задачи будет использоваться теория дробного математического анализа, свойства функции Миттаг-Леффлера, а также теория топологической степени для многозначных уплотняющих отображений. Идея решения состоит в следующем: исходная задача сводится к задаче о существовании неподвижных точек соответствующего разрешающего многозначного интегрального оператора в пространстве непрерывных функций. Для доказательства существования неподвижных точек разрешающего мультиоператора будет использоваться обобщенная теорема типа Б.Н. Садовского о неподвижной точке. Поэтому мы показываем, что разрешающий интегральный мультиоператор является уплотняющим относительно векторной меры некомпактности в пространстве непрерывных функций и преобразует замкнутый шар в этом пространстве в себя.

Ключевые слова: дробная производная Капуто, полулинейное дифференциальное включение, краевая задача, неподвижная точка, уплотняющее мультиотображение, мера некомпактности.

Mathematics Subject Classification: 34G25, 34K09, 34K37, 47H04, 47H08, 47H10

1. Введение

Исследование управляемых систем с нелинейными звеньями является сложным и чрезвычайно важным разделом современной математической теории управления и гармонического анализа, имеющим многочисленные приложения и привлекающим в настоящее время внимание очень многих ученых, как в нашей стране, так и во всем мире. В свою очередь, развитие теории дифференциальных включений связано с тем, что они являются удобным и естественным аппаратом для описания управляемых систем различных классов, систем с разрывными характеристиками, изучаемых в различных разделах теории оптимального управления, математической физики, радиофизики, акустики и др. Однако

G.G. Petrosyan, On antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential inclusion of fractional order with a deviating argument in a Banach space.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60011.

Поступила 16 января 2020 г.

решение этих задач в рамках имеющихся теорий часто является весьма сложной проблемой, поскольку многие из них находят достаточно адекватное описание в терминах дифференциальных уравнений и включений с дробными производными. Многие физические, экономические, биологические и инженерные задачи, в первую очередь связанные с протеканиями процессов в динамических системах, приводят к необходимости исследований краевых задач для дифференциальных уравнений и включений дробного порядка (см. монографии [8, 16, 19, 20, 23], статью [17]). В последние годы исследование целого комплекса задач, связанных с уравнениями и включениями дробного порядка, очень интенсивно ведется в России и за рубежом (см. статьи [1]–[5], [10]–[15], [21, 22]).

В настоящей работе исследуется разрешимость краевой задачи для полулинейного дифференциального включения дробного порядка в сепарабельном банаховом пространстве E следующего вида

$$^{C}D^{q}x(t) \in Ax(t) + F(t, x_t), \ t \in [0, T], \tag{1.1}$$

с граничным антипериодическим условием

$$x_0 \equiv -x_T. \tag{1.2}$$

Здесь символом $^{C}D^{q}$ обозначается дробная производная Капуто порядка $q \in (0, 1)$, $A\colon D(A) \subset E \to E$ линейный оператор, порождающий ограниченную C_0-полугруппу (подробные сведения о теории полугрупп операторов можно найти в монографии [6]), $F\colon [0, T] \times C([-h, 0]; E) \multimap E$ нелинейное многозначное отображение и функция x_t определяет предысторию решения до момента $t \in [0, T]$, т.е., $x_t(s) = x(t+s)$, $s \in [-h, 0]$, $0 < h < T$, соответственно предполагается, что x_0, $x_T \in C([-h, 0]; E)$. Для разрешения поставленной задачи будет использоваться теория топологической степени для многозначных уплотняющих отображений. Идея решения состоит в следующем: исходная задача сводится к задаче о существовании неподвижных точек соответствующего разрешающего многозначного интегрального оператора. Для доказательства существования неподвижных точек разрешающего мультиоператора будет использоваться обобщенная теорема типа Б.Н. Садовского о неподвижной точке.

2. Предварительные сведения

2.1. Дробный интеграл и дробная производная. Вначале введем необходимые понятия и обозначения из дробного математического анализа (более подробные сведения можно найти в следующих монографиях [16, 19, 23]).

Пусть E вещественное банахово пространство.

Определение 2.1. *Дробным интегралом порядка $q \in (0, 1)$ функции $g : [0, T] \to E$ называется функция $I^{q}g$ следующего вида:*

$$I^{q}g(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t - s)^{q-1} g(s)\, ds,$$

где Γ гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(q) = \int_0^{\infty} x^{q-1} e^{-x} dx.$$

Определение 2.2. *Дробной производной Римана–Лиувилля порядка $q \in (0, 1)$ непрерывной функции $g : [0, T] \to E$ называется функция $D^{q}g$ следующего вида:*

$$D^{q}g(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - q)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t - s)^{-q} g(s)\, ds,$$

при условии, что правая часть корректно определена.

Определение 2.3. *Дробной производной Капуто порядка $q \in (N-1, N]$ функции $g \in C^N([0,T];E)$ называется функция ${}^C D_0^q g$ следующего вида:*

$$^C D_0^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(N-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{N-q-1} g^{(N)}(s)\, ds$$

при условии, что правая часть корректно определена.

Дробная производная Капуто порядка $q \in (0,1)$ для непрерывной функции $g : [0,T] \to E$ связана с дробной производной Римана–Лиувилля порядка $q \in (0,1)$ следующим соотношением:

$$^C D^q g(t) = \Big(D^q(g(\cdot) - g(0))\Big)(t).$$

Большим преимуществом дробной производной Капуто, по сравнению с дробной производной Римана–Лиувилля, является сохранение основных свойств производной целого порядка, например равенство нулю производной от константы.

Определение 2.4. *Функция вида*

$$E_{q,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(qn+\beta)}, \quad q, \beta > 0,\ z \in \mathbb{C},$$

называется функцией Миттаг–Леффлера.

Как правило, функцию $E_{q,1}$ обозначают более просто E_q. Функция Миттаг–Леффлера имеет большое значение в дробном исчислении. Например, рассмотрим задачу Коши для скалярного дифференциального уравнения дробного порядка

$$^C D^q x(t) = \lambda x(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \tag{2.1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2.2}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ непрерывная функция. Решением данной задачи является непрерывная функция $x : [0,T] \to \mathbb{R}$ удовлетворяющая условию (2.2), для которой дробная производная Капуто ${}^C D^q x$ также непрерывна и удовлетворяет уравнению (2.1). Известно (см. [16], Пример 4.9), что единственным решением данной задачи является функция

$$x(t) = E_q(\lambda t^q) x_0 + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (t-s)^q) f(s)\, ds. \tag{2.3}$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие соотношения (см. [7])

$$E_{q,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + z E_{q,\beta+q}(z), \tag{2.4}$$

$$\int_0^z t^{\beta-1} E_{q,\beta}(\lambda t^q) dt = z^\beta E_{q,\beta+1}(\lambda z^q). \tag{2.5}$$

2.2. Меры некомпактности и уплотняющие отображения. Пусть $\mathcal{E}$ банахово пространство. Введем следующие обозначения:

- $P(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \mathcal{E} : A \neq \varnothing\}$;
- $Pb(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A$ ограничено $\}$;
- $Pv(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A$ выпукло$\}$;
- $K(\mathcal{E}) = \{A \in Pb(\mathcal{E}) : A$ компактно$\}$;
- $Kv(\mathcal{E}) = Pv(\mathcal{E}) \cap K(\mathcal{E})$.

Определение 2.5. *(См. например [9]). Пусть $(\mathcal{A}, \geqslant)$ частично–упорядоченное множество. Функция $\beta : Pb(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}$ называется мерой некомпактности (мнк) в $\mathcal{E}$, если для каждого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполняется:*

$$\beta(\overline{\mathrm{co}}\, \Omega) = \beta(\Omega),$$

где $\overline{\mathrm{co}}\,\Omega$ *обозначает замыкание выпуклой оболочки* Ω.

Мера некомпактности β называется:

1) *монотонной,* если для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$, включение $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ влечет неравенство $\beta(\Omega_0) \leqslant \beta(\Omega_1)$;
2) *несингулярной,* если для любого $a \in \mathcal{E}$ и любого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполняется равенство $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

Если $\mathcal{A}$ конус в банаховом пространстве, то мера некомпактности β называется:

3) *правильной,* если равенство $\beta(\Omega) = 0$ эквивалентно относительной компактности множества $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$;
4) *вещественной,* если $\mathcal{A}$ подмножество действительных чисел $\mathbb{R}$ с естественным порядком;
5) *алгебраически полуаддитивной,* если $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leqslant \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$, для всех $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$.

Примером вещественной мнк, удовлетворяющей всем вышеперечисленным свойствам, является мнк Хаусдорфа $\chi(\Omega)$:

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{для которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть в } \mathcal{E}\ \}.$$

Отметим, что мнк Хаусдорфа удовлетворяет также свойству полуоднородности:

$$\chi(\lambda\Omega) = |\lambda|\chi(\Omega),$$

для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\Omega \in P(\mathcal{E})$. Более того, если $\mathcal{L} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ линейный ограниченный оператор, то

$$\chi(\mathcal{L}(\Omega)) = \|\mathcal{L}\|\chi(\Omega)$$

для любого $\Omega \in P(\mathcal{E})$.

Норма множества $M \in Pb(\mathcal{E})$ определяется по формуле:

$$\|M\| = \sup_{x \in M} \|x\|_{\mathcal{E}}\,.$$

2.3. Многозначные отображения. Следующие понятия и утверждения можно найти в монографиях [9, 18].

Определение 2.6. *Пусть X замкнутое подмножество $\mathcal{E}$, β-мнк в $\mathcal{E}$. Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathcal{F} : X \to K(\mathcal{E})$ называется уплотняющим относительно мнк β (или β-уплотняющим), если для каждого $\Omega \in Pb(X)$, не являющегося относительно компактным, выполняется:*

$$\beta(F(\Omega)) \ngeqslant \beta(\Omega).$$

Определение 2.7. *Пусть X – метрическое пространство. Мультиотображение $\mathcal{F} : X \to P(\mathcal{E})$ называется полунепрерывным сверху (пн.св.), если*

$$\mathcal{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset V\}$$

является открытым подмножеством X, для каждого открытого множества $V \subset \mathcal{E}$.

Теорема 2.1. *(См. Следствие 3.3.1 из [9]). Пусть $\mathcal{M}$ – ограниченное выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to Kv(\mathcal{M})$ – пн.св., β-уплотняющее мультиотображение, где β – несингулярная мнк в $\mathcal{E}$. Тогда множество неподвижных точек $\mathrm{Fix}\,\mathcal{F} = \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ суть непустое множество.*

Определение 2.8. *Для $1 \leqslant p \leqslant \infty$, мультифункция $G : [0, \tau] \to K(\mathcal{E})$ называется:*

- *L^p-интегрируемой, если она допускает L^p-интегрируемое по Бохнеру сечение, т.е. существует функция $g \in L^p((0, \tau); \mathcal{E})$ такая, что $g(t) \in G(t)$ для п.в. $t \in [0, \tau]$;*

- L^p-*интегрально ограниченной, если существует функция* $\xi \in L^p((0,\tau))$ *такая, что*
$$\|G(t)\| \leqslant \xi(t)$$
для п.в. $t \in [0,\tau]$.

Множество всех L^p-интегрируемых сечений мультифункции $G : [0,\tau] \to K(\mathcal{E})$ будем обозначать следующим образом $\mathcal{S}^p_G[0,\tau]$.

Определение 2.9. *Интеграл для* L^p*-интегрируемой мультифункции* $G : [0,\tau] \to K(\mathcal{E})$ *определяется следующим образом:*
$$\int_0^\tau G(s)\,ds = \Big\{ \int_0^\tau f(s)\,ds : f \in \mathcal{S}^p_G[0,\tau] \Big\}.$$

Лемма 2.1. *(Теорема 4.2.3 из* [9]*). Пусть* $\mathcal{E}$ *сепарабельное банахово пространство и* $G : [0,\tau] \to K(\mathcal{E})$ *интегрируемая, интегрально ограниченная мультифункция такая, что*
$$\chi(G(t)) \leqslant v(t) \quad \textit{для п.в.} \quad t \in [0,\tau],$$
где χ *мнк Хаусдорфа в* $\mathcal{E}$ *и* $v \in L^1_+(0,\tau)$*. Тогда*
$$\chi\Big(\int_0^\tau G(s)\,ds \Big) \leqslant \int_0^\tau v(s)\,ds.$$

3. Существование решений

В дальнейшем для краткости будем обозначать $\mathcal{C} := C([-h,0];E)$.

Будем полагать, что оператор A подчинен условию

(A) $A : D(A) \subseteq E \to E$ линейный замкнутый (не обязательно ограниченный) оператор, порождающий ограниченную C_0-полугруппу $\{U(t)\}_{t \geqslant 0}$ линейных операторов в E.

На многозначный оператор $F : [0,T] \times \mathcal{C} \to Kv(E)$ наложим следующие условия:

($F1$) для любого $\xi \in \mathcal{C}$ мультифункция $F(\cdot,\xi) : [0,T] \to Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

($F2$) для п.в. $t \in [0,T]$ мультиоператор $F(t,\cdot) : E \to Kv(E)$ пн.св.;

($F3$) существует функция $\alpha \in L^\infty_+([0,T])$ такая, что для каждого $\xi \in \mathcal{C}$ мы имеем неравенство
$$\|F(t,\xi)\|_E \leqslant \alpha(t)(1 + \|\xi\|_{\mathcal{C}}) \text{ для п.в. } t \in [0,T],$$

($F4$) существует функция $\mu \in L^\infty_+([0,T])$ такая, что для каждого ограниченного множества $\Delta \subset \mathcal{C}$ выполняется:
$$\chi(F(t,\Delta)) \leqslant \mu(t)\varphi(\Delta),$$
для п.в. $t \in [0,T]$, где $\varphi(\Delta) = \sup_{s\in[-h,0]} \chi(\Delta(s))$, χ мнк Хаусдорфа в E, $\Delta(s) = \{y(s) : y \in \Delta\}$.

Для функции $x \in C([-h,T];E)$ рассмотрим мультифункцию
$$\Phi : [0,T] \to Kv(E), \qquad \Phi(t) = F(t,x_t).$$
Из условий ($F1$) – ($F3$) следует (см. [9], Теорема 1.3.5), что мультифункция Φ является L^∞-интегрируемой, поэтому суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}^\infty_F : C([-h,T];E) \to P(L^\infty([0,T];E))$ может быть определен следующим образом:
$$\mathcal{P}^\infty_F(x) = \mathcal{S}^\infty_\Phi[0,T].$$

Определение 3.1. *Интегральным решением включения* (1.1) *называется функция* $x \in C([-h,T];E)$, *удовлетворяющая равенству*

$$x(t) = \mathcal{G}(t)x(0) + \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\phi(s)ds, \qquad t \in [0,T], \tag{3.1}$$

где $\phi \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$,

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^\infty \xi_q(\theta)U(t^q\theta)d\theta, \mathcal{T}(t) = q\int_0^\infty \theta\xi_q(\theta)U(t^q\theta)d\theta,$$
$$\xi_q(\theta) = \frac{1}{q}\theta^{-1-\frac{1}{q}}\Psi_q(\theta^{-1/q}),$$
$$\Psi_q(\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}\theta^{-qn-1}\frac{\Gamma(nq+1)}{n!}\sin(n\pi q), \theta \in \mathbb{R}_+.$$

Замечание 3.1. *(См. например* [21, 23]*). Справедливы следующие выражения*

$$\xi_q(\theta) \geqslant 0, \ \int_0^\infty \xi_q(\theta)\,d\theta = 1, \ \int_0^\infty \theta\xi_q(\theta)\,d\theta = \frac{1}{\Gamma(q+1)}.$$

Замечание 3.2. *(См. например* [17]*). В скалярном случае, когда* $E = \mathbb{R}$ *и* $U(t) = e^{-\eta t}$ *с* $\eta > 0$*:*

$$\mathcal{G}(t) = E_q(-\eta t^q), \quad \mathcal{T}(t) = E_{q,q}(-\eta t^q), \qquad t \in [0,T],$$

поэтому справедливы следующие равенства:

$$E_q(-z) = \int_0^\infty \xi_q(\theta)e^{-z\theta}d\theta, \ E_{q,q}(-z) = \int_0^\infty q\theta\xi_q(\theta)e^{-z\theta}d\theta,$$

из которых следует, что

$$E_q(\tau) > 0, \ E_{q,q}(\tau) > 0 \text{ для } \tau < 0. \tag{3.2}$$

Лемма 3.1. *(см.* [23, 21]*) Оператор-функции* $\mathcal{G}$ *и* $\mathcal{T}$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) *для любого* $t \in [0,T]$, $\mathcal{G}(t)$ *и* $\mathcal{T}(t)$ *являются линейными ограниченными операторами и более того, если полугруппа* $U(t)$ *удовлетворяет оценке*

$$\|U(t)\| \leqslant e^{-\eta t}, \quad t \geqslant 0, \tag{3.3}$$

с $\eta > 0$, *то*

$$\|\mathcal{G}(t)\| \leqslant E_q(-\eta t^q) \leqslant 1, \qquad t \in [0,T], \tag{3.4}$$

$$\|\mathcal{T}(t)\| \leqslant E_{q,q}(-\eta t^q) \leqslant \frac{q}{\Gamma(1+q)}, \qquad t \in [0,T]; \tag{3.5}$$

2) *оператор-функции* $\mathcal{G}(\cdot)$ *и* $\mathcal{T}(\cdot)$ *являются сильно непрерывными, т.е. функции* $t \in [0,T] \to \mathcal{G}(t)x$ *и* $t \in [0,T] \to \mathcal{T}(t)x$ *непрерывны для всех* $x \in E$.

Для разрешения поставленной задачи будем полагать, что выполняется следующее условие:

$$1 \notin sp[-\mathcal{G}(T)]. \tag{3.6}$$

Рассмотрим мультиоператор $G : C([-h,T];E) \to P(C([-h,T];E))$, заданный следующим образом:

$$G(x) = \{y\},$$

для всех функций y вида

$$\begin{cases} y(t) = -\mathcal{G}(t)\left(I+\mathcal{G}(T)\right)^{-1}\displaystyle\int_0^T (T-s)^{q-1}\mathcal{T}(T-s)\phi(s)ds \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\phi(s)ds, \qquad t\in[0,T], \\ y(s) = -y(T-s), \qquad s\in[-h,0], \end{cases} \tag{3.7}$$

где $\phi \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$.

Корректность определения мультиоператора G справедлива в силу следующей леммы.

Лемма 3.2. *Если $y \in G(x)$ для $x \in C([-h,T];E)$, то $y(0) = -y(T)$ и поэтому $y_0 = -y_T$.*

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} y(T) = &-\mathcal{G}(T)\left(I+\mathcal{G}(T)\right)^{-1}\int_0^T (T-s)^{q-1}\mathcal{T}(T-s)\phi(s)ds + \int_0^T (T-s)^{q-1}\mathcal{T}(T-s)\phi(s)ds \\ =&\Big(-\mathcal{G}(T)\left(I+\mathcal{G}(T)\right)^{-1}+I\Big)\int_0^T (T-s)^{q-1}\mathcal{T}(T-s)\phi(s)ds \\ =&\left(I+\mathcal{G}(T)\right)^{-1}\int_0^T (T-s)^{q-1}\mathcal{T}(T-s)\phi(s)ds = -y(0). \end{aligned}$$

Равенство $y_0 = -y_T$ будет следовать из определения G. □

Теорема 3.1. *Неподвижные точки мультиоператора G являются интегральными решениями задачи* (1.1)–(1.2)*, обратно интегральные решения задачи* (1.1)–(1.2) *являются неподвижными точками мультиоператора G.*

Доказательство. Пусть x интегральное решение задачи (1.1)–(1.2), тогда для $t \in [0,T]$ имеет место выражение

$$x(t) = \mathcal{G}(t)x(0) + \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\phi(s)ds,$$

где $\phi \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$. Тогда из условия (1.2) будет следовать, что

$$x(0) = -x(T) = -\mathcal{G}(T)x(0) - \int_0^T (T-s)^{q-1}\mathcal{T}(T-s)\phi(s)ds,$$

из которого следует равенство

$$x(0) = -\left(I+\mathcal{G}(T)\right)^{-1}\int_0^T (T-s)^{q-1}\mathcal{T}(T-s)\phi(s)ds,$$

благодаря которому мы для $t \in [0,T]$ получаем, что

$$x(t) = -\mathcal{G}(t)\left(I+\mathcal{G}(T)\right)^{-1}\int_0^T (T-s)^{q-1}\mathcal{T}(T-s)\phi(s)ds + \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\phi(s)ds, \tag{3.8}$$

следовательно, $x \in \operatorname{Fix} G$.

Обратно, пусть функция $x \in \operatorname{Fix} G$, тогда она для $t \in [0,T]$ удовлетворяет уравнению (3.8) с $\phi \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$, откуда и следует, что данная функция – интегральное решение включения (1.1). В свою очередь справедливость условия (1.2) следует из леммы 3.2. □

Перейдем к изучению топологических свойств мультиоператора G.

Лемма 3.3. *Мультиоператор G полунепрерывен сверху и имеет компактные значения.*

Доказательство. Очевидно, что утверждения достаточно доказать для сужения мультиоператора G на пространство $C([0,T];E)$. Обозначим это сужение через $\widetilde{G}$.

Мультиоператор $\widetilde{G}\colon C([-h,T];E) \to P(C([0,T];E))$ может быть представлен в виде композиций:
$$\widetilde{G}(x) = \sigma \circ \bar{e} \circ \bar{g} \circ S \circ \mathcal{P}_F^{\infty}(x), \tag{3.9}$$
где
$$\begin{aligned}
&S : L^{\infty}([0,T];E) \to C([0,T];E),\\
&S(\phi)(t) = \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\phi(s)ds,\\
&\bar{g}\colon C([0,T];E) \to C([0,T];E) \times C([0,T];E),\\
&\bar{g}(u) = (u,u),\\
&\bar{e}\colon C([0,T];E) \times C([0,T];E) \to C([0,T];E) \times C([0,T];E),\\
&\bar{e}(u,v) = (w,v),\\
&w(t) = -\mathcal{G}(t)(I + \mathcal{G}(T))^{-1}u(T),\\
&\sigma\colon C([0,T];E) \times C([0,T];E) \to C([0,T];E),\\
&\sigma(u,v) = u + v.
\end{aligned}$$
В работе [10] было доказано, что мультиоператор $S \circ \mathcal{P}_F^{\infty}$ является пн.св. и имеет компактные значения. Теперь, учитывая, что $\bar{g}$, $\bar{e}$ и σ линейные ограниченные операторы, мы получаем желаемый результат. $\square$

Докажем, что мультиоператор G является уплотняющим, для этого введем в рассмотрение конус
$$\mathbb{R}^2_+ = \{\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) : \zeta_1 \geqslant 0, \zeta_2 \geqslant 0\}, \tag{3.10}$$
при этом считая $\mathbb{R}_+$ линейно упорядоченным множеством с естественным порядком и в пространстве $C([-h,T];E)$ введем меру некомпактности
$$\nu : P(C([-h,T];E)) \to \mathbb{R}^2_+,$$
определенную как
$$\nu(\Omega) = \left(\varphi(\Omega), \quad \operatorname{mod}_C(\Omega)\right),$$
где $\varphi(\Omega)$ – модуль послойной некомпактности
$$\varphi(\Omega) = \sup_{t \in [-h,T]} \chi(\{y(t) : y \in \Omega\}),$$
а вторая компонента есть модуль равностепенной непрерывности:
$$\operatorname{mod}_C(\Omega) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{u \in \Omega} \max_{|t_1 - t_2| \leqslant \delta} \|u(t_1) - u(t_2)\|.$$

Теорема 3.2. *При выполнении условий* (A), $(F1)-(F4)$, *а также следующего условия* $(A1)$ *полугруппа* U *подчиняется оценке* (3.3) *для некоторого* $\eta > 0$.
Если
$$\frac{\|\mu\|_{\infty}}{\eta} < 1, \tag{3.11}$$
где $\mu(\cdot)$ *функция из условия* $(F4)$, *то мультиоператор* G *является* ν*-уплотняющим.*

Доказательство. Пусть $\Omega \subset C([-h,T];E)$ непустое ограниченное множество, для которого
$$\nu(G(\Omega)) \geqslant \nu(\Omega). \tag{3.12}$$
Покажем, что Ω относительно компактное множество.

Из (3.12) следует, что
$$\varphi(G(\Omega)) \geqslant \varphi(\Omega). \tag{3.13}$$

Пусть $0 \leqslant t \leqslant T$. Используя оценки (3.4)–(3.5), свойство $(F4)$, и обозначая для $0 \leqslant s \leqslant T$, $\Omega_s \subset \mathcal{C}$,
$$\Omega_s = \{x_s \colon x \in \Omega\},$$
мы получаем
$$\begin{aligned}
\chi\left(G(\Omega)(t)\right) \leqslant & \chi\Bigg(-\mathcal{G}(t)\left(I+\mathcal{G}(T)\right)^{-1}\int_0^T (T-s)^{q-1}\mathcal{T}(T-s)F(s,\Omega_s)\,ds \\
& + \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)F(s,\Omega_s)\,ds\Bigg) \\
\leqslant & \|{-\mathcal{G}(t)}\|\left\|(I-(-\mathcal{G}(T)))^{-1}\right\|\chi\left(\int_0^T (T-s)^{q-1}\mathcal{T}(T-s)F(s,\Omega_s)\,ds\right) \\
& + \chi\left(\int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)F(s,\Omega_s)\,ds\right) \\
\leqslant & \frac{E_q(-\eta t^q)}{1-E_q(-\eta T^q)}\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(-\eta(T-s)^q)\mu(s)\varphi\left(\Omega_s\right)ds \\
& + \int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(-\eta(t-s)^q)\mu(s)\varphi\left(\Omega_s\right)ds \\
\leqslant & \frac{E_q(-\eta t^q)}{1-E_q(-\eta T^q)}\|\mu\|_\infty \sup_{t\in[-h,T]}\chi(\Omega(t))\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(-\eta(T-s)^q)ds \\
& + \|\mu\|_\infty \sup_{t\in[-h,T]}\chi(\Omega(t))\int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(-\eta(t-s)^q)ds.
\end{aligned}$$

Для дальнейшей оценки $\chi\left(G(\Omega)(t)\right)$, $t \in [0,T]$, вычислим интегралы в последней оценке с помощью формулы (2.5):
$$\begin{aligned}
\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(-\eta(T-s)^q)ds &= -\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(-\eta(T-s)^q)d(T-s) \\
&= \int_0^T y^{q-1}E_{q,q}(-\eta y^q)dy = T^q E_{q,q+1}(-\eta T^q).
\end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем
$$\int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(-\eta(t-s)^q)ds = t^q E_{q,q+1}(-\eta t^q).$$

Теперь заметим, что если возьмем $\beta = 1$ в формуле (2.4), то мы получим
$$E_q(-\eta t^q) = \frac{1}{\Gamma(1)} - \eta t^q E_{q,q+1}(-\eta t^q) = 1 - \eta t^q E_{q,q+1}(-\eta t^q).$$

Таким образом, мы получаем следующие равенства
$$\begin{aligned}
&\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(-\eta(T-s)^q)ds = T^q\frac{1}{\eta T^q}\left(1-E_q(-\eta T^q)\right) = \frac{1}{\eta}\left(1-E_q(-\eta T^q)\right), \\
&\int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(-\eta(t-s)^q)ds = \frac{1}{\eta}\left(1-E_q(-\eta t^q)\right).
\end{aligned}$$

Поэтому для $t \in [0,T]$ мы имеем

$$\begin{aligned}\chi\left(G(\Omega)(t)\right) \leqslant & \frac{E_q(-\eta t^q)}{1-E_q(-\eta T^q)} \|\mu\|_\infty \sup_{t\in[-h,T]} \chi(\Omega(t)) \frac{1}{\eta}\left(1-E_q(-\eta T^q)\right) \\ & + \|\mu\|_\infty \sup_{t\in[-h,T]} \chi(\Omega(t)) \frac{1}{\eta}\left(1-E_q(-\eta t^q)\right) \\ = & \frac{\|\mu\|_\infty}{\eta} \sup_{t\in[-h,T]} \chi(\Omega(t)).\end{aligned}$$

Из последней оценки получаем неравенство

$$\sup_{t\in[0,T]} \chi\left(G(\Omega)(t)\right) \leqslant \frac{\|\mu\|_\infty}{\eta} \sup_{t\in[-h,T]} \chi(\Omega(t)). \tag{3.14}$$

В то же время из определения мультиоператора G имеют место соотношения

$$\sup_{s\in[-h,0]} \chi\left(G(\Omega)(s)\right) = \sup_{t\in[T-h,T]} \chi\left(G(\Omega)(t)\right) \leqslant \sup_{t\in[0,T]} \chi\left(G(\Omega)(t)\right). \tag{3.15}$$

Учитывая оценки (3.14) и (3.15), мы имеем

$$\sup_{t\in[-h,T]} \chi\left(G(\Omega)(t)\right) \leqslant \frac{\|\mu\|_\infty}{\eta} \sup_{t\in[-h,T]} \chi(\Omega(t)),$$

или, что тоже самое

$$\varphi\left(G(\Omega)\right) \leqslant \frac{\|\mu\|_\infty}{\eta} \varphi(\Omega).$$

Из последней оценки и неравенств (3.11), (3.13) следует, что

$$\varphi(\Omega) = 0.$$

В работе [10] было показано, что на промежутке $[0,T]$:

$$\operatorname{mod}_C\left(S \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)\right) = 0,$$

для мультиоператора $\widetilde{G}$ из (3.9), мы также получаем

$$\operatorname{mod}_C\left(\widetilde{G}(\Omega)\right) = 0.$$

Снова, обращаясь к определению мультиоператора G, мы имеем равенство

$$\operatorname{mod}_C\left(G(\Omega)\right) = 0,$$

из которого окончательно, в силу (3.12), получим, что

$$\operatorname{mod}_C(\Omega) = 0.$$

В силу теоремы Арцела–Асколи мы получаем, что Ω – относительно компактное множество. □

Теперь мы можем доказать главный результат работы.

Теорема 3.3. *При выполнении условий (A), $(A1)$, $(F1)-(F4)$, если*

$$\frac{k}{\eta} < 1, \tag{3.16}$$

где $k = \max\left\{\|\alpha\|_\infty, \|\mu\|_\infty\right\}$, функции α и μ из условий $(F3)$ и $(F4)$ соответственно, η – константа из условия $(A1)$, задача (1.1)–(1.2) имеет решения.

Доказательство. Возьмем произвольное $x \in C([-h,T];E)$ и $y \in G(x)$, тогда для $\phi \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$ мы имеем для $t \in [0,T]$ следующую оценку:

$$\begin{aligned}
\|y(t)\|_E \leqslant& \left\| -\mathcal{G}(t)\left(I+\mathcal{G}(T)\right)^{-1}\int_0^T (T-s)^{q-1}\mathcal{T}(T-s)\phi(s)ds + \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\phi(s)ds \right\|_E \\
&\leqslant \|-\mathcal{G}(t)\| \left\|(I-(-\mathcal{G}(T)))^{-1}\right\| \int_0^T (T-s)^{q-1}\mathcal{T}(T-s)\alpha(s)(1+\|x_s\|_{\mathcal{C}})ds \\
&\quad + \int_0^t (t-s)^{q-1}\left\|\mathcal{T}(t-s)\right\|\alpha(s)(1+\|x_s\|_{\mathcal{C}})ds \\
&\leqslant \frac{E_q(-\eta t^q)}{1-E_q(-\eta T^q)}\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(-\eta(T-s)^q)\alpha(s)(1+\|x\|_{C([-h,T];E)})ds \\
&\quad + \int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(-\eta(t-s)^q)\alpha(s)(1+\|x\|_{C([-h,T];E)})ds \\
&\leqslant \frac{E_q(-\eta t^q)}{1-E_q(-\eta T^q)}\|\alpha\|_\infty(1+\|x\|_{C([-h,T];E)})\frac{1}{\eta}\left(1-E_q(-\eta T^q)\right) \\
&\quad + \|\alpha\|_\infty(1+\|x\|_{C([-h,T];E)})\frac{1}{\eta}\left(1-E_q(-\eta t^q)\right) \\
&= \frac{\|\alpha\|_\infty}{\eta}(1+\|x\|_{C([-h,T];E)}) \leqslant \frac{k}{\eta}(1+\|x\|_{C([-h,T];E)}).
\end{aligned}$$

Заметим, что в силу определения мультиоператора G, последняя оценка справедлива также для $t \in [-h,0]$.

Теперь, если мы возьмем

$$R \geqslant \frac{k\eta^{-1}}{1-k\eta^{-1}},$$

то неравенство $\|x\|_{C([-h,T];E)} \leqslant R$ влечет оценку $\|G(x)\|_{C([-h,T];E)} \leqslant R$. Таким образом, мультиоператор G преобразует замкнутый шар $B_R(0) \subset C([-h,T];E)$ в себя. По теореме 2.1 G имеет неподвижную точку, которая в силу теоремы 3.1 есть интегральное решение задачи (1.1)–(1.2). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасова М.С., Петросян Г.Г., *О краевой задаче для функционально-дифференциального включения дробного порядка с общим начальным условием в банаховом пространстве* // Известия вузов. Математика. **63**:9, 3–15 (2019).
2. Петросян Г.Г., Афанасова М.С., *О задаче Коши для дифференциального включения дробного порядка с нелинейным граничным условием* // Вестник Воронежского государственного университета. Серия Физика. Математика. 1, 135–151 (2017).
3. M. Afanasova, Y. Ch. Liou, V. Obukhoskii, G. Petrosyan, *On controllability for a system governed by a fractional-order semilinear functional differential inclusion in a Banach space* // Journal of Nonlinear and Convex Analysis. **20**:9, 1919–1935 (2019).
4. J. Appell, B. Lopez, K. Sadarangani, *Existence and uniqueness of solutions for a nonlinear fractional initial value problem involving Caputo derivatives* // J. Nonlinear Var. Anal. 2, 25–33 (2018).
5. I. Benedetti, V. Obukhovskii, V. Taddei, *On generalized boundary value problems for a class of fractional differential inclusions* // Fract. Calc. Appl. Anal. **20**, 1424–1446 (2017).
6. K.-J. Engel, R. Nagel, *A Short Course on Operator Semigroups.* Universitext, Springer, New York (2006).

7. R. Gorenflo, A.A. Kilbas, F. Mainardi, S.V. Rogosin, *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2014).
8. R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics.* World Scientific, Singapore (2000).
9. M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca, *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces.* Walter de Gruyter, Berlin, New-York (2001).
10. M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J.C. Yao, *On semilinear fractional order differential inclusions in Banach spaces* // Fixed Point Theory. **18**:1, 269–292 (2017).
11. M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J.C. Yao, *Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space* // Applicable Analysis. **97**:4, 571–591 (2018).
12. M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J.C. Yao, *On approximate solutions for a class of semilinear fractional-order differential equations in Banach spaces* // Fixed Point Theory Appl. **28**:4, 1–28 (2017).
13. M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J.C. Yao, *Existence and Approximation of Solutions to Nonlocal Boundary Value Problems for Fractional Differential Inclusions* // Fixed Point Theory and Applications. 2, (2019).
14. T.D. Ke, N.V. Loi, V. Obukhovskii, *Decay solutions for a class of fractional differential variational inequalities* // Fract. Calc. Appl. Anal. **18**, 531–553 (2015).
15. T.D. Ke, V. Obukhovskii, N.C. Wong, J.C. Yao, *On a class of fractional order differential inclusions with infinite delays* // Applicable Anal. **92**, 115–137 (2013).
16. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier Science B.V., North-Holland Mathematics Studies, Amsterdam (2006).
17. F. Mainardi, S. Rionero, T. Ruggeri, *On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation* // Waves and Stability in Continuous Media. World Scientific. Singapore. 246-251 (1994).
18. V. Obukhovskii, B. Gelman, *Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications.* World Scientific, Singapore (2020).
19. I. Podlubny, *Fractional Differential Equations.* Academic Press, San Diego (1999).
20. V.E. Tarasov, *Fractional Dynamics. Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*, Springer, London, New York (2010).
21. Z. Zhang, B. Liu, *Existence of mild solutions for fractional evolution equations* // Fixed Point Theory. **15**, 325–334 (2014).
22. Y. Zhou, F. Jiao, *Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations* // Comput. Math. Appl. **59**, 1063-1077 (2010).
23. Y. Zhou, *Fractional Evolution Equations and Inclusions: Analysis and Control.* Elsevier Academic Press, London (2016).

Гарик Гагикович Петросян,
Воронежский государственный университет инженерных технологий,
пр. Революции, 19,
394036, г. Воронеж, Россия
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru