ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 3 (2020). С. 62-70.

УДК 517.988.63+517.927.4+517.956.25

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Э. МУХАМАДИЕВ, А.Б. НАЗИМОВ, А.Н. НАИМОВ

Аннотация. Исследована разрешимость одного класса нелинейных уравнений с малым параметром в банаховом пространстве. Исследование данного класса уравнений затруднено тем, что главная линейная часть уравнения не обратима. Для исследования разрешимости рассматриваемого класса уравнений применен новый метод, в котором сочетаются метод Понтрягина из теории автономных систем на плоскости и методы вычисления вращения векторных полей. При этом используется схема матричного представления расщепляемых операторов, известная в теории ветвления решений нелинейных уравнений. В отличие от метода Понтрягина не предполагается дифференцируемость нелинейного отображения и применяются методы вычисления вращения векторных полей. На основе предложенного метода сформулирована и доказана теорема об условиях разрешимости исследуемого класса нелинейных уравнений. В качестве приложения исследованы две периодические задачи для нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром – периодическая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в резонансном случае и периодическая задача для нелинейного эллиптического уравнения с необратимой линейной частью.
Ключевые слова: нелинейное уравнение с малым параметром, метод Понтрягина, вращение векторного поля, периодическая задача.

Mathematics Subject Classification: 46T20, 47A55, 34B15, 35J66

1. Введение

Рассмотрим разрешимость нелинейных уравнений следующего вида:

$$Ax = \mu f(x, \mu), \quad x \in E. \tag{1.1}$$

Здесь E – банахово пространство, μ – вещественный параметр, $|\mu| \leqslant \mu_0$, $A : D_A \mapsto E$ – линейный оператор с областью определения $D_A \subset E$, A – замкнутый и нормально разрешимый, $f : E \times [-\mu_0, \mu_0] \mapsto E$ – непрерывное отображение.

Если оператор A обратим, то уравнение (1.1) сводится к уравнению

$$x = \mu A^{-1} f(x, \mu), \quad x \in E. \tag{1.2}$$

Предполагая A^{-1} вполне непрерывным и применяя принцип неподвижной точки Шаудера (см. [1, §35]), можно доказать, что уравнение (1.2) разрешимо при малых значениях параметра μ.

В настоящей статье исследована разрешимость уравнения (1.1) с необратимым оператором A. В этом случае применяется новый метод, исходящий от метода Понтрягина,

E. Mukhamadiev, A.B. Nazimov, A.N. Naimov, On solvability class of nonlinear equations with small parameter in Banach space.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-47-350001р-а, № 19-01-00103а).

Поступила 11 декабря 2019 г.

известного в теории автономных систем на плоскости (см. [2], [3, гл. 11, §7]). Метод Понтрягина применяется для доказательства существования предельного цикла нелинейной автономной системы, состоящей из линейной части и нелинейного возмущения с малым параметром. Идея метода Понтрягина заключается в том, что с помощью нелинейного возмущения выделяется определенное периодическое решение соответствующей линейной системы и посредством этого решения доказывается существование цикла у нелинейной автономной системы при малых значениях параметра. Данная идея в настоящей работе реализована применительно к нелинейным уравнениям вида (1.1). При этом используется схема матричного представления расщепляемых операторов, известная в теории ветвления решений нелинейных уравнений [4, гл. 5, §22]. К тому же, в отличие от метода Понтрягина не предполагается дифференцируемость нелинейного отображения f и применяются методы вычисления вращения векторных полей (см. напр., [5, гл. 2]). На основе предложенного метода сформулирована и доказана теорема о разрешимости уравнения (1.1) при малых значениях параметра μ.

В качестве приложения исследованы две периодические задачи для нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром:

1) периодическая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = Cy + \mu g(t, y, \mu), \quad t \in (0, \omega), \quad y \in \mathbb{R}^n, \qquad y(0) = y(\omega),$$

в резонансном случае, т. е. в случае когда матрица C имеет чисто мнимые собственные значения $\pm i2\pi/\omega$;

2) периодическая задача для нелинейного эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (k_0^2 + l_0^2)u = \mu F(x, y, u, \mu), \quad (x, y) \in \Pi = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi),$$
$$u(0, y) = u(2\pi, y), \quad u(x, 0) = u(x, 2\pi), \quad x, y \in [0, 2\pi],$$

где линейная часть не обратима.

Полученные результаты являются новыми и в последующем могут быть использованы при исследовании других классов краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений. В работе [6] уравнение (1.1) исследовано в конечномерном случае $E = \mathbb{R}^n$. В бесконечномерном случае, когда E – гильбертово пространство, уравнение вида (1.1) исследовано в работе [7] на примере одной нелинейной краевой задачи с малым параметром.

2. Основные результаты

Пусть линейный оператор $A : D_A \mapsto E$ задан на линейном многообразии D_A банахового пространства E с нормой $|| \cdot ||$ и пусть выполнены следующие условия:

1) $\operatorname{Ker} A := \{x \in D_A : Ax = 0\} \neq \{0\}$;

2) $E = E_1 \oplus E_2$, где E_1, E_2 – линейные многообразия, $E_1 \subset D_A$, $E_2 \cap \operatorname{Ker} A = \{0\}$ и $A(E_2 \cap D_A) = A(D_A)$.

Разложение $E = E_1 \oplus E_2$ равносильно существованию двух линейных операторов $P_i : E \mapsto E_i$, $i = 1, 2$, обладающих свойствами $P_i^2 = P_i$, $i = 1, 2$, $P_1 + P_2 = I$ – единичный оператор, эти операторы называют проекторами. По ним определим линейные операторы $A_{ij} = P_i A P_j : (E_j \cap D_A) \mapsto E_i$, $i, j = 1, 2$. В силу условия $E_2 \cap \operatorname{Ker} A = \{0\}$ существует линейный оператор A_{22}^{-1}, обратный к оператору A_{22}.

Верна следующая лемма.

Лемма 2.1. *Если выполнены условия 1), 2) и задано отображение $f : D_A \times [-\mu_0, \mu_0] \mapsto E$, то уравнение (1.1) при $\mu \neq 0$ равносильно системе уравнений*

$$P_1 f(x_1 + x_2, \mu) - A_{12} A_{22}^{-1} P_2 f(x_1 + x_2, \mu) = 0,$$

$$x_2 = -A_{22}^{-1}A_{21}x_1 + \mu A_{22}^{-1}P_2 f(x_1 + x_2, \mu), \tag{2.1}$$

где $x_1 = P_1 x$, $x_2 = P_2 x$.

Лемма 2.1 доказана по аналогии с теоремой 22.1 из книги [4, гл. 5, §22]. Из условий 1) и 2) вытекает, что $(I - A_{22}^{-1}A_{21}) : E_1 \mapsto \operatorname{Ker} A$ – изоморфизм, поэтому в качестве E_1 можно взять $\operatorname{Ker} A$. Нахождение $\operatorname{Ker} A$ для некоторых операторов A может быть затруднительно, в таких случаях проще подобрать E_1 и E_2, удовлетворяющие условию 2).

Для исследования разрешимости системы уравнений (2.1) предположим, что

3) A – замкнутый и нормально разрешимый;

4) $\dim E_1 < \infty$.

В линейных многообразиях E_1 и $E_A = E_2 \cap D_A$ введем нормы:

$$||x_1||_{E_1} := ||x||, \qquad ||x_2||_{E_A} := ||x_2|| + ||Ax_2||.$$

Из условия 3) следует, что E_A – банахово пространство, операторы $A_{i,j}$, $i, j = 1, 2$ и A_{22}^{-1} ограничены.

Пусть выполнены условия 1) – 4) и условие

5) оператор $f(x_1 + x_2, \mu) : E_1 \times E_A \times [-\mu_0, \mu_0] \mapsto E$ вполне непрерывный.

Тогда справедлива

Лемма 2.2. *Если выполнены условия 1) – 5) и для* $\mu_n \to 0$, $n \to \infty$ *при каждом* $\mu = \mu_n$ *система уравнений (2.1) разрешима на ограниченном множестве* $U \subset E_1 \times E_A$, *то разрешимо уравнение*

$$(P_1 - A_{12}A_{22}^{-1}P_2) f(x, 0) = 0, \quad x \in \operatorname{Ker} A. \tag{2.2}$$

Таким образом, разрешимость уравнения (2.2) необходима для разрешимости системы уравнений (2.1) при всех малых значениях μ. Следуя методу Понтрягина [3, гл. 11, §7], зададим одно изолированное решение уравнения (2.2) и по нему докажем существование решения системы уравнений (2.1) при всех малых значениях μ. Для этого применим методы вычисления вращения векторных полей [5, гл. 2].

Рассмотрим конечномерное векторное поле $\Phi : E_1 \mapsto E_1$, определяемое формулой

$$\Phi(x_1) = (P_1 - A_{12}A_{22}^{-1}P_2) f(x_1 - A_{22}^{-1}A_{21}x_1, 0), \quad x_1 \in E_1.$$

При любом $x_1 \in E_1$ имеем $(x_1 - A_{22}^{-1}A_{21}x_1) \in \operatorname{Ker} A$ (см. [4, гл. 5, §22]). Предположим, что существуют $x_1^* \in E_1$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

6) $\Phi(x_1^*) = 0$ и $\Phi(x_1) \neq 0$ при $0 < ||x_1 - x_1^*||_{E_1} \leqslant \varepsilon$;

7) $\gamma(\Phi, S_\varepsilon^1(x_1^*)) \neq 0$, где $\gamma(\Phi, S_\varepsilon^1(x_1^*))$ – вращение векторного поля Φ на сфере

$$S_\varepsilon^1(x_1^*) := \{x_1 \in E_1 : ||x_1 - x_1^*||_{E_1} = \varepsilon\}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия 1) – 7). Тогда существует* $\mu_1 \in (0, \mu_0)$ *такое, что при всех* $\mu \in (-\mu_1, \mu_1)$ *уравнение (1.1) разрешимо на множестве*

$$U_\varepsilon(x_1^*) = \{x_1 + x_2 : x_1 \in E_1, x_2 \in E_A, ||x_1 - x_1^*||_{E_1}^2 + ||x_2 + A_{22}^{-1}A_{21}x_1^*||_{E_A}^2 \leqslant \varepsilon^2\}.$$

Замечание 2.1. Аналогичная теорема имеет место, если рассматривать уравнение

$$Ax = h + \mu f(x, \mu), \quad x \in E, \tag{1.1$_h$}$$

где $h \in A(D_A)$. В частности, при $f(x, \mu) = x - x^*$, $x^* \in \operatorname{Ker} A$ получим уравнение $(A - \mu I)(x - x^*) = h$, которое называется регуляризованное сдвигом. Такие уравнения в конечномерном и гильбертовом пространствах исследованы в монографии [8]. В общем случае уравнение (1.1_h) можно считать нелинейной регуляризацией уравнения $Ax = h$.

Применяя теорему 2.1, исследуем разрешимость периодической задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = Cy + \mu g(t, y, \mu), \quad t \in (0, \omega), \quad y \in \mathbb{R}^n, \qquad y(0) = y(\omega), \tag{2.3}$$

где $n > 1$, $\omega > 0$, C – вещественная квадратная матрица порядка n. Пусть выполнены условия:

8) матрица C имеет чисто мнимые собственные значения $\pm i2\pi/\omega$;

9) отображение $g : \mathbb{R}^{n+2} \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывно и ω-периодично по t;

10) существует вектор $x_1^* \in \mathbb{R}^n$, обладающий свойствами

а) вектор x_1^* принадлежит подпространству

$$E_1^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (e^{-\omega C} - I)x = 0 \right\};$$

б) для любого вектора x из некоторой окрестности

$$U_r(x_1^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_1^*| < r\}$$

точки x_1^* существует единственное решение $p(t, x, \mu)$, $t \in [0, \omega]$ задачи Коши

$$y' = Cy + \mu g(t, y, \mu), \quad y(0) = x;$$

в) вектор x_1^* является изолированным нулем векторного поля $\Phi_n : E_1^n \mapsto E_1^n$, где

$$\Phi_n(x_1) = A_{12} A_{22}^{-1} P_2 \int_0^\omega e^{-\tau C} g(\tau, e^{\tau C} x_1, 0) d\tau, \quad x_1 \in E_1^n,$$

$A_{ij} = P_i A P_j$, $i, j = 1, 2$, $A = (e^{-\omega C} - I)$, $P_i : \mathbb{R}^n \mapsto E_i^n$, $i = 1, 2$ – ортогональные проекторы, $E_2^n = (E_1^n)^\perp$ – ортогональное дополнение к E_1^n;

г) отлично от нуля вращение $\gamma(\Phi_n, S_\varepsilon^n(x_1^*))$ векторного поля Φ_n на сфере

$$S_\varepsilon^n(x_1^*) = \{x_1 \in E_1^n : |x_1 - x_1^*| = \varepsilon\}$$

положительного радиуса ε, где $\varepsilon < r$.

Справедлива следующая теорема о разрешимости периодической задачи (2.3).

Теорема 2.2. *Если выполнены условия 8)–10), то существует $\mu_1 > 0$ такое, что периодическая задача (2.3) разрешима при всех $\mu \in (-\mu_1, \mu_1)$.*

Рассмотрим разрешимость периодической задачи для нелинейного эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (k_0^2 + l_0^2)u = \mu F(x, y, u, \mu), \quad (x, y) \in \Pi = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi), \tag{2.4}$$

$$u(0, y) = u(2\pi, y), \quad u(x, 0) = u(x, 2\pi), \quad x, y \in [0, 2\pi], \tag{2.5}$$

где k_0, l_0 – фиксированные натуральные числа, $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$, $F : \overline{\Pi} \times \mathbb{C} \times [-\mu_0, \mu_0] \mapsto \mathbb{C}$ – непрерывное отображение, $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость. Решением задачи (2.4), (2.5) назовем функцию $u \in C(\overline{\Pi})$, которая вместе с частными производными второго порядка из $L_2(\Pi)$ удовлетворяют уравнению (2.4) и условиям (2.5).

Введем следующие обозначения:

$$< u, v >= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi, \eta) \overline{v(\xi, \eta)} d\xi d\eta, \quad ||v||^2 =< v, v >,$$

$$\psi_{kl}(x, y) = e^{i(kx+ly)}, \quad c_{kl}(v) =< v, \psi_{kl} >, \quad k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad ,$$

$$J = \{(k, l) : k, l - \text{ целые}, \, k^2 + l^2 = k_0^2 + l_0^2\}, \qquad \widetilde{E}_1 = \{v \in L_2(\Pi) : c_{kl}(v) = 0, (k, l) \notin J\},$$

$$\widetilde{\Phi}(v) = \sum_{(k,l) \in J} < F(\cdot, \cdot, v, 0), \psi_{kl} > \psi_{kl}.$$

Предположим, что существуют $v_1^* \in \widetilde{E}_1$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

11) $\widetilde{\Phi}(v_1^*) = 0$ и $\widetilde{\Phi}(v_1) \neq 0$ при $0 < ||v_1 - v_1^*|| \leqslant \varepsilon$;

12) $\gamma(\widetilde{\Phi}, \widetilde{S}^1_\varepsilon(v_1^*)) \neq 0$, где $\gamma(\widetilde{\Phi}, \widetilde{S}^1_\varepsilon(v_1^*))$ – вращение конечномерного векторного поля $\widetilde{\Phi} : \widetilde{E}_1 \mapsto \widetilde{E}_1$ на сфере

$$\widetilde{S}^1_\varepsilon(v_1^*) = \{v \in \widetilde{E}_1 : ||v_1 - v_1^*|| = \varepsilon\|.$$

Из теоремы 2.1 вытекает

Теорема 2.3. *Если выполнены условия 11) и 12), то существует $\mu_1 > 0$ такое, что при всех $\mu \in (-\mu_1, \mu_1)$ задача (2.4), (2.5) разрешима.*

3. Доказательство теоремы 2.1

Сначала проверим справедливость лемм 2.1 и 2.2.

Доказательство леммы 2.1. Пусть x – решение уравнения (1.1) при некотором $\mu \neq 0$. Тогда представляя x в виде суммы $x = x_1 + x_2$, где $x_1 = P_1 x \in E_1$, $x_2 = P_2 x \in E_2$, имеем:

$$Ax_1 + Ax_2 = \mu f(x_1 + x_2, \mu).$$

К обеим частям данного равенства поочередно применяя P_1 и P_2 получим:

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = \mu P_1 f(x_1 + x_2, \mu), \quad A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = \mu P_2 f(x_1 + x_2, \mu).$$

Из второго равенства найдем

$$x_2 = -A_{22}^{-1}A_{21}x_1 + \mu A_{22}^{-1}P_2 f(x_1 + x_2, \mu),$$

и подставим в первое равенство:

$$A_{11}x_1 - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}x_1 + \mu A_{12}A_{22}^{-1}P_2 f(x_1 + x_2, \mu) = \mu P_1 f(x_1 + x_2, \mu).$$

Заметим, что для любого $z_1 \in E_1$ имеет место равенство $A_{11}z_1 = A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}z_1$. Действительно, для $Az_1 \in A(D_A)$, согласно условию $A(E_2 \cap D_A) = A(D_A)$, существует элемент $u_2 \in E_2 \cap D_A$ такой, что $Au_2 = Az_1$. К этому равенству, применяя P_1 и P_2, получим $A_{11}z_1 = A_{12}u_2$, $A_{21}z_1 = A_{22}u_2$. Отсюда следует, что $u_2 = A_{22}^{-1}A_{21}z_1$ и $A_{11}z_1 = A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}z_1$. Учитывая данное равенство и $\mu \neq 0$, получим:

$$A_{12}A_{22}^{-1}P_2 f(x_1 + x_2, \mu) = P_1 f(x_1 + x_2, \mu).$$

Таким образом, если x – решение уравнения (1.1) при $\mu \neq 0$, то пара $x_1 = P_1 x$ и $x_2 = P_2 x$ является решением системы уравнений (2.1). Обратное утверждение проверяется непосредственно.

Леммы 2.1 доказана. □

Если $f \equiv 0$, то из леммы 2.1 следует, что $x \in \operatorname{Ker} A$ тогда и только тогда, когда для его проекций $x_1 = P_1 x$ и $x_2 = P_2 x$ имеет место равенство $x_2 = -A_{22}^{-1}A_{21}x_1$. Учитывая это, легко проверить, что $(I - A_{22}^{-1}A_{21}) : E_1 \mapsto \operatorname{Ker} A$ – изоморфизм.

Доказательство леммы 2.2. Пусть $\mu_n \to 0$, $n \to \infty$ и при каждом μ_n, $n = 1, 2, \ldots$ существует решение (x_{1n}, x_{2n}) системы уравнений (2.1) из ограниченного множества $U \subset E_1 \times E_A$. Тогда при каждом $n = 1, 2, \ldots$ имеем:

$$x_{2n} = -A_{22}^{-1}A_{21}x_{1n} + \mu_n A_{22}^{-1}P_2 f(x_{1n} + x_{2n}, \mu_n),$$
$$P_1 f(x_{1n} + x_{2n}, \mu) - A_{12}A_{22}^{-1}P_2 f(x_{1n} + x_{2n}, \mu_n) = 0.$$

В силу условия $\dim E_1 < \infty$ можно считать, что $x_{1n} \to x_1^*$, $n \to \infty$. Из первого равенства, согласно условию 5), следует, что последовательность $\{x_{2n}\}_1^\infty$ компактна, поэтому можно считать, что $x_{2n} \to x_2^*$, $n \to \infty$. В равенствах, переходя к пределу, получим:

$$x_2^* = -A_{22}^{-1}A_{21}x_1^*, \quad P_1 f(x_1^* + x_2^*, 0) - A_{12}A_{22}^{-1}P_2 f(x_1^* + x_2^*, 0) = 0.$$

Первое равенство равносильно тому, что $x^* = x_1^* + x_2^* \in \operatorname{Ker} A$. А из второго равенства вытекает разрешимость уравнения (2.2).

Лемма 2.2 доказана. □

Доказательство теоремы 2.1. При $\mu = 0$ разрешимость уравнения (1.1) очевидна. А при $\mu \neq 0$, согласно лемме 2.1, разрешимость уравнения (1.1) на множестве $U_\varepsilon(x_1^*)$ равносильна разрешимости системы уравнений (2.1) на множестве

$$W_\varepsilon = \{(x_1, x_2) : x_1 \in E_1, x_2 \in E_A, ||x_1 - x_1^*||_{E_1}^2 + ||x_2 + A_{22}^{-1}A_{21}x_1^*||_{E_A}^2 \leqslant \varepsilon^2\}.$$

Решение системы уравнений (2.1) на множестве W_ε можно рассматривать как нуль вполне непрерывного векторного поля $\Phi_\mu = (\Phi_{1\mu}, \Phi_{2\mu}) : W_\varepsilon \mapsto E_1 \times E_A$, где

$$\Phi_{1\mu}(x_1, x_2) = (P_1 - A_{12}A_{22}^{-1}P_2)f(x_1 + x_2, \mu),$$
$$\Phi_{2\mu}(x_1, x_2) = x_2 + A_{22}^{-1}(A_{21}x_1 - \mu P_2 f(x_1 + x_2, \mu)).$$

Покажем, что при всех $\mu \in (-\mu_1, \mu_1)$, где $\mu_1 \in (0, \mu_0)$, векторное поле Φ_μ не обращается в нуль на границе ∂W_ε множества W_ε и для вращения $\gamma(\Phi_\mu, \partial W_\varepsilon)$ векторного поля Φ_μ на ∂W_ε верна формула

$$\gamma(\Phi_\mu, \partial W_\varepsilon) = \gamma(\Phi, S_\varepsilon^1(x_1^*)), \quad \mu \in (-\mu_1, \mu_1), \tag{3.1}$$

где Φ – конечномерное векторное поле, определяемое условиями 6) и 7). Тогда $\gamma(\Phi_\mu, \partial W_\varepsilon) \neq 0$ (в силу условия 7), и согласно принципу ненулевого вращения [5, гл. 2] на множестве W_ε существует хотя бы один нуль векторного поля Φ_μ при всех $\mu \in (-\mu_1, \mu_1)$. Этим самым теорема 2.1 будет доказана.

Вычислим $\gamma(\Phi_\mu, \partial W_\varepsilon)$, гомотопируя векторное поле Φ_μ к простому векторному полю. Для этого рассмотрим семейство вполне непрерывных векторных полей $\Psi_{\lambda,\mu} = (\Psi_{\lambda,1\mu}, \Psi_{\lambda,2\mu})$, $\lambda \in [0, 1]$, $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$, где

$$\Psi_{\lambda,1\mu}(x_1, x_2) = (P_1 - A_{12}A_{22}^{-1}P_2)f(x_1 + (1 - \lambda)x_2 - \lambda A_{22}^{-1}A_{21}x_1, (1 - \lambda)\mu),$$
$$\Psi_{\lambda,2\mu}(x_1, x_2) = x_2 + A_{22}^{-1}A_{21}x_1 - (1 - \lambda)\mu A_{22}^{-1}P_2 f(x_1 + x_2, \mu).$$

Проверим существование $\mu_1 \in (0, \mu_0)$ такого, что

$$\Psi_{\lambda,\mu}(x_1, x_2) \neq 0 \quad \text{при всех} \quad (x_1, x_2) \in \partial W_\varepsilon, \quad \lambda \in [0, 1], \quad \mu \in (-\mu_1, \mu_1). \tag{3.2}$$

Если (3.2) не верно, то существуют последовательности $\lambda_n \in [0, 1]$, $\mu_n \in (-\mu_0, \mu_0)$, $(x_{1n}, x_{2n}) \in \partial W_\varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$ такие, что $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$ и

$$(P_1 - A_{12}A_{22}^{-1}P_2)f(x_{1n} + (1 - \lambda_n)x_{2n} - \lambda_n A_{22}^{-1}A_{21}x_{1n}, (1 - \lambda_n)\mu_n) = 0,$$
$$x_{2n} + A_{22}^{-1}A_{21}x_{1n} - (1 - \lambda_n)\mu_n A_{22}^{-1}P_2 f(x_{1n} + x_{2n}, \mu_n) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Из этих равенств вытекает компактность последовательности $\{(x_{1n}, x_{2n})\}_1^\infty$. Поэтому можно считать, что $x_{1n} \to x_{10}$, $x_{2n} \to x_{20}$, $\lambda_n \to \lambda_0$ при $n \to \infty$. В равенствах, переходя к пределу, получим:

$$(P_1 - A_{12}A_{22}^{-1}P_2)f(x_{10} + (1 - \lambda_0)x_{20} - \lambda_0 A_{22}^{-1}A_{21}x_{10}, 0) = 0,$$
$$x_{20} + A_{22}^{-1}A_{21}x_{10} = 0, \quad ||x_{10} - x_1^*||_{E_1}^2 + ||x_{20} + A_{22}^{-1}A_{21}x_1^*||_{E_2}^2 = \varepsilon^2.$$

Отсюда следует, что $x_{10} \neq x_1^*$ и $\Phi(x_{10}) = 0$, а это противоречит условию 6). Следовательно, (3.2) верно.

Из (3.2) вытекает, что при всех $\mu \in (-\mu_1, \mu_1)$ векторное поле Φ_μ на ∂W_ε гомотопно векторному полю

$$\Psi(x_1, x_2) = (\Phi(x_1), x_2 + A_{22}^{-1}A_{21}x_1).$$

Отсюда, согласно свойству вращения [5, гл. 2], имеем:

$$\gamma(\Phi_\mu, \partial W_\varepsilon) = \gamma(\Psi, \partial W_\varepsilon), \quad \mu \in (-\mu_1, \mu_1). \tag{3.3}$$

Легко проверить, что векторное поле Ψ на ∂W_ε линейно гомотопно векторному полю $\widetilde{\Psi}(x_1, x_2) = (\Phi(x_1), x_2 + A_{22}^{-1} A_{21} x_1^*)$, поэтому

$$\gamma(\Psi, \partial W_\varepsilon) = \gamma(\widetilde{\Psi}, \partial W_\varepsilon). \tag{3.4}$$

Для вращения $\gamma(\widetilde{\Psi}, \partial W_\varepsilon)$ векторного поля $\widetilde{\Psi}$, согласно свойству вращения [5, гл. 2], имеем:

$$\gamma(\widetilde{\Psi}, \partial W_\varepsilon) = \gamma(\Phi, S_\varepsilon^1(x_1^*)). \tag{3.5}$$

Из формул (3.3)–(3.5) непосредственно вытекает формула (3.1).

Теорема 2.1 доказана. □

4. Разрешимость периодических задач

Сначала проверим справедливость теоремы 2.2. Рассмотрим уравнение

$$\left(e^{-\omega C} - I\right) x = \mu \int_0^\omega e^{-\tau C} g(\tau, p(\tau, x, \mu), \mu) d\tau, \quad x \in U_r(x_1^*). \tag{4.1}$$

Верна следующая лемма.

Лемма 4.1. *Если x – решение уравнения (4.1), то вектор-функция $y(t) = p(t, x, \mu)$ является решением периодической задачи (2.3).*

Доказательство. Вектор-функция $y(t) = p(t, x, \mu)$ является единственным решением задачи

$$y' = Cy + \mu g(t, p(t, x, \mu), \mu), \quad y(0) = x.$$

Отсюда находим $y(t)$:

$$y(t) = e^{tC} \left(x + \mu \int_0^t e^{-\tau C} g(\tau, p(\tau, x, \mu), \mu) d\tau \right).$$

Проверим ω-периодичность $y(t)$, воспользуясь тем, что x – решение уравнения (4.1):

$$y(\omega) = e^{\omega C} \left(x + \mu \int_0^\omega e^{-\tau C} g(\tau, p(\tau, x, \mu), \mu) d\tau \right) =$$

$$= x + e^{\omega C} \left(- \left(e^{-\omega C} - I\right) x + \mu \int_0^\omega e^{-\tau C} g(\tau, p(\tau, x, \mu), \mu) d\tau \right) = y(0).$$

Лемма 4.1 доказана. □

Согласно лемме 4.1 разрешимость периодической задачи (2.3) сводится к разрешимости уравнения (4.1). Покажем разрешимость уравнения (4.1), применяя теорему 2.1.

Положим

$$E = \mathbb{R}^n, \quad A = e^{-\omega C} - I, \quad f(x, \mu) = \int_0^\omega e^{-\tau C} g(\tau, p(\tau, x, \mu), \mu) d\tau.$$

В силу условия 8) имеем $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$. Условия 1) – 5) выполнены, если возьмем $E_1 = \operatorname{Ker} A$ и $E_2 = E_1^\perp$. Из условий 10в) и 10г) следует, что вектор x_1^* удовлетворяет условиям 6) и 7). Отсюда, в силу теоремы 2.1, вытекает, что уравнение (4.1) разрешимо при $\mu \in (-\mu_1, \mu_1)$. Теорема 2.2 доказана.

В качестве примера рассмотрим следующую систему трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} z' = i\frac{2\pi}{\omega} z + \mu \left(e^{i6\pi t/\omega} \overline{z}^2 + \varphi(t, z, y_3, \mu) \right), \\ y_3' = a y_3 + \mu \psi(t, z, y_3, \mu), \end{cases} \tag{4.2}$$

где i – мнимая единица, $z = y_1 + iy_2$, $\overline{z} = y_1 - iy_2$, $a \neq 0$, $\varphi(t, z, y_3, 0) \equiv 0$. Функции $\varphi(t, z, y_3, \mu)$ и $\psi(t, z, y_3, \mu)$ предполагаем заданными и непрерывными по совокупности переменных, ω-периодичными по t и удовлетворяющими условию Липшица по переменным z, y_3 в некоторой окрестности точки $x_1^* = (0, 0, 0)$.

Проверим выполнимость условий теоремы 2.2:

$$E_1^3 = \left\{(\xi_1, \xi_2, 0)^\top : \xi_1, \xi_2 \in (-\infty, +\infty)\right\}, \quad E_2^3 = \left\{(0, 0, \xi_3)^\top : \xi_3 \in (-\infty, +\infty)\right\},$$

$$e^{tC}x = e^{tC}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^\top = \left(e^{i2\pi t/\omega}(\xi_1 + i\xi_2), e^{at}\xi_3\right)^\top,$$

$$\Phi_3(\xi_1, \xi_2, 0) = \left(\int_0^\omega e^{-i2\pi\tau/\omega}\left[e^{i6\pi\tau/\omega}\overline{\left(e^{i2\pi\tau/\omega}(\xi_1 + i\xi_2)\right)}^2\right] d\tau, 0\right)^\top = \left(\omega\overline{(\xi_1 + i\xi_2)}^2, 0\right)^\top,$$

$$\gamma\left(\Phi_3, S_\varepsilon^3(x_1^*)\right) = -2.$$

Последнее равенство верно в силу теоремы 9.3, приведенной в книге [9, гл. 9]. Таким образом, все условия теоремы 2.2 выполнены, поэтому при малых значениях параметра μ существует ω-периодическое решение системы уравнений (4.2).

Теперь покажем, что теорема 2.3 вытекает из теоремы 2.1. Для этого определим

$$E = L_2(\Pi), \quad Av = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (k_0^2 + l_0^2)v,$$

$$E_1 = \{v \in L_2(\Pi) : c_{kl}(v) = 0, (k, l) \notin J\}, \quad E_2 = \{v \in L_2(\Pi) : c_{kl}(v) = 0, (k, l) \in J\},$$

$$D_A = \{v \in L_2(\Pi) : \sum_{(k,l)} \left(1 + k^2 + l^2\right)^2 |c_{kl}(v)|^2 < \infty\}, \quad E_A = E_2 \cap D_A.$$

Тогда имеем:

$$E = E_1 \oplus E_2, \quad E_1 = \operatorname{Ker} A, \quad E_2 \cap \operatorname{Ker} A = \{0\}, \quad A(E_A) = A(D_A) = E_2,$$

$$A - \text{ замкнутый, нормально разрешимый оператор,}$$

$$E_A \text{ компактно вложено в } E,$$

$$F(\cdot, \cdot, v_1 + v_2, \mu) : E_1 \times E_A \times [-\mu_0, \mu_0] \mapsto E - \text{ вполне непрерывный оператор.}$$

Условия 1) – 5) выполнены. Из условий 11) и 12) следует выполнимость условий 6) и 7). Следовательно, задача (2.4), (2.5) разрешима при $\mu \in (-\mu_1, \mu_1)$.

В качестве функции F, удовлетворяющей условиям 11) и 12), можно взять, например, следующую

$$F(x, y, v, \mu) = \left(v - e^{i(k_0 x + l_0 y)}\right) + \sum_{\nu=2}^{m} d_\nu \left(v - e^{i(k_0 x + l_0 y)}\right)^\nu + F_1(x, y, v, \mu),$$

где d_ν, $\nu = \overline{2, m}$ – комплексные числа, функция $F_1(x, y, v, \mu)$ непрерывна по совокупности переменных и $F_1(x, y, v, 0) \equiv 0$. В этом случае, полагая $v_1^*(x, y) = \exp\left(i(k_0 x + l_0 y)\right)$ и учитывая конечномерность $\widetilde{E}_1$, легко проверить, что при малом фиксированном $\varepsilon > 0$ и при всех $v_1 \in \widetilde{E}_1$, $0 < ||v_1 - v_1^*|| \leqslant \varepsilon$, имеет место неравенство

$$< \widetilde{\Phi}(v_1), v_1 - v_1^* > \quad \geq \quad \alpha||v_1 - v_1^*||^2,$$

где $\alpha > 0$ и не зависит от v_1. Из этого неравенства следует, что выполнено условие 11) и

$$\gamma(\widetilde{\Phi}, \widetilde{S}_\varepsilon^1(v_1^*)) = 1,$$

так как векторное поле $\widetilde{\Phi}$ на сфере $\widetilde{S}_\varepsilon^1(v_1^*)$ линейно гомотопно векторному полю $(v_1 - v_1^*)$ и $\gamma(v_1 - v_1^*, \widetilde{S}_\varepsilon^1(v_1^*)) = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Треногин В. А. *Функциональный анализ: учебник. 3-е изд.* М.: Физматлит. 2002. 488 с.
2. Понтрягин Л. С. *О динамических системах, близких к гамильтоновым* // ЖЭТФ. **4**:8, 234–236 (1934).
3. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. 2-е изд.* М.: Наука. 1990. 486 с.
4. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* М.: Наука. 1969. 456 с.
5. Красносельский М. А., Забрейко П. П. *Геометрические методы нелинейного анализа.* М.: Наука. 1975. 512 с.
6. Мухамадиев Э., Назимов А. Б., Наимов А. Н. *Исследование разрешимости одного класса нелинейных уравнений с малым параметром* // Вестник Вологодского государственного университета. Серия: Технические науки. **3**:1, 50–53 (2019).
7. Мухамадиев Э., Наимов А. Н., Сатторов А. Х. *О разрешимости одной нелинейной краевой задачи с малым параметром* // Дифференциальные уравнения. **55**:8, 1127–1137 (2019).
8. Назимов А. Б., Мухамадиев Э. и др. *Метод регуляризации сдвигом. Теория и приложения: монография.* Вологда: ВоГТУ. 2012. 368 с.
9. Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П. *Векторные поля на плоскости.* М.: ГИФМЛ. 1963. 248 с.

Эргашбой Мухамадиев,
Вологодский государственный университет,
ул. Ленина, 15,
160000, г. Вологда, Россия
E-mail: emuhamadiev@rambler.ru

Акбар Багадурович Назимов,
Вологодский государственный университет,
ул. Ленина, 15,
160000, г. Вологда, Россия
E-mail: n.akbar54@mail.ru

Алижон Набиджанович Наимов,
Вологодский государственный университет,
ул. Ленина, 15,
160000, г. Вологда, Россия
E-mail: nan67@rambler.ru