

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИЗУЧЕНИЮ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Е.Ю. МАШКОВ

Аннотация. Изучается система стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито, у которой в левой части имеется вырожденный постоянный линейный оператор. В правой части системы имеется постоянный линейный оператор и детерминированное слагаемое, которое зависит только от времени, а также импульсные воздействия. Предполагается, что коэффициент диффузии данной системы задается квадратной матрицей, зависящей только от времени. Данные системы уравнений встречаются во многих приложениях. Изучаемая в работе система с применением преобразования регулярного пучка матриц к обобщенной вещественной форме Шура приводится к каноническому виду. Для исследования полученных канонических уравнений необходимо рассмотрение производных достаточно высоких порядков от свободных членов, включая винеровский процесс. В связи с этим для дифференцирования винеровского процесса мы применяем аппарат производных в среднем по Нельсону от случайных процессов, что позволяет при исследовании уравнения не применять аппарат теории обобщенных функций. В результате получаются аналитические формулы для решений уравнения в терминах производных в среднем случайных процессов.

Ключевые слова: Производная в среднем, текущая скорость, винеровский процесс, стохастическое уравнение леонтьевского типа.

Mathematics Subject Classification: 60H30, 60H10

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается вырожденное стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито вида

$$d\tilde{A}\xi(t) = \tilde{B}\xi(t)dt + f(t)dt + dS\zeta(t) + P(t)dw(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $\tilde{B} + \lambda\tilde{A}$ – регулярный пучок вещественных постоянных матриц размера $n \times n$; \tilde{A} – вырождена, $\xi(t)$ – искомый случайный процесс; $w(t)$ – винеровский процесс в R^n ; $P(t)$ – достаточно гладкая матрица размера $n \times n$; $f(t)$ – достаточно гладкая n -мерная вектор-функция; $\zeta(t)$ – n -мерный процесс скачков; S – $n \times n$ -матрица. В литературе для данных систем используются следующие названия: алгебро-дифференциальные, дескрипторные, системы леонтьевского типа. Изучаемые уравнения возникают в работах Л. А. Власенко и др. [1], [2] при математическом моделировании динамики корпорации предприятий при использовании инвестирования. В работах О. Schein, G. Denk [3], Т. Sickenberger, R. Winkler [4], [5] рассматриваемые системы возникают при математическом моделировании колебаний и электрических цепей. В работах А. Л. Шестакова, Г. А. Свиридюка [6]

Е.YU. MASHKOV, ON APPROACH FOR STUDYING STOCHASTIC LEONTIEFF TYPE EQUATIONS WITH IMPULSE ACTIONS.

© Машков Е.Ю. 2020.

Работа поддержана РФФИ (грант 18-01-00048).

Поступила 17 апреля 2020 г.

с применением систем леонтьевского типа изучается динамическое искажение сигналов в радиоустройствах. Также отметим работу А. А. Белова, А. П. Курдюкова [7], в которой описаны многочисленные приложения уравнений леонтьевского типа.

Отправной точкой для данной статьи послужила работа [8], в которой данное уравнение исследуется с применением канонической формы Вейерштрасса регулярного пучка матриц. Поскольку, в общем случае, мы не можем устойчиво вычислить форму Вейерштрасса (см. [9]), напрашивается исследование данной системы с применением обобщенной формы Шура для регулярных пучков. Как известно (см. [9]), форма Шура вычисляется устойчивым образом.

Специфика уравнений леонтьевского типа предполагает рассматривать производные высших порядков от правой части (в том числе и винеровского процесса). Как известно (см., например, [10]), производные винеровского процесса существуют только в смысле обобщенных функций, которые крайне трудны для применения в изучении конкретных уравнений. Это обстоятельство делает прямое исследование нашего уравнения сложным.

Предлагаемый в настоящей работе метод исследования (как и в [8], [11]) данного уравнения основан на применении аппарата производных в среднем по Нельсону от случайных процессов, для описания которых не использованы обобщенные функции. А именно, мы применяем симметрические производные в среднем (текущие скорости) винеровского процесса. Текущие скорости, в соответствии с общей идеологией теории производных в среднем по Нельсону, являются естественными аналогами физической скорости детерминированных процессов. В результате для изучаемого уравнения мы получаем физически осмысленные формулы для решений в терминах симметрических производных в среднем случайных процессов.

2. ПРОИЗВОДНЫЕ В СРЕДНЕМ

Рассмотрим стохастический процесс $\xi(t)$ в R^n , $t \in [0, l]$, определенный на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P) и такой, что $\xi(t)$ является L_1 -случайной величиной для всех t . Известно, что каждый такой процесс порождает семейство σ -подалгебр σ -алгебры F "настоящее" N_t^ξ , которое будем считать полным, т.е. пополненным всеми множествами вероятности нуль.

Ради удобства мы обозначаем условное математическое ожидание $E(\cdot | N_t^\xi)$ относительно "настоящего" N_t^ξ для $\xi(t)$ через E_t^ξ . Обычное ("безусловное") математическое ожидание обозначается символом E .

Вообще говоря, почти все выборочные траектории процесса $\xi(t)$ не дифференцируемы, так что его производные существуют только в смысле обобщенных функций. Чтобы избежать использования обобщенных функций, согласно Нельсону [12], [13], [14] даем следующее определение:

Определение 2.1 ([10]). (i) Производная в среднем справа $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1 -случайная величина вида

$$D\xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \right),$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, F, P)$ и $\Delta t \rightarrow +0$ означает, что Δt стремится к 0 и $\Delta t > 0$. (ii) Производная в среднем слева $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1 -случайная величина

$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t} \right),$$

где (как и в (i)) предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, F, P)$ и $\Delta t \rightarrow +0$ означает, что Δt стремится к 0 и $\Delta t > 0$.

Следует отметить, что, вообще говоря, $D\xi(t) \neq D_*\xi(t)$, но если, например, $\xi(t)$ почти наверное имеет гладкие выборочные траектории, эти производные очевидно совпадают.

Из свойств условного математического ожидания (см. [15]) следует, что $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$ могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ и борелевских векторных полей (регрессий)

$$Y^0(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \middle| \xi(t) = x \right)$$

$$Y_*^0(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t} \middle| \xi(t) = x \right)$$

на R^n , то есть, $D\xi(t) = Y^0(t, \xi(t))$ и $D_*\xi(t) = Y_*^0(t, \xi(t))$.

Определение 2.2 ([10]). Производная $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ называется симметрической производной в среднем. Производная $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$ называется антисимметрической производной в среднем.

Рассмотрим векторные поля $v^\xi(t, x) = \frac{1}{2}(Y^0(t, x) + Y_*^0(t, x))$ и $u^\xi(t, x) = \frac{1}{2}(Y^0(t, x) - Y_*^0(t, x))$.

Определение 2.3 ([10]). $v^\xi(t) = v^\xi(t, \xi(t)) = D_S\xi(t)$ называется текущей скоростью процесса $\xi(t)$; $u^\xi(t) = u^\xi(t, \xi(t)) = D_A\xi(t)$ называется осмотической скоростью процесса $\xi(t)$.

Текущая скорость является для случайных процессов прямым аналогом обычной физической скорости детерминированных процессов (см. [10]). Осмотическая скорость измеряет насколько быстро нарастает "случайность" процесса.

Определяющую роль в наших конструкциях играет винеровский процесс ([10]), который мы обозначим символом $w(t)$. Имеют место следующие

Лемма 2.1 ([16]). Пусть $w(t)$ – n -мерный винеровский процесс, $P(t)$ – достаточно гладкая $k \times n$ -матрица, $t \in (0, T)$. Тогда для любого t имеет место формула

$$D_S^w \int_0^t P(s)dw(s) = P(t) \frac{w(t)}{2t}.$$

Лемма 2.2 ([10], [11]). Для $t \in (0, T)$ имеют место равенства

$$Dw(t) = 0, \quad D_*w(t) = \frac{w(t)}{t}, \quad D_Sw(t) = \frac{w(t)}{2t}$$

При целом $k \geq 2$

$$D_S^k w(t) = (-1)^{k-1} \frac{\prod_{i=1}^{k-1} (2i-1)}{2^k} \frac{w(t)}{t^k}.$$

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Как уже было сказано во введении, рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение в R^n вида

$$d\tilde{A}\xi(t) = \tilde{B}\xi(t)dt + f(t)dt + dS\zeta(t) + P(t)dw(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

которое в интегральной форме имеет вид

$$\tilde{A}\xi(t) = \tilde{B} \int_0^t \xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + S\zeta(t) + \int_0^t P(s)dw(s), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.1)$$

где \tilde{A} и \tilde{B} - вещественные постоянные $n \times n$ - матрицы, \tilde{A} - вырождена, $\lambda\tilde{A} + \tilde{B}$ - регулярный пучок матриц, $\lambda \in R$, S - числовая $n \times n$ -матрица, $\zeta(t)$ - n -мерный процесс скачков, $P(t)$ - достаточно гладкая $n \times n$ -матрица, $f(t)$ - достаточно гладкая детерминированная вектор-функция, зависящая от времени, $w(t)$ - винеровский процесс, $\xi(t)$ - искомый случайный процесс. Процесс скачков $\zeta(t) = \zeta(t, \omega)$ задается следующим образом

$$\zeta(t, \omega) = \sum_{r=1}^N \tilde{\zeta}_r(\omega) \chi(t - t_r), \quad 0 < t_1 < \dots < t_N < T,$$

где χ - функция Хевисайда, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице для неотрицательных, $\tilde{\zeta}_r(\omega)$ - случайные величины со значениями в R^n .

Из вида (3.1) понятно, что (для простоты) начальное условие для решения (3.1) предполагается вида

$$\xi(0, \omega) = 0. \quad (3.2)$$

Скажем сразу, что для построенных нами ниже решений это условие не выполняется. Поэтому мы аппроксимируем решения процессами, которые удовлетворяют этому начальному условию, но становятся решениями лишь с некоторого (заранее заданного сколь угодно малого) момента времени $t_0 > 0$ (см. ниже).

Формулы для решений задачи (3.1), (3.2) будем искать (как и в работе [2]) среди случайных процессов $\xi(t, \omega)$, которые удовлетворяют (в том смысле как описывается ниже) уравнениям

$$\begin{aligned} \tilde{A}\xi(t) - \tilde{A}\xi(0) &= \tilde{B} \int_0^t \xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t P(s)dw(s), \quad 0 \leq t \leq t_1, \\ \tilde{A}\xi(t) - \tilde{A}\xi(t_r) &= \tilde{B} \int_{t_r}^t \xi(s)ds + \int_{t_r}^t f(s)ds + \int_{t_r}^t P(s)dw(s), \quad t_r \leq t \leq t_{r+1}, \\ \tilde{A}\xi(t) - \tilde{A}\xi(t_N) &= \tilde{B} \int_{t_N}^t \xi(s)ds + \int_{t_N}^t f(s)ds + \int_{t_N}^t P(s)dw(s), \quad t_N \leq t \leq T, \end{aligned}$$

при всех $r = 1, 2, \dots, N - 1$, в точках t_r удовлетворяют равенствам

$$\tilde{A}\xi(t_r + 0, \omega) - \tilde{A}\xi(t_r - 0, \omega) = S\tilde{\zeta}_r(\omega), \quad r = 1, 2, \dots, N,$$

и в начальный момент времени $t = 0$ удовлетворяют начальному условию (3.2).

Итак, процесс $\xi(t)$ для решения задачи (3.1), (3.2) определяется последовательно для $r = 0, 1, \dots, N$ через случайные процессы $\xi_r(t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \tilde{A}\xi_0(t) - \tilde{A}\xi_0(0) &= \tilde{B} \int_0^t \xi_0(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t P(s)dw(s), \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (r = 0), \\ \tilde{A}\xi_r(t) - \tilde{A}\xi_r(t_r) &= \tilde{B} \int_{t_r}^t \xi_r(s)ds + \int_{t_r}^t f(s)ds + \int_{t_r}^t P(s)dw(s), \quad t_r \leq t \leq t_{r+1}, \\ \tilde{A}\xi_N(t) - \tilde{A}\xi_N(t_N) &= \tilde{B} \int_{t_N}^t \xi_N(s)ds + \int_{t_N}^t f(s)ds + \int_{t_N}^t P(s)dw(s), \quad t_N \leq t \leq T, \end{aligned}$$

$r = 1, 2, \dots, N - 1$, где

$$\xi_0(0) = 0, \quad \tilde{A}\xi_r(t_r) = \tilde{A}\xi_{r-1}(t_r, \omega) + S\tilde{\zeta}_r(\omega), \quad r = 1, \dots, N.$$

Для дальнейшего изложения нам понадобится

Теорема 3.1. (Обобщенная вещественная форма Шура [9]) Для регулярного пучка $\lambda A + B$ вещественных постоянных $n \times n$ -матриц A и B найдутся вещественные ортогональные матрицы Q_L и Q_R , такие, что матрица $Q_L A Q_R$ - верхняя квазитреугольная (т.е. верхняя блочно-треугольная матрица с диагональными блоками размера

1×1 и 2×2 ; блоки размера 1×1 соответствуют вещественным собственным значениям, а блоки размера 2×2 – сопряженным парам комплексных собственных значений), а матрица $Q_L B Q_R$ – верхняя треугольная.

Как нетрудно заметить, уравнение (3.1) в общей форме неудобно для изучения, поэтому приведем его к некоторому каноническому виду. Выполним для регулярного пучка матриц $\lambda \tilde{A} + \tilde{B}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ преобразование Шура (описывается парой невырожденных матриц (операторов) Q_L и Q_R). Тогда уравнение (3.1) преобразуется следующим образом

$$Q_L \tilde{A} Q_R Q_R^{-1} \xi(t) = Q_L \tilde{B} Q_R \int_0^t Q_R^{-1} \xi(s) ds + \\ + \int_0^t Q_L f(s) ds + Q_L S \zeta(t) + \int_0^t Q_L P(s) dw(s), \quad 0 \leq t \leq T,$$

и в новых обозначениях принимает вид

$$A \eta(t) = \int_0^t B \eta(s) ds + \int_0^t g(s) ds + M \zeta(t) + \int_0^t C(s) dw(s), \quad (3.3)$$

$$\eta(0) = 0, \quad (3.4)$$

где $C(t) = Q_L P(t)$, $\eta(t) = Q_R^{-1} \xi(t)$, $M = Q_L S$, $A = Q_L \tilde{A} Q_R$ – верхняя квазитреугольная матрица, $B = Q_L \tilde{B} Q_R$ – верхнетреугольная матрица, $Q_L f(t) = g(t)$. Пронумеровав вектора базиса соответствующим образом, в A сначала вдоль главной диагонали стоят блоки размера 2×2 , потом невырожденные блоки размера 1×1 , а затем вырожденные блоки размера 1×1 .

Тогда, учитывая сказанное выше, формулы для решений $\eta(t)$ задачи (3.3), (3.4) определяются последовательно для $r = 0, 1, \dots, N$ через случайные процессы $\eta_r(t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$A \eta_0(t) - A \eta_0(0) = \int_0^t B \eta_0(s) ds + \int_0^t g(s) ds + \int_0^t C(s) dw(s), \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (3.5)$$

$$A \eta_r(t) - A \eta_r(t_r) = \int_{t_r}^t B \eta_r(s) ds + \int_{t_r}^t g(s) ds + \int_{t_r}^t C(s) dw(s), \quad (3.6) \\ t_r \leq t \leq t_{r+1}, \quad r = 1, \dots, N-1$$

$$A \eta_N(t) - A \eta_N(t_N) = \int_{t_N}^t B \eta_N(s) ds + \int_{t_N}^t g(s) ds + \int_{t_N}^t C(s) dw(s), \quad (3.7) \\ t_N \leq t \leq T,$$

$$\eta_0(0) = 0, \quad A \eta_r(t_r) = A \eta_{r-1}(t_r, \omega) + M \tilde{\zeta}_r(\omega), \quad r = 1, \dots, N \quad (3.8)$$

Замечание 3.1. Как было отмечено выше, для построения процесса, описывающего модель, заданную уравнениями (3.5), (3.6) и (3.7), нужны производные свободных членов (включая винеровский процесс). Производные винеровского процесса существуют только в смысле обобщенных функций. Поэтому чтобы избежать использования обобщенных функций, мы для построения процесса, описывающего модель, заданную (3.5), (3.6) и (3.7), будем использовать симметрические производные в среднем (текущие скорости) D_S^w для случайных процессов. В этой работе для вычисления симметрических производных высших порядков будет использоваться σ -алгебра "настоящее" винеровского процесса. Отметим, что для вычисления производных в среднем можно использовать и какую-либо другую σ -алгебру, но тогда формулы для вычисления симметрических производных высших порядков от винеровского процесса изменятся.

Принимая во внимание структуру матриц A и B , нетрудно видеть, что задачи (3.3), (3.4) и (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) распадаются на несколько уравнений и систем уравнений.

Последние $n-p+1$ компонент процесса η_r , соответствующие строкам A с вырожденными диагональными блоками размера 1×1 , соберем в одно матричное уравнение

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 0 & a_{p+1}^p & a_{p+2}^p & \cdots & a_n^p \\ 0 & 0 & a_{p+2}^{p+1} & \cdots & a_n^{p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_r^p(t) \\ \eta_r^{p+1}(t) \\ \vdots \\ \eta_r^n(t) \end{pmatrix} - \\
& - \begin{pmatrix} 0 & a_{p+1}^p & a_{p+2}^p & \cdots & a_n^p \\ 0 & 0 & a_{p+2}^{p+1} & \cdots & a_n^{p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_r^p(t_r) \\ \eta_r^{p+1}(t_r) \\ \vdots \\ \eta_r^n(t_r) \end{pmatrix} = \\
& = \int_{t_r}^t \begin{pmatrix} b_p^p & b_{p+1}^p & \cdots & b_n^p \\ 0 & b_{p+1}^{p+1} & \cdots & b_n^{p+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_r^p(s) \\ \eta_r^{p+1}(s) \\ \vdots \\ \eta_r^n(s) \end{pmatrix} ds + \int_{t_r}^t \begin{pmatrix} g^p(s) \\ g^{p+1}(s) \\ \vdots \\ g^n(s) \end{pmatrix} ds + \\
& + \int_{t_r}^t \begin{pmatrix} c_1^p(s) & c_2^p(s) & \cdots & c_{n-1}^p(s) & c_n^p(s) \\ c_1^{p+1}(s) & c_2^{p+1}(s) & \cdots & c_{n-1}^{p+1}(s) & c_n^{p+1}(s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ c_1^{n-1}(s) & c_2^{n-1}(s) & \cdots & c_{n-1}^{n-1}(s) & c_n^{n-1}(s) \\ c_1^n(s) & c_2^n(s) & \cdots & c_{n-1}^n(s) & c_n^n(s) \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} w^1(s) \\ w^2(s) \\ \vdots \\ w^{n-1}(s) \\ w^n(s) \end{pmatrix}, \\
& t_r \leq t \leq t_{r+1}, \quad r = 1, 2, \dots, N-1.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Из последнего уравнения системы (3.9) получаем, что

$$b_n^n \int_{t_r}^t \eta_r^n(s) ds = - \int_{t_r}^t g^n(s) ds - \sum_{j=1}^n \int_{t_r}^t c_j^n(s) dw^j(s)$$

Так как именно текущая скорость (симметрическая производная в среднем) соответствует физической скорости, из этого уравнения мы находим $\eta_r^n(t)$ применением к обеим частям равенства производной D_S^w (см. Замечание 3.1). Легко видеть, что применение производных в среднем D^w и D_*^w (и, следовательно, D_S^w) к интегралам Римана в левой и правой частях дает одинаковые результаты $\eta_r^n(t)$ и $g^n(t)$. Таким образом, мы с применением Леммы 2.1 получаем, что

$$\eta_r^n(t) = -\frac{1}{b_n^n} g^n(t) - \frac{1}{b_n^n} \sum_{j=1}^n c_j^n(t) \frac{w^j}{2t}, \quad r = 1, 2, \dots, N-1. \tag{3.10}$$

Из предпоследнего уравнения системы (3.9) мы получаем, что

$$\begin{aligned}
a_n^{n-1} \eta_r^n(t) - a_n^{n-1} \eta_r^n(t_r) &= \int_{t_r}^t (b_{n-1}^{n-1} \eta_r^{n-1}(s) + b_n^{n-1} \eta_r^n(s)) ds + \\
&+ \int_{t_r}^t g^{n-1}(s) ds + \sum_{j=1}^n \int_{t_r}^t c_j^{n-1}(s) dw^j(s)
\end{aligned}$$

откуда, проведя рассуждения, аналогично сделанным выше, с использованием Леммы 2.2 выводим

$$\begin{aligned} \eta_r^{n-1}(t) = & -\frac{a_n^{n-1}}{b_{n-1}^{n-1} \cdot b_n^n} \cdot \frac{dg^n(t)}{dt} + \frac{b_n^{n-1}}{b_{n-1}^{n-1} \cdot b_n^n} \cdot g^n(t) - \frac{1}{b_{n-1}^{n-1}} \cdot g^{n-1}(t) + \\ & + \frac{a_n^{n-1}}{b_{n-1}^{n-1} \cdot b_n^n} \cdot \sum_{j=1}^n c_j^n(t) \cdot \frac{w^j}{4t^2} - \frac{a_n^{n-1}}{b_{n-1}^{n-1} \cdot b_n^n} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{w^j}{2t} \cdot \frac{dc_j^n(t)}{dt} + \\ & + \frac{b_n^{n-1}}{b_{n-1}^{n-1} \cdot b_n^n} \cdot \sum_{j=1}^n c_j^n(t) \cdot \frac{w^j}{2t} - \frac{1}{b_{n-1}^{n-1}} \cdot \sum_{j=1}^n c_j^{n-1}(t) \cdot \frac{w^j}{2t} \end{aligned} \quad (3.11)$$

В точности аналогично, для $p \leq i \leq n-1$ мы получаем рекуррентную формулу

$$D_S \left(\sum_{j=i+1}^n a_j^i \cdot \eta_r^j(t) \right) = \sum_{j=i}^n b_j^i \cdot \eta_r^j(t) + g^i(t) + \sum_{j=1}^n c_j^i(t) \cdot \frac{w^j}{2t} \quad (3.12)$$

Заметим, что для систем вида (3.9), заданных на промежутках $[0, t_1]$ и $[t_N, T]$, имеют место при $0 < t \leq t_1$ и $t_N \leq t < T$ соответственно аналогичные формулы для решений. При этом, найденные процессы удовлетворяют условиям (3.8) в том случае, когда компоненты случайной величины $M\tilde{\zeta}_r(\omega)$, соответствующие нулевым 1×1 блокам по главной диагонали в A , равны нулю, т.е. $\left((M\tilde{\zeta}_r(\omega))^j \right)_{j=p}^n = 0$.

Итак, с учетом выше сказанного, при $0 < t < T$ получаем формулы для $\eta^i(t)$:

$$\eta^n(t) = -\frac{1}{b_n^n} g^n(t) - \frac{1}{b_n^n} \sum_{j=1}^n c_j^n(t) \frac{w^j}{2t}, \quad (3.13)$$

$$D_S \left(\sum_{j=i+1}^n a_j^i \cdot \eta^j(t) \right) = \sum_{j=i}^n b_j^i \cdot \eta^j(t) + g^i(t) + \sum_{j=1}^n c_j^i(t) \cdot \frac{w^j}{2t}, \quad (3.14)$$

$p \leq i \leq n-1$

Перейдем к вопросу о нулевых начальных условиях для решений системы (3.9) (при $r = 0$). Принимая во внимание определение симметрических производных в среднем, нетрудно заметить, что они корректно определены только на открытых промежутках времени, поскольку в их конструкции использованы как приращения по времени вправо, так и влево. Тогда из формул (3.10), (3.11) и (3.12) видно, что решения $\eta^l(t)$ описываются как суммы, в которых каждое слагаемое содержит сомножитель вида $\frac{w^j(t)}{t^k}$, $k \geq 1$. Следовательно, решения стремятся к бесконечности при $t \rightarrow 0$, т.е. значения решений при $t = 0$ не существуют. Один из вариантов разрешения указанной ситуации (как и в [11]) состоит в следующем. Зафиксируем сколь угодно малый момент времени $t_0 \in (0, T)$ и зададим функцию $t_0(t)$ формулой

$$t_0(t) = \begin{cases} t_0, & \text{если } 0 \leq t \leq t_0; \\ t, & \text{если } t_0 \leq t. \end{cases} \quad (3.15)$$

Элементы $\frac{w^j(t)}{t^k}$ в формулах (3.10), (3.11) и (3.12) заменим на $\frac{w^j(t)}{(t_0(t))^k}$. Полученные процессы в момент времени $t = 0$ будут принимать нулевые значения, однако они станут решениями только при $t_0 \leq t < T$. Отметим, что для двух разных моментов времени $t_0^{(1)}$ и $t_0^{(2)}$ при $t \geq \max(t_0^{(1)}, t_0^{(2)})$ значения соответствующих процессов п.н. совпадают.

Для строк A с невырожденными блоками размера 1×1 получаем уравнения

$$\begin{aligned}
& a_j^j \eta_r^j(t) + a_{j+1}^j \eta^{j+1}(t) + \dots + a_n^j \eta^n(t) - a_j^j \eta^j(t_r) - a_{j+1}^j \eta^{j+1}(t_r) - \dots - a_n^j \eta^n(t_r) = \\
& = \int_{t_r}^t (b_j^j \eta_r^j(s) + b_{j+1}^j \eta^{j+1}(s) + \dots + b_n^j \eta^n(s)) ds + \\
& + \int_{t_r}^t g^j(s) ds + \int_{t_r}^t c_1^j(s) dw^1(s) + \int_{t_r}^t c_2^j(s) dw^2(s) + \dots + \int_{t_r}^t c_n^j(s) dw^n(s), \\
& t_r \leq t \leq t_{r+1}, \quad r = 1, \dots, N-1.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Для такого типа уравнений есть аналитическая формула для решений (см. [17])

$$\begin{aligned}
\eta_r^j(t) &= e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-t_r)} \eta_r^j(t_r) + \frac{a_{j+1}^j}{a_j^j} e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-t_r)} \eta^{j+1}(t_r) + \dots + \frac{a_n^j}{a_j^j} e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-t_r)} \eta^n(t_r) + \\
& + \int_{t_r}^t e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-u)} \frac{c_1^j(u)}{a_j^j} dw_u^1 + \int_{t_r}^t e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-u)} \frac{c_2^j(u)}{a_j^j} dw_u^2 + \dots + \int_{t_r}^t e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-u)} \frac{c_n^j(u)}{a_j^j} dw_u^n + \\
& + \int_{t_r}^t e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-u)} \left[\frac{1}{a_j^j} g^j(u) + \frac{b_{j+1}^j}{a_j^j} \eta^{j+1}(u) + \right. \\
& + \dots + \frac{b_n^j}{a_j^j} \eta^n(u) - \left. \frac{b_j^j}{(a_j^j)^2} (a_{j+1}^j \eta^{j+1}(u) + \dots + a_n^j \eta^n(u)) \right] du - \\
& - \frac{a_{j+1}^j}{a_j^j} \eta^{j+1} - \dots - \frac{a_n^j}{a_j^j} \eta^n.
\end{aligned}$$

Отметим, что для уравнений вида (3.16), заданных на промежутках $[0, t_1]$ и $[t_N, T]$, имеют место аналогичные формулы для решений. Учитывая все $\eta_r^j(t)$, получаем выражение для $\eta^j(t)$

$$\begin{aligned}
\eta^j(t) &= \sum_{r=1}^N e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-t_r)} \cdot \left(\frac{m_1^j \tilde{\zeta}_r^1}{a_j^j} + \dots + \frac{m_n^j \tilde{\zeta}_r^n}{a_j^j} \right) \cdot \chi(t-t_r) + \\
& + \int_0^t e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-u)} \frac{c_1^j(u)}{a_j^j} dw_u^1 + \int_0^t e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-u)} \frac{c_2^j(u)}{a_j^j} dw_u^2 + \dots + \int_0^t e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-u)} \frac{c_n^j(u)}{a_j^j} dw_u^n + \\
& + \int_0^t e^{\frac{b_j^j}{a_j^j}(t-u)} \left[\frac{1}{a_j^j} g^j(u) + \frac{b_{j+1}^j}{a_j^j} \eta^{j+1}(u) + \right. \\
& + \dots + \frac{b_n^j}{a_j^j} \eta^n(u) - \left. \frac{b_j^j}{(a_j^j)^2} (a_{j+1}^j \eta^{j+1}(u) + \dots + a_n^j \eta^n(u)) \right] du - \\
& - \frac{a_{j+1}^j}{a_j^j} \eta^{j+1} - \dots - \frac{a_n^j}{a_j^j} \eta^n.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Для строк A с блоками размера 2×2 получаем подсистемы из пары уравнений

$$\begin{aligned}
 & a_i^i \eta_r^i(t) + a_{i+1}^i \eta_r^{i+1}(t) + a_{i+2}^i \eta^{i+2}(t) + \dots + a_n^i \eta^n(t) - \\
 & \quad - a_i^i \eta_r^i(t_r) - a_{i+1}^i \eta_r^{i+1}(t_r) - a_{i+2}^i \eta^{i+2}(t_r) - \dots - a_n^i \eta^n(t_r) = \\
 & = \int_{t_r}^t (b_i^i \eta_r^i(s) + b_{i+1}^i \eta_r^{i+1}(s) + b_{i+2}^i \eta^{i+2}(s) + \dots + b_n^i \eta^n(s)) ds + \\
 & \quad + \int_{t_r}^t g^i(s) ds + \int_{t_r}^t c_1^i(s) dw^1(s) + \int_{t_r}^t c_2^i(s) dw^2(s) + \dots + \int_{t_r}^t c_n^i(s) dw^n(s), \\
 & a_i^{i+1} \eta_r^i(t) + a_{i+1}^{i+1} \eta_r^{i+1}(t) + a_{i+2}^{i+1} \eta^{i+2}(t) + \dots + a_n^{i+1} \eta^n(t) - \\
 & \quad - a_i^{i+1} \eta_r^i(t_r) - a_{i+1}^{i+1} \eta_r^{i+1}(t_r) - a_{i+2}^{i+1} \eta^{i+2}(t_r) - \dots - a_n^{i+1} \eta^n(t_r) = \\
 & = \int_{t_r}^t (b_{i+1}^{i+1} \eta_r^{i+1}(s) + b_{i+2}^{i+1} \eta^{i+2}(s) + \dots + b_n^{i+1} \eta^n(s)) ds + \\
 & \quad + \int_{t_r}^t g^{i+1}(s) ds + \int_{t_r}^t c_1^{i+1}(s) dw^1(s) + \int_{t_r}^t c_2^{i+1}(s) dw^2(s) + \dots + \int_{t_r}^t c_n^{i+1}(s) dw^n(s), \\
 & t_r \leq t \leq t_{r+1}, \quad r = 1, \dots, N-1.
 \end{aligned}$$

В матричной форме в новых обозначениях эта подсистема уравнений принимает вид

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta}_r(t) - \bar{\eta}_r(t_r) + \vartheta(t) - \vartheta(t_r) & = \\
 & = \int_{t_r}^t K \bar{\eta}_r(s) ds + \int_{t_r}^t \theta(s) ds + \int_{t_r}^t \bar{g}(s) ds + \int_{t_r}^t \Lambda \Theta(s) dw(s)
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

где

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta}_r & = \begin{pmatrix} \eta_r^i \\ \eta_r^{i+1} \end{pmatrix}, \quad \Xi = \begin{pmatrix} b_i^i & b_{i+1}^i \\ 0 & b_{i+1}^{i+1} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} a_i^i & a_{i+1}^i \\ a_i^{i+1} & a_{i+1}^{i+1} \end{pmatrix}^{-1}, \\
 \vartheta(t) & = \Lambda \begin{pmatrix} a_{i+2}^i & \dots & a_n^i \\ a_{i+2}^{i+1} & \dots & a_n^{i+1} \end{pmatrix} (\eta^{i+2} \dots \eta^n)^T, \\
 \theta(t) & = \Lambda \begin{pmatrix} b_{i+2}^i & \dots & b_n^i \\ b_{i+2}^{i+1} & \dots & b_n^{i+1} \end{pmatrix} (\eta^{i+2} \dots \eta^n)^T, \\
 \bar{g} & = \Lambda \begin{pmatrix} g^i \\ g^{i+1} \end{pmatrix}, \quad K = \Lambda \Xi, \quad \Theta(t) = \begin{pmatrix} c_1^i(t) & \dots & c_n^i(t) \\ c_1^{i+1}(t) & \dots & c_n^{i+1}(t) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Для этой подсистемы уравнений имеет место аналитическая формула для решений (см. [17])

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta}_r(t) & = e^{K(t-t_r)} \bar{\eta}_r(t_r) + e^{K(t-t_r)} \vartheta(t_r) + \int_{t_r}^t e^{K(t-\tau)} \Lambda \Theta(\tau) dw_\tau + \\
 & \quad + \int_{t_r}^t e^{K(t-\tau)} (\theta(\tau) + \bar{g}(\tau) - K \vartheta(\tau)) d\tau - \vartheta(t).
 \end{aligned}$$

Отметим, что для уравнений вида (3.18), заданных на промежутках $[0, t_1]$ и $[t_N, T]$, имеют место аналогичные формулы для решений. Учитывая все $\bar{\eta}_r(t)$, получаем выражение для

$\bar{\eta}(t)$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(t) = & \sum_{r=1}^N e^{K(t-t_r)} \Lambda \left((M\tilde{\zeta}_r(\omega))^j \right)_{j=i}^{i+1} \cdot \chi(t-t_r) + \\ & + \int_0^t e^{K(t-\tau)} (\theta(\tau) + \bar{g}(\tau) - K\vartheta(\tau)) d\tau + \\ & + \int_0^t e^{K(t-\tau)} \Lambda \Theta(\tau) d\omega(\tau) - \vartheta(t), \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $\left((M\tilde{\zeta}_r(\omega))^j \right)_{j=i}^{i+1}$ – 2-мерный вектор, составленный i -й и $(i+1)$ -й координат вектора $M\tilde{\zeta}_r(\omega)$.

Таким образом, суммируя выше сказанное, мы доказали следующее утверждение

Теорема 3.2. Пусть $\lambda\tilde{A} + \tilde{B}$ – регулярный пучок постоянных $n \times n$ -матриц, S – $n \times n$ -матрица, а $f(t)$ – достаточно гладкая n -мерная вектор-функция, $0 \leq t \leq T$; пусть $0 < t_1 < \dots < t_N < T$; Q_L и Q_R – невырожденные матрицы размера $n \times n$, приводящие пучок $\lambda\tilde{A} + \tilde{B}$ к канонической обобщенной вещественной форме Шура; $A = Q_L\tilde{A}Q_R$, $B = Q_L\tilde{B}Q_R$; пусть $\tilde{\zeta}_r(\omega)$ – случайные величины со значениями в R^n , такие, что компоненты случайной величины $Q_L S \tilde{\zeta}_r(\omega)$, соответствующие вырожденным блокам размера 1×1 на главной диагонали в A , равны нулю, $r = 1, 2, \dots, N$; пусть $\zeta(t, \omega) = \sum_{r=1}^N \tilde{\zeta}_r(\omega) \chi(t-t_r)$, где χ – функция Хевисайда, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице для неотрицательных. Тогда:

- 1) уравнение (3.1) преобразуется в каноническое уравнение (3.3), которое распадается на отдельные уравнения и подсистемы уравнений;
- 2) для подсистемы, соответствующей строкам A с вырожденными блоками размера 1×1 , имеет место при $0 < t < T$ рекуррентная формула для нахождения решений вида (3.13), (3.14);
- 3) зафиксировав сколь угодно малый момент времени $t_0 > 0$, мы в знаменателях процессов, удовлетворяющих приведенным в пункте 2) рекуррентным соотношениям, заменяем t на $t_0(t)$ по формуле (3.15) и получаем процессы, принимающие при $t = 0$ нулевые значения, но становятся решениями только при $t_0 \leq t < T$;
- 4) для уравнений, соответствующих строкам A с невырожденными блоками размера 1×1 , имеет место аналитическая формула для решений вида (3.17);
- 5) для подсистем, соответствующих строкам A с невырожденными блоками размера 2×2 , имеет место аналитическая формула для решений вида (3.19).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власенко Л.А., Лысенко Ю.Г., Руткас А.Г. Об одной стохастической модели динамики предприятий корпорации // Экономическая кибернетика. **1-3** (67–69), 4–9 (2011)
2. Vlasenko L.A., Lyshko S.L., Rutkas A.G. On a stochastic impulsive system // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. **2**, 50–55 (2012)
3. Schein O., Denk G. Numerical solution of stochastic differential-algebraic equations with applications to transient noise simulation of microelectronic circuits // Journal of Computational and Applied Mathematics. **100**:1, 77–92(1998)
4. Sickenberger T., Winkler R. Stochastic oscillations in circuit simulation // PAMM · Proc. Appl. Math. Mech. **7**:1, 4050023–4050024 (2007)
5. Winkler R. Stochastic DAEs in Transient Noise Simulation // Proceedings of Scientific Computing in Electrical Engineering, June, 23rd – 28th, 2002, Eindhoven, Springer Series Mathematics in Industry. **4**, 408–415 (2004)

6. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. *On the measurement of the «white noise»* // Vestnik of South Ural State University. **27**(286), 99–108 (2012)
7. Белов А.А., Курдюков А.П. *Дескрипторные системы и задачи управления* // М.: АНО Физматлит. 2015.
8. Mashkov E.Yu. *Stochastic Leontief type equations with impulse actions* // Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. **11**:2, 58–72 (2018)
9. Деммель Дж. *Вычислительная линейная алгебра* // М.: Мир. 2001.
10. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics* // London: Springer-Verlag. 2011.
11. Гликликх Ю.Е., Е.Ю. Машков Е.Ю. *Стохастические уравнения леонтьевского типа и производные в среднем случайных процессов* // Вестник Южно-Уральского государственного университета. **6**:2, 25-39 (2013)
12. Nelson E. *Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics* // Phys. Reviews. **150**:4, 1079–1085 (1996)
13. Nelson E. *Dynamical theory of Brownian motion* // Princeton: Princeton University Press. 1967.
14. Nelson E. *Quantum fluctuations* // Princeton: Princeton University Press. 1985.
15. Паргасарати К.Р. *Введение в теорию вероятностей и теорию меры* // М.: Мир. 1988.
16. Gliklikh Yu.E., Mashkov E.Yu. *Stochastic Leontieff type equation with non-constant coefficients* // Applicable Analysis. **94**:8, 1614–1623 (2015)
17. Gihman I.I., Skorohod A.V. *Theory of stochastic processes* // **3**. New York (NY): Springer-Verlag. 1979.

Евгений Юрьевич Машков,
Юго-Западный государственный университет,
ул. 50 лет Октября, 94,
305040, г. Курск, Россия
E-mail: mashkovevgen@yandex.ru