ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 3 (2020). С. 45-50.

УДК 517.55

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПРЯМЫХ, ДОСТАТОЧНЫХ ДЛЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГОЛОМОРФНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

А.М. КЫТМАНОВ, С.Г. МЫСЛИВЕЦ

Аннотация. Задача о голоморфном продолжении функций, заданных на границе области, в эту область является актуальной в многомерном комплексном анализе. Она имеет длинную историю, начиная с трудов Пуанкаре и Гартогса. В данной статье рассматриваются непрерывные функции, заданные на границе ограниченной области D в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, и обладающие обобщенным граничным свойством Морера вдоль семейства комплексных, пересекающих росток вещественно аналитического многообразия коразмерности 2, лежащего вне границы области. Свойство Морера заключается в равенстве нулю интеграла от данной функции по пересечению границы области с комплексной прямой. Показано, что такие функции голоморфно продолжаются в область D. Для функций одного комплексного переменного свойство Морера, очевидно, не влечет голоморфного продолжения. Поэтому данную задачу нужно рассматривать лишь в многомерном случае ($n > 1$).

Ключевые слова: голоморфное продолжение, граничное условие Морера, ядро Бохнера-Мартинелли

Mathematics Subject Classification: 34A10, 32A26, 32D15

1. Введение

Статья содержит некоторые результаты, связанные с голоморфным продолжением функций, непрерывных на границе ограниченной области, в эту область. Речь пойдет о функциях, удовлетворяющих граничному условию Морера. Оно заключается в равенстве нулю интегралов от данной функции по пересечению границы области с коплексными прямыми или комплексными плоскостями. Е. Гринберг [1] изучил функции со свойством Морера в шаре (фактически этот результат содержался еще в статье М.Л. Аграновского и Р.Е. Вальского [2]). И. Глобевник и Е.Л. Стаут [3] получили граничную теорему Морера для произвольной ограниченной области с дважды гладкой границей. Локальный вариант теоремы Морера рассмотрен И. Глобевником [4], Д. Говекар-Лебо [5]. В работе С.Г. Мысливец [6] рассмотрены функции со свойством Морера вдоль комплексных кривых, в работах авторов [7, 8, 9] приведены некоторые семейства комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения функций.

A.M. Kytmanov, S.G. Myslivets, On a family of complex curves sufficient for existence of holomorphic continuation of continuous functions on boundary of domain.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-51-41011 Узбт.

Поступила 8 февраля 2020 г.

Мы рассматриваем в качестве достаточного множества — множество комплексных прямых, пересекающих росток вещественно-аналитического многообразия вещественной размерности $(2n-2)$, не пересекающегося с границей области D.

Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ — ограниченная область со связной границей класса $\mathcal{C}^2$ вида

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : \ \rho(z) < 0\},$$

где $\rho(z)$ — гладкая класса $\mathcal{C}^2$, вещественнозначная функция в окрестности множества $\overline{D}$ такая, что $d\rho\big|_{\partial D} \neq 0$. Мы отождествляем $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$ следующим образом: $z = (z_1, \ldots, z_n)$, где $z_j = x_j + iy_j$, x_j, $y_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим комплексные прямые $l_{z,b}$ вида

$$l_{z,b} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \ \zeta_j = z_j + b_j t, \ j = 1, \ldots, n, \ t \in \mathbb{C}\}, \tag{1}$$

проходящие через точку $z \in \mathbb{C}^n$ в направлении вектора $b = \{b_1, \ldots, b_n\} \in \mathbb{CP}^{n-1}$ (направление b определяется с точностью до умножения на комплексное число $\lambda \neq 0$).

Определение 1. *Непрерывная функция f на ∂D ($f \in \mathcal{C}(\partial D)$) удовлетворяет свойству Морера вдоль комплексной плоскости l размерности k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, если*

$$\int\limits_{\partial D \cap l} f(\zeta)\beta(\zeta) = 0$$

для любой дифференциальной формы β типа $(k, k-1)$ с постоянными коэффициентами.

Предполагается, что плоскость l пересекает границу области D трансверсально.

Если $l_{z,b}$ — комплексная прямая, пересекающая ∂D трансверсально, тогда свойство Морера вдоль $l_{z,b}$ заключается в том, что

$$\int\limits_{\partial D \cap l_{z,b}} f(z + bt)dt = \int\limits_{\partial D \cap l_{z,b}} f(z_1 + b_1 t, \ldots, z_n + b_n t)dt = 0 \tag{2}$$

для заданной параметризации $\zeta = z + bt$ комплексной прямой $l_{z,b}$.

Для комплексных прямых рассмотрим более общее условие. Пусть m — фиксированное неотрицательное целое число, тогда условие

$$\int\limits_{\partial D \cap l_{z,b}} f(z + bt)t^m dt = \int\limits_{\partial D \cap l_{z,b}} f(z_1 + b_1 t, \ldots, z_n + b_n t)t^m dt = 0 \tag{3}$$

будем называть *обобщенным свойством Морера* вдоль комплексной прямой $l_{z,b}$. При $m = 0$ условие (3) становится условием (2).

Пусть $\varGamma$ — росток вещественно-аналитического многообразия вещественной размерности $(2n-2)$. Будем считать, что $0 \in \varGamma$ и в некоторой окрестности нуля многообразие $\varGamma$ имеет вид

$$\varGamma = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \ \varPhi(\zeta) + i\varPsi(\zeta) = 0\},$$

где $\varPhi, \varPsi$ — вещественно-аналитические, вещественнозначные функции в окрестности точки ноль. Здесь $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ и $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $\xi_j, \eta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$. Условие гладкости многообразия $\varGamma$ заключается в том, что

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varPhi}{\partial \xi_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varPhi}{\partial \xi_n} & \dfrac{\partial \varPhi}{\partial \eta_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varPhi}{\partial \eta_n} \\ \dfrac{\partial \varPsi}{\partial \xi_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varPsi}{\partial \xi_n} & \dfrac{\partial \varPsi}{\partial \eta_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varPsi}{\partial \eta_n} \end{pmatrix} = 2$$

в каждой точке $\zeta \in \varGamma$.

Рассмотрим комплексные прямые вида (1), положим $b_j = c_j + id_j$, $c_j, d_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$ и $t = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$. Тогда в вещественных координатах прямые $l_{z,b}$ будут задаваться следующим образом:

$$l_{z,b} = \{\xi, \eta \in \mathbb{R}^n: \ \xi_j = x_j + c_j u - d_j v, \ \eta_j = y_j + d_j u + c_j v, \ j = 1, \ldots, n\}. \tag{4}$$

Напомним лемму 1 из [8].

Лемма 1. *Пусть вектор $b^0 = (b_1^0, \ldots, b_n^0) \in \mathbb{CP}^{n-1}$ такой, что $D \cap l_{0,b^0} \neq \varnothing$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, что для всех z таких, что $|z| < \varepsilon$, и для всех b таких, что $|b - b^0| < \varepsilon$, пересечения $D \cap l_{z,b} \neq \varnothing$ и $\varGamma \cap l_{z,b} \neq \varnothing$.*

Нам также понадобится лемма 2 из [8].

Лемма 2. *Пусть для некоторого z и для всех ζ, b таких, что $D \cap l_{z,b} \neq \varnothing$, для $\zeta \in \partial D \cap l_{z,b}$, функция ρ, задающая область D, удовлетворяет условиям*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_j} b_j \neq 0, \tag{5}$$

тогда кривые $\partial D \cap l_{z,b}$ являются гладкими и аналитически зависят от параметра b.

Условиям леммы 2, например, удовлетворяют сильно звездные относительно точки $z \in D$, строго выпуклые, строго линейно выпуклые области в $\mathbb{C}^n$.

Теорема 1. *Пусть ограниченная область $D \subset \mathbb{C}^n$ со связной гладкой границей класса $\mathcal{C}^2$ удовлетворяет условиям (5) для точек z, лежащих в окрестности многообразия $\varGamma$ такого, что $\partial D \cap \varGamma = \varnothing$. Пусть функция $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ удовлетворяет обобщенным условиям Морера (3), т.е.*

$$\int\limits_{\partial D \cap l_{z,b}} f(z_1 + b_1 t, \ldots, z_n + b_n t) t^m dt = 0$$

для любых $z \in \varGamma$, $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ и фиксированного целого неотрицательного числа m, тогда функция f голоморфно продолжается в область D.

Доказательство. Рассмотрим ядро Бохнера-Мартинелли

$$U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}} d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta.$$

Как известно, ядро $U(\zeta, z)$ в координатах b и t (лемма 39.1 из [9]) имеет вид

$$U(\zeta, z) = \lambda(b) \wedge \frac{dt}{t},$$

где $\lambda(b)$ — дифференциальная форма типа $(n-1, n-1)$ в $\mathbb{CP}^{n-1}$, не зависящая от t, а точка $z \notin \partial D$.

Рассмотрим интеграл

$$M_\alpha f(z) = \int\limits_{\partial D_\zeta} (\zeta - z)^\alpha f(\zeta) U(\zeta, z),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — произвольный мультииндекс такой, что

$$\|\alpha\| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m + 1$$

и

$$(\zeta - z)^\alpha = (\zeta_1 - z_1)^{\alpha_1} \cdots (\zeta_n - z_n)^{\alpha_n}.$$

Из теоремы Фубини и вида ядра получим

$$M_\alpha f(z) = \int\limits_{\mathbb{CP}^{n-1}} b^\alpha \lambda(b) \int\limits_{\partial D \cap l_{z,b}} f(z_1 + b_1 t, \dots, z_n + b_n t) t^m dt.$$

По условиям теоремы 1 и леммы 1 интегралы

$$\int\limits_{\partial D \cap l_{z,b}} f(z_1 + b_1 t, \dots, z_n + b_n t) t^m dt = 0$$

для всех z с достаточно малым $|z|$ и b из $\mathbb{CP}^{n-1}$. Тогда

$$M_\alpha f(z) = \int\limits_{\partial D_\zeta} (\zeta - z)^\alpha f(\zeta) U(\zeta, z) \equiv 0 \tag{6}$$

для всех z таких, что $|z| < \varepsilon$.

Перепишем функцию $M_\alpha f(z)$ в другом виде. Рассмотрим дифференциальные формы $U_s(\zeta, z)$ вида:

$$U_s(\zeta, z) = \frac{(-1)^s (n-2)!}{(2\pi i)^n} \left(\sum_{j=1}^{s-1} (-1)^j \frac{\bar\zeta_j - \bar z_j}{|\zeta - z|^{2n-2}} \, d\bar\zeta[j, s] + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=s+1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\bar\zeta_j - \bar z_j}{|\zeta - z|^{2n-2}} \, d\bar\zeta[s, j] \right) \wedge d\zeta.$$

Легко проверить, что

$$\bar\partial \left(\frac{1}{\zeta_s - z_s} U_s(\zeta, z) \right) = U(\zeta, z)$$

при $\zeta_s \neq z_s$, $s = 1, \dots, n$. Тогда условие (6) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\partial D_\zeta} f(\zeta) \bar\partial \left((\zeta - z)^\beta U_s(\zeta, z) \right) \equiv 0 \tag{7}$$

для z таких, что $|z| < \varepsilon$ и для всех мономов $(\zeta - z)^\beta$ с $\|\beta\| = m$.

Покажем, что условие (7) выполнено и для мономов $(\zeta - z)^\gamma$ с $\|\gamma\| < m$. Действительно, рассмотрим такой моном $(\zeta - z)^\gamma$ с $\|\gamma\| = m - 1$. Тогда условие (7) выполнено для мономов вида

$$(\zeta - z)^\beta (\zeta_k - z_k), \qquad k = 1, \dots, n,$$

так как степень этих мономов равна m.

Справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \zeta_k} \left((\zeta - z)^\gamma (\zeta_k - z_k) U_s(\zeta, z) \right) = \\ &= (\gamma_k + 1)(\zeta - z)^\gamma U_s(\zeta, z) - (n-1)(\zeta - z)^\gamma \frac{(\zeta_k - z_k)(\bar\zeta_k - \bar z_k)}{|\zeta - z|^2} U_s(\zeta, z). \end{aligned} \tag{8}$$

Складывая равенства (8) по k, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \zeta_k} \left((\zeta - z)^\gamma (\zeta_k - z_k) U_s(\zeta, z) \right) = (\|\gamma\| + 1)(\zeta - z)^\gamma U_s(\zeta, z). \tag{9}$$

Поскольку условие (7) можно дифференцировать по z при $|z| < \varepsilon$, а производные по z и ζ выражения (9) отличаются только знаком, то из (9) следует, что степень монома в (7) можно уменьшить на единицу. Уменьшая последовательно эту степень, придем к условиям

$$\int\limits_{\partial D_\zeta} f(\zeta)\bar{\partial}U_s(\zeta,z) \equiv 0$$

для $|z| < \varepsilon$ и $s = 1,\ldots,n$, т. е.

$$\int\limits_{\partial D_\zeta} (\zeta_s - z_s) f(\zeta) U(\zeta,z) \equiv 0 \tag{10}$$

для $|z| < \varepsilon$ и $s = 1,\ldots,n$.

Применяя к левой части равенства (10) оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial z_n \partial \bar{z}_n},$$

получим, что

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_s} \int\limits_{\partial D_\zeta} f(\zeta) U(\zeta,z) \equiv 0$$

для $|z| < \varepsilon$ и $s = 1,\ldots,n$. Здесь мы воспользовались гармоничностью ядра $U(\zeta,z)$ и тождеством

$$\Delta(gh) = h\Delta g + g\Delta h + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j}\frac{\partial h}{\partial z_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial z_j}\frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j}.$$

Следовательно, интеграл Бохнера-Мартинелли от f

$$Mf(z) = \int\limits_{\partial D_\zeta} f(\zeta) U(\zeta,z)$$

является функцией, голоморфной в окрестности нуля.

Если $\Gamma \subset \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$, то $Mf(z) \equiv 0$ вне $\overline{D}$ в силу связности границы и стремления $Mf(z)$ к нулю при $|z| \to \infty$, и тогда функция f голоморфно продолжается в область D [10] (следствие 15.5).

Если $\Gamma \subset D$, то функция Mf голоморфна в D, и граничные значения Mf совпадают с f [10] (следствие 15.6).

□

Доказательство теоремы 1 в целом похоже на доказательство теоремы 3 из [8], но отличается от него в ряде моментов, связанных с непрерывностью функции.

При $m = 0$ условия (3) превращаются в граничное условие Морера [3]

$$\int\limits_{\partial D \cap l_{z,b}} f(z_1 + b_1 t, \ldots, z_n + b_n t)\, dt = 0. \tag{11}$$

Следствие 1. *Пусть область D удовлетворяет условиям теоремы 1, а функция $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ удовлетворяет условию (11) для любых $z \in \Gamma$ и $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$, тогда f голоморфно продолжается в D.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grinberg E.A. *A boundary analogue of Morera's theorem in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$// Proc. Amer. Soc. **102**, 114-116 (1988).
2. Аграновский М.Л., Вальский Р.Е. *Максимальность инвариантных алгебр функций// Сиб. матем. журн.* **32**:1, 3-12 (1991).
3. Globevnik J., Stout E.L. *Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables*// Duke Math. J. **64**:3, 571-615 (1991).
4. Globevnik J. *A boundary Morera theorem*// J. Geometric Anal. **3**:3, 269-277 (1993).
5. Govekar-Leban D. *Local boundary Morera theorems*// Math. Z. **233**, 265-286 (2000).
6. Мысливец С.Г. *Об одном граничном варианте теоремы Морера*// Сиб. матем. журн. **42**:5, 1136-1146 (2001).
7. Кытманов А.М., Мысливец С.Г. *О семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения*// Мат. заметки, 2008, **83**:4, 545-551 (2008).
8. Кытманов А.М., Мысливец С.Г. *О некоторых семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения функций*// Изв. вузов. Математика, 4, 72-80 (2011).
9. Kytmanov A.M., Myslivets S.G. *Multidimensional Integral Representations. Problems of Analytic Continuation*, Springer Verlag, Basel, Boston, 2015.
10. Кытманов А.М. *Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения.* Новосибирск: Наука, 1992.

Александр Мечиславович Кытманов,
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный 79, Красноярск, 660041
E-mail: akytmanov@sfu-kras.ru

Симона Глебовна Мысливец,
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный 79, Красноярск, 660041
E-mail: smyslivets@sfu-kras.ru