УДК 517.5

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

А.С. КРИВОШЕЕВ, О.А. КРИВОШЕЕВА

Аннотация. Изучаются подпространства функций аналитических в полуплоскости и инвариантных относительно оператора дифференцирования. Частным случаем инвариантного подпространства является пространство решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Известно, что каждое решение такого уравнения представляет из себя линейную комбинацию элементарных решений – экспоненциальных мономов, показатели которых являются нулями (возможно кратными) характеристического многочлена. Наличие этого представления называется фундаментальным принципом Л. Эйлера. Другими частными случаями инвариантных подпространств являются пространства решений линейных однородных дифференциальных, разностных и дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами как конечного, так и бесконечного порядков, а также более общих уравнений свертки и их систем. В работе исследуется задача фундаментального принципа для произвольных инвариантных подпространств аналитических функций в полуплоскости. Другими словами, изучается представление всех функций из инвариантного подпространства рядами экспоненциальных мономов. Эти экспоненциальные мономы являются собственными и присоединенными функциями оператора дифференцирования в инвариантном подпространстве. В работе получено разложение произвольного инвариантного подпространства аналитических функций на сумму двух инвариантных подпространств. Доказывается, что инвариантное подпространство в любой неограниченной области может быть представлено как сумма двух инвариантных подпространств. Их спектры соответствуют ограниченной и неограниченной частям выпуклой области. На основе этого результата получен простой геометрический критерий фундаментального принципа для инвариантного подпространства аналитических функций в полуплоскости. Он формулируется лишь при помощи индекса конденсации А.С. Кривошеева последовательности показателей указанных экспоненциальных мономов.

Ключевые слова: инвариантное подпространство, фундаментальный принцип, экспоненциальный моном, целая функция, ряд экспонент.

Mathematics Subject Classification: 30D10

1. Введение

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Символом $\Xi(\Lambda)$ обозначим множество пределов сходящихся последовательностей вида $\{\bar{\lambda}_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}_{j=1}^{\infty}$ ($\bar{\lambda}$ — комплексное сопряжение). Множество $\Xi(\Lambda)$ замкнуто и является подмножеством единичной

A.S. Krivosheev, O.A. Krivosheeva, Invariant subspaces in a half-plane.

Поступила 5 апреля 2020 г.

Исследование второго автора выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 18–11–00002).

окружности $S(0,1)$. Введем семейство экспоненциальных мономов

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n e^{\lambda_k z}\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}.$$

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область и

$$H_D(\varphi) = \sup_{z\in D} \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}), \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

– ее опорная функция. Положим

$$J(D) = \{e^{i\varphi} \in S(0,1) : H_D(\varphi) = +\infty\}.$$

Если D — ограниченная область, то $J(D) = \emptyset$. В случае неограниченной области возможны следующие ситуации:

1) $J(D) = S(0,1)$, т.е. $D = \mathbb{C}$,

2) D — полуплоскость $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < a\}$ и $J(D) = S(0,1) \setminus \{e^{i\varphi}\}$,

3) D — полоса $\{z \in \mathbb{C} : b < \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < a\}$ и $J(D) = S(0,1) \setminus \{e^{i\varphi}, e^{i\varphi+\pi}\}$,

4) в остальных случаях $J(D)$ является дугой единичной окружности, которая опирается на угол раствора не меньше чем π.

Символом $\mathrm{int}J(D)$ обозначим совокупность внутренних точек (в топологии окружности $S(0,1)$) множества $J(D)$.

Пусть $H(D)$ — пространство функций аналитических в области D с топологией равномерной сходимости на компактах $K \subset D$, и $W \subset H(D)$ — нетривиальное (т.е. $W \neq \{0\}$, $H(D)$) замкнутое подпространство, которое инвариантно относительно оператора дифференцирования. Спектр этого оператора в подпространстве W является не более чем счетным множеством $\{\lambda_k\}$ ([1], гл. II, §7). Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — кратный спектр оператора дифференцирования в подпространстве W. Тогда $\mathcal{E}(\Lambda)$ — семейство его собственных и присоединенных функций в W. Говорят, что подпространство W допускает спектральный синтез, если оно совпадает с замыканием $W(\Lambda, D)$ (в пространстве $H(D)$) линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Отметим, что проблема спектрального синтеза полностью решена в работах [2] и [3]. Если D — неограниченная выпуклая область, то всегда верно равенство $W = W(\Lambda, D)$, т.е. W допускает спектральный синтез ([3], теорема 8.2).

Частными случаями инвариантных подпространств являются пространства решений линейных однородных дифференциальных, разностных и дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами как конечного, так и бесконечного порядков, а также более общих уравнений свертки и их систем.

Основной задачей в теории инвариантных подпространств является проблема фундаментального принципа, т.е. представления произвольной функции из W при помощи ряда по элементам системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Говорят, что в подпространстве W со спектром $\{\lambda_k, n_k\}$ справедлив фундаментальный принцип, если любой функции $g \in W$ верно представление

$$g(z) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} d_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \quad z \in D, \tag{1.1}$$

причем ряд сходится равномерно на компактах из D. Эта задача носит название проблемы фундаментального принципа. Название фундаментальный принцип появилось в связи с частным случаем инвариантного подпространства – пространством решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Известно, что каждое решение такого уравнения есть линейная комбинация элементарных решений – экспоненциальных мономов $z^n e^{\lambda_k z}$, показатели которых являются нулями (возможно кратными) характеристического многочлена. Наличие этого представления называется фундаментальным принципом Л. Эйлера.

При помощи преобразования Лапласа проблема фундаментального принципа сводится к двойственной задаче кратной интерполяции в пространстве целых функций экспоненциального типа. Исследования обеих задач, проводившиеся вначале независимо друг от друга, имеют богатую историю. Основные ее этапы отражены в работах [4] и [5]. В случае ограниченной выпуклой области проблема фундаментального принципа полностью решена в работах [5]–[8]. Получен простой геометрический критерий фундаментального принципа ([8], теорема 3.2) для инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, который формулируется лишь в терминах индекса конденсации А. С. Кривошеева S_Λ (он будет определен ниже), максимальной угловой плотности последовательности Λ и длины дуги границы области D.

Гораздо хуже обстоит дело с неограниченными выпуклыми областями. В работе [5] получен критерий фундаментального принципа для произвольных выпуклых областей. Однако он имеет два недостатка. Присутствует некоторое ограничение на кратность n_k точек λ_k. Кроме того, в нем содержится следующее условие (оно эквивалентно наличию фундаментального принципа). Требуется существование семейства целых функции, обращающихся в ноль в точках λ_k с кратностью не меньшей чем n_k, рост которых является близким к регулярному и связан с D. Остается открытым вопрос, при каких условиях на Λ и D подобное семейство существует. Задача построения этого семейства является достаточно сложной. Что же касается неограниченных областей, то в этой связи исследовались по большей части только два частных случая – D является плоскостью или полуплоскостью.

Полное решение проблемы фундаментального принципа для нетривиальных инвариантных подпространств целых функций получено в работе [9]. Доказывается, что наличие фундаментального принципа в любом таком подпространстве эквивалентно конечности индекса конденсации S_Λ.

Инвариантные подпространства в полуплоскости изучались в случае простого положительного спектра, имеющего плотность. В работе [10] эта задача решена полностью, причем для произвольной выпуклой области D. Решение найдено в терминах простых геометрических характеристик последовательности Λ и области D. Оно содержит в себе принципиально новый момент. Оказалось, что в случае вертикальной полуплоскости, для справедливости фундаментального принципа не требуется измеримости последовательности Λ, и даже конечности ее максимальной плотности, несмотря на то, что опорная функция полуплоскости ограничена в положительном направлении. Необходимым и достаточным условием в этой ситуации является равенство нулю характеристики S_Λ. В работе [11] этот результат распространен на случай инвариантных подпространств с почти вещественным спектром Λ (т.е. $\Xi(\Lambda) = \{1\}$). Отметим, что результат работы [11] легко переносится на случай инвариантных подпространств со спектром Λ, для которого $\Xi(\Lambda)$ является одноточечным множеством.

Данная работа посвящена исследованию нетривиальных инвариантных подпространств с произвольным спектром в полуплоскости.

Работа состоит из четырех параграфов. Во втором параграфе приведены некоторые предварительные сведения. В третьем параграфе исследуется задача разложения инвариантного подпространства на сумму двух инвариантных подпространств. Доказывается, что инвариантное подпространство в любой неограниченной области может быть представлено как сумма двух инвариантных подпространств. Их спектры соответствуют ограниченной и неограниченной частям выпуклой области.

В последнем параграфе найдено полное решение проблемы фундаментального принципа для инвариантных подпространств в полуплоскости. Получен простой геометрический критерий фундаментального принципа, который опирается лишь на понятие индекса конденсации последовательности, составляющей спектр инвариантного подпространства.

2. Предварительные сведения

Прежде всего, напомним некоторые понятия и приведем некоторые факты, связанные с интерполирующей функцией А.Ф. Леонтьева. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и f — целая функция экспоненциального типа, т.е.

$$\ln|f(\lambda)| \leqslant A + B|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad A, B \geqslant 0.$$

Будем писать $f(\Lambda) = 0$, если f обращается в нуль в точках λ_k с кратностью не меньше чем n_k. Индикатором f называется функция

$$h_f(\varphi) = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln|f(te^{i\varphi})|}{t}, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Она совпадает с опорной функцией некоторого выпуклого компакта $T \subset \mathbb{C}$, называемого индикаторной диаграммой f. Символом $\gamma(t, f)$ обозначим функцию, ассоциированную по Борелю с f ([1], гл. I, §5). Сопряженной диаграммой K функции f называется выпуклая оболочка множества особых точек $\gamma(t, f)$. Таким образом, $\gamma(t, f)$ является аналитической вне компакта K. По теореме Полиа ([1], гл. I, §5, теорема 5.4)

$$h_f(\varphi) = H_T(\varphi) = H_K(-\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{2.1}$$

Следовательно, K является компактом, комплексно сопряженным к компакту T.

Пусть D — выпуклая область, $g \in H(D)$, $0 \in K$, и $\sigma \in \mathbb{C}$ такое, что сдвиг $K + \sigma$ сопряженной диаграммы K функции f лежит в области D. Интерполирующей функцией для функции g называется ([12], гл. I, §2)

$$\omega_f(\lambda, \sigma, g) = e^{-\sigma\lambda} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Omega} \gamma(t, f) \left(\int\limits_0^t g(t + \sigma - \eta) e^{\lambda\eta} d\eta \right) dt, \tag{2.2}$$

где Ω — контур (простая замкнутая непрерывная спрямляемая кривая), охватывающий компакт K и лежащий в области $D - \sigma$.

Снимем ограничение $0 \in K$. Выберем произвольную точку $w \in K$. Сопряженная диаграмма функции $f_w(z) = f(z)e^{-wz}$ совпадает с компактом $K_w = K - w$, который содержит начало координат. Тогда по формуле (2.2) определяется функция $\omega_{f_w}(\lambda, \sigma, g)$ для всех $\sigma \in \mathbb{C}$ таких, что компакт $K_w + \sigma$ лежит в области D.

Отметим некоторые свойства функции $\omega_{f_w}(\lambda, \sigma, g)$. Из (2.2) следует, что она является целой и линейна по третьему аргументу. Пусть $K(\varepsilon) = K + B(0, \varepsilon)$ — ε-расширение компакта K, $\Omega(\varepsilon) = \partial(K(\varepsilon)) - w$ и $\Omega_\sigma(\varepsilon) = \Omega(\varepsilon) + \sigma \subset G$. В силу (2.2) имеем:

$$\begin{aligned}
|\omega_{f_w}(\lambda, \sigma, g)| \leqslant & \frac{1}{2\pi} |e^{-\sigma\lambda}| \max_{z\in\Omega(\varepsilon)} |e^{\lambda z}| \max_{z\in\Omega_\sigma(\varepsilon)} |g(z)| \int\limits_{\Omega(\varepsilon)} |\gamma(t, f_w)||t||dt| \\
\leqslant & \tau_\varepsilon \exp(rH_{\Omega(\varepsilon)}(-\varphi) - \operatorname{Re}(\sigma\lambda)) \max_{z\in\Omega_\sigma(\varepsilon)} |g(z)| \int\limits_{\partial K(\varepsilon)} |\gamma(t, f)||dt| \\
= & A(f, \varepsilon) \exp(rH_K(-\varphi) + \varepsilon r - \operatorname{Re}(w\lambda) - \operatorname{Re}(\sigma\lambda)) \sup_{z\in\Omega_\sigma(\varepsilon)} |g(z)|, \qquad \lambda = re^{i\varphi},
\end{aligned}$$

где $A(f, \varepsilon) = (2\pi)^{-1}\tau_\varepsilon(f) d_\varepsilon$, d_ε — диаметр области $K(\varepsilon)$ и $\tau_\varepsilon(f)$ — последний интеграл. Отсюда с учетом равенства (2.1) для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ получаем:

$$|\omega_{f_w}(\lambda, \sigma, g)| \leqslant A(f, \varepsilon) \exp((h_f(\varphi) + \varepsilon)r - \operatorname{Re}((w + \sigma)\lambda)) \max_{z\in\Omega_\sigma(\varepsilon)} |g(z)|. \tag{2.3}$$

Отметим теперь главное свойство интерполирующей функции. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — кратное нулевое множество функции f и

$$P(z) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}.$$

Тогда имеют место равенства ([12], гл. I, §2, теорема 1.2.4):

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B(\lambda_k, b_k)} \frac{\omega_{f_w}(\lambda, \sigma, P)}{f_w(\lambda)} e^{\lambda z} d\lambda = \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \quad \sigma \in \mathbb{C}, \quad k = \overline{1, p}, \tag{2.4}$$

где $\partial B(\lambda_k, b_k)$ — окружность, внутри которой нет точек λ_s, $s \neq k$. Следующие утверждения являются частными случаями соответственно теорем 2.1.1 и 2.1.2 из книги [12].

Лемма 2.1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, D — выпуклая область, и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$. Предположим, что*

$$g(z) = \lim_{\mu \to \infty} P_\mu(z), \quad P_\mu(z) = \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n,\mu} z^n e^{\lambda_k z}, \tag{2.5}$$

причем сходимость равномерная на компактах из области D. Тогда существуют пределы

$$a_{k,n} = \lim_{\mu \to \infty} a_{k,n,\mu}, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geqslant 1.$$

Лемма 2.2. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, D — выпуклая область, и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$. Предположим, что верно (2.5) и*

$$g(z) =) = \lim_{\mu \to \infty} Q_\mu(z), \quad Q_\mu(z) = \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{n=0}^{n_k-1} b_{k,n,\mu} z^n e^{\lambda_k z},$$

причем сходимость равномерная на компактах из области D. Тогда

$$\lim_{\mu \to \infty} a_{k,n,\mu} = \lim_{\mu \to \infty} b_{k,n,\mu}, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geqslant 1.$$

Введем еще некоторые понятия и обозначения. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $n(r, \Lambda)$ — число точек λ_k (с учетом их кратностей n_k), попавших в открытый круг $B(0, r)$, и

$$\bar{n}(\Lambda) = \lim_{r \to +\infty} \frac{n(r, \Lambda)}{r}$$

— верхняя плотность последовательности Λ. Согласно известной теореме Линделефа ([13], гл. I, §11, теорема 15) $\bar{n}(\Lambda) < +\infty$ тогда и только тогда, когда существует целая функция f экспоненциального типа такая, что $f(\Lambda) = 0$.

Пусть $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ — разбиение последовательности $\{\lambda_k\}$ на конечные группы, т.е. U_m состоит из конечного числа точек λ_k, $U_m \cap U_l = \emptyset$, $l \neq m$, и $\cup_m U_m = \{\lambda_k\}$. Положим

$$d_\Lambda(U) = \overline{\lim_{m \to \infty}} \max_{\lambda_k, \lambda_v, \lambda_j \in U_m} \frac{|\lambda_k - \lambda_v|}{|\lambda_j|}.$$

Следуя [7], введем индекс конденсации

$$S_\Lambda(U) = \lim_{\delta \to 0} \lim_{m \to \infty} \min_{\lambda_k \in U_m} \frac{\ln |q_{\Lambda,U}^{m,k}(\lambda_k, \delta)|}{|\lambda_k|}, \quad q_{\Lambda,U}^{m,k}(z, \delta) = \prod_{\lambda_v \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|) \setminus U_m} \left(\frac{z - \lambda_v}{3\delta |\lambda_v|} \right)^{n_v}.$$

Первоначально индекс конденсации был введен в работе [5] для тривиального разбиения (т.е. каждая группа U_m состоит из одной точки). В случае, когда разбиение U тривиально, величина $S_\Lambda(U)$ совпадает с величиной S_Λ, введенной в [5]. Поэтому в этом случае будем писать S_Λ вместо символа $S_\Lambda(U)$.

Следующие два утверждения доказаны в работе [9] (соответственно теоремы 2.1 и 5.1). Во втором из них проясняется основной смысл введения величины $S_\Lambda(U)$.

Теорема 2.3. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $\bar{n}(\Lambda) < +\infty$. Тогда для каждого $d > 0$ существует разбиение U последовательности Λ такое, что $S_\Lambda(U) > -\infty$ и $d_\Lambda(U) < d$.*

Теорема 2.4. *Пусть f — целая функция экспоненциального типа, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — ее кратное нулевое множество, $U = \{U_m\}$ — разбиение Λ, для которого $S_\Lambda(U) > -\infty$ и $d_\Lambda(U) < +\infty$. Тогда существуют положительные числа $\{\gamma_k\}_k^\infty$ такие, что*

$$\varlimsup_{m\to\infty} \max_{\lambda_k,\lambda_v\in U_m} \frac{\gamma_k}{|\lambda_v|} < +\infty, \tag{2.6}$$

множества $B_m = \bigcup_{\lambda_k\in U_m} B(\lambda_k, \gamma_k)$, $m \geqslant 1$, попарно не пересекаются и для каждого $\beta \in (0,1)$ существуют $a, a_1 > 0$ такие, что

$$\ln|f(z)| \geqslant -a_1 - a|z|, \quad z \in \partial B_m(\beta), \quad m \geqslant 1, \quad B_m(\beta) = \bigcup_{\lambda_k\in U_m} B(\lambda_k, \beta\gamma_k). \tag{2.7}$$

3. Разложение инвариантных подпространств

Пусть D — неограниченная выпуклая область и W — нетривиальное замкнутое инвариантное относительно дифференцирования подпространство в $H(D)$. Как уже отмечалось выше, в этом случае W допускает спектральный синтез, т.е. верно равенство $W = W(\Lambda, D)$, где Λ — кратный спектр оператора дифференцирования в подпространстве W.

Нетривиальность подпространства $W(\Lambda, D)$ означает, что система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$. В связи с этим для изучения инвариантных подпространств $W \subset H(D)$ в неограниченной выпуклой области достаточно рассмотреть случай, когда $W = W(\Lambda, D)$ и $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$.

Система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$ тогда и только тогда ([1], гл. I, §7, теорема 7.2, и §5, теорема 5.2), когда существует целая функция f экспоненциального типа такая, что $f(\Lambda) = 0$, и некоторый сдвиг $K + \sigma$ ее сопряженной диаграммы K лежит в области D.

Проблема полноты системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространстве $H(D)$ решается просто в случае, когда область D не помещается ни в какую полосу. Это так называемая «большая» выпуклая область. Она содержит некоторый сдвиг любого выпуклого компакта. Следовательно, с учетом теоремы Линделефа в случае «большой» области система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$ тогда и только тогда, когда $\bar{n}(\Lambda) < +\infty$.

В случае когда D лежит в какой-либо полосе простой критерий полноты системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ получен в работах [14], [15]. Он формулируется в терминах логарифмической блок-плотности последовательности Λ.

Пусть D — неограниченная выпуклая область. Символом $J_0(D)$ обозначим подмножество множества $J(D)$, состоящее из всех точек $e^{i\varphi}$ таких, что

$$\{e^{i\alpha} : \alpha \in (\varphi - \pi/2, \varphi + \pi/2)\} \subset J(D).$$

По определению $J_0(D)$ является замкнутым подмножеством единичной окружности $S(0,1)$. Если $D = \mathbb{C}$, то $J_0(D) = S(0,1)$. Если D — полуплоскость $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < a\}$, то $J_0(D) = \{e^{i\alpha} : \alpha \in [-\varphi - \pi/2, -\varphi + \pi/2]\}$. Если D лежит в полосе $\{z \in \mathbb{C} : b < \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < a\}$, то либо $J_0(D)$ состоит из двух точек $\{e^{i(\varphi-\pi/2)}, e^{i(\varphi+\pi/2)}\}$ (в случае, когда D совпадает с этой или меньшей полосой) либо совпадает с одной из этих точек (в противном случае). В остальных случаях $J_0(D)$ является дугой $\{e^{i\alpha} : \alpha \in [\varphi_1, \varphi_2]\}$ единичной окружности, которая опирается на угол раствора строго меньше чем π.

Таким образом, если область D не является полосой, то для некоторых φ_1, φ_2 таких, что $\pi \leqslant \varphi_2 - \varphi_1 \leqslant 2\pi$, верны равенства

$$J(D) = \{e^{i\varphi} : \varphi \in I\}, \quad J_0(D) = \{e^{i\varphi} : \varphi \in [\varphi_1 + \pi/2, \varphi_2 - \pi/2]\},$$

где I — отрезок, интервал или полуинтервал с концами φ_1, φ_2. Если $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$, то отрезок $[\varphi_1 + \pi/2, \varphi_2 - \pi/2]$ вырождается в точку. Это будет, к примеру, когда D — область, ограниченная параболой, или D лежит в полосе, но сама полосой не является. Равенство $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$ реализуется лишь в случае, когда D — полуплоскость.

Лемма 3.1. *Пусть D — неограниченная выпуклая область, и M — подмножество D. Тогда для любых $e^{i\varphi} \in J_0(D)$ и $t > 0$ сдвиг $M + te^{i\varphi}$ лежит в D.*

Доказательство. Пусть $e^{i\varphi} \in J_0(D)$, $t > 0$ и $z \in M$. Согласно определению $J_0(D)$

$$\mathrm{Re}((z + te^{i\varphi})e^{-i\alpha}) < +\infty = H_D(\alpha), \quad \alpha \in (\varphi - \pi/2, \varphi + \pi/2).$$

Кроме того, для всех $\alpha \in [\varphi + \pi/2, \varphi + 3\pi/2]$ имеем:

$$\mathrm{Re}((z + te^{i\varphi})e^{-i\alpha}) = \mathrm{Re}(ze^{-i\alpha}) + \mathrm{Re}(te^{i\varphi}e^{-i\alpha}) \leqslant \mathrm{Re}(ze^{-i\alpha}) < H_D(\alpha).$$

Таким образом,

$$\mathrm{Re}((z + te^{i\varphi})e^{-i\alpha}) < H_D(\alpha), \quad \alpha \in [0, 2\pi].$$

Это означает, что $z + te^{i\varphi} \in D$. Лемма доказана. □

Лемма 3.2. *Пусть D — неограниченная выпуклая область, $0 < \alpha_2 - \alpha_1 < \pi$ и*

$$\Xi_0 = \{e^{i\varphi} : \varphi \in [\alpha_1, \alpha_2]\} \subseteq \mathrm{int} J(D).$$

Тогда существует $e^{i\varphi_0} \in J_0(D)$ такое, что для любых $R, C > 0$ найдется $t_0 > 0$, удовлетворяющее условию

$$\mathrm{Re}((te^{i\varphi_0} - z)e^{i\alpha}) \geqslant C, \quad e^{-i\alpha} \in \Xi_0, \quad |z| \leqslant R, \quad t \geqslant t_0.$$

Доказательство. Так как $\Xi_0 \in \mathrm{int} J(D)$ и $0 < \alpha_2 - \alpha_1 < \pi$, то согласно определению множества $J_0(D)$ найдется $e^{i\varphi_0} \in J_0(D)$ такое, что $\Xi_0 \subset \{e^{i\alpha} : \alpha \in (\varphi_0 - \pi/2, \varphi_0 + \pi/2)\}$. Тогда для некоторого $\delta_0 > 0$ верно также вложение

$$\Xi_0 \subset \{e^{i\alpha} : \alpha \in [\varphi_0 - \pi/2 + \delta_0, \varphi_0 + \pi/2 - \delta_0]\}. \tag{3.1}$$

Пусть $R, C > 0$. В силу (3.1) найдется $c > 0$ такое, что

$$\mathrm{Re}((te^{i\varphi_0} - z)e^{i\alpha}) \geqslant \mathrm{Re}(te^{i\varphi_0}e^{i\alpha}) - R \geqslant tc - R, \quad e^{-i\alpha} \in \Xi_0, \quad |z| \leqslant R.$$

Отсюда для $t_0 = (R + C)^{-1}$ получаем требуемое неравенство. Лемма доказана. □

Сформулируем и докажем результаты о разложении инвариантных подпространств.

Лемма 3.3. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, D — выпуклая область, и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Для любого $m \geqslant 1$ и каждой функции $g \in W(\Lambda, D)$ верно представление $g = g_1 + g_2$, где $g_1 \in W(\Lambda_1, \mathbb{C})$ и $g_2 \in W(\Lambda_2, D)$,*

$$\Lambda_1 = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{m}, \quad \Lambda_2 = \{\lambda_k, n_k\}_{k=m+1}^{\infty},$$

и $W(\Lambda_1, \mathbb{C})$ — пространство экспоненциальных многочленов

$$P(z) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=0}^{n_k - 1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \quad a_{k,n} \in \mathbb{C}, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Доказательство. Пусть $m \geqslant 1$. Так как $g \in W(\Lambda, D)$, то

$$g(z) = \lim_{\mu\to\infty} P_\mu(z), \quad P_\mu(z) = \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n,\mu} z^n e^{\lambda_k z}, \tag{3.2}$$

причем сходимость равномерная на компактах из D. По лемме 2.1 существуют пределы

$$a_{k,n} = \lim_{\mu\to\infty} a_{k,n,\mu}, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geqslant 1.$$

Следовательно, последовательность многочленов

$$P_{\mu,1}(z) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n,\mu} z^n e^{\lambda_k z}, \quad \mu \geqslant 1,$$

сходится равномерно на компактах плоскости к многочлену

$$g_1(z) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}.$$

Тогда в силу (3.2) последовательность многочленов

$$P_{\mu,2}(z) = \sum_{k=m+1}^{\mu} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n,\mu} z^n e^{\lambda_k z}, \quad \mu \geqslant m+1,$$

сходится равномерно на компактах из области D к функции $g_2 = g - g_1$. Поэтому $g_2 \in W(\Lambda_2, D)$. Лемма доказана. □

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\Lambda_1 = \{\xi_p, m_p\}$ и $\Lambda_2 = \{\varsigma_j, l_j\}$. Будем писать $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, если для каждого $k \geqslant 1$ существует $p \geqslant 1$ такое, что $\lambda_k = \xi_p$ и $n_k = m_p$, либо существует $j \geqslant 1$ такое, что $\lambda_k = \varsigma_j$ и $n_k = l_j$.

Теорема 3.4. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, D — выпуклая область, и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Тогда существуют последовательности Λ_1 и Λ_2 такие, что*

$$\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2, \qquad \Xi(\Lambda_2) \subset S(0,1) \setminus \mathrm{int}J(D),$$

и для каждой функции $g \in W(\Lambda, D)$ верно представление $g = g_1 + g_2$, где $g_1 \in W(\Lambda_1, \mathbb{C})$ и $g_2 \in W(\Lambda_2, D)$. В частности, $\Lambda_1 = \emptyset$ и $g_1 = 0$, когда $\Xi(\Lambda) \cap \mathrm{int}J(D) = \emptyset$, и $\Lambda_2 = \emptyset$ и $g_2 = 0$, когда $\Xi(\Lambda) \subset \mathrm{int}J(D)$.

Доказательство. Пусть $g \in W(\Lambda, D)$. Рассмотрим вначале случай, когда

$$\Xi(\Lambda) \cap \mathrm{int}J(D) = \emptyset.$$

Положим $\Lambda_1 = \emptyset$, $g_1 = 0$, $\Lambda_2 = \Lambda$ и $g_2 = g$. Тогда $g_2 \in W(\Lambda_2, D) = W(\Lambda, D)$. Таким образом, в этом случае утверждение теоремы верно.

Пусть теперь $\Xi(\Lambda) \cap \mathrm{int}J(D) \neq \emptyset$. Выберем последовательности $\{\alpha_{1,l}^s\}$, $\{\alpha_{2,l}^s\}$, $s = 1, 2$, такие, что

$$\begin{aligned}
&\alpha_{2,l}^s - \alpha_{1,l}^s < \pi, \quad \alpha_{1,l+1}^s < \alpha_{1,l}^s < \alpha_{2,l}^s < \alpha_{2,l+1}^s, \quad l \geqslant 1,\\
&\Xi_{s,l} = \{e^{i\varphi} : \varphi \in [\alpha_{1,l}^s, \alpha_{2,l}^s]\} \subset \mathrm{int}J(D), \quad s = 1, 2,\\
&\bigcup_{l=1}^{\infty} (\Xi_{1,l} \cup \Xi_{2,l}) = \mathrm{int}J(D).
\end{aligned}$$

По условию система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$. Тогда существует целая функция f экспоненциального типа такая, что $f(\Lambda) = 0$, и некоторый сдвиг $K + w_0$ ее сопряженной диаграммы K лежит в области D.

Пусть Λ^1 — кратное нулевое множество функции f. Так как f имеет экспоненциальный тип, то по теореме Линделефа имеем: $\bar{n}(\Lambda^1) < +\infty$. Тогда по теореме 2.3 для каждого $d > 0$ существует разбиение $U(d) = \{U_m(d)\}$ последовательности Λ^1 такое, что верны неравенства $S_{\Lambda^1}(U(d)) > -\infty$, $d_{\Lambda^1}(U(d)) < d$.

Фиксируем $l \geqslant 1$. Составим подпоследовательность $\{U_{m(1,l,j)}(d)\}$ всех групп $U_m(d)$, каждая из которых содержит точку $\lambda_k = r_k e^{i\varphi_k}$ такую, что $e^{-i\varphi_k} \in \Xi_{1,l}$, а также подпоследовательность $\{U_{m(2,l,j)}(d)\}$ всех групп $U_m(d)$, каждая из которых содержит точку $\lambda_k = r_k e^{i\varphi_k}$ такую, что $e^{-i\varphi_k} \in \Xi_{2,l}$ и при этом $e^{-i\varphi_p} \in \Xi_{1,l}$ для всех $\lambda_p = r_p e^{i\varphi_p} \in U_{m(2,l,j)}(d)$ (в некоторых случаях совокупность $\{U_{m(2,l,j)}(d)\}$ может оказаться пустой). Выберем теперь $d_l \in (0, 1/2)$ и j_l так, что $e^{-i\varphi_k} \in \Xi_{s,l+1}$ для всех $\lambda_k \in U_{m(s,,l,j)}(d_l)$, $j \geqslant j_l$ и $s = 1, 2$.

По теореме 2.4 найдем положительные числа $\gamma_k = \gamma_{k,l}$, $k \geqslant 1$, такие, что верно (2.6) и множества $B_{m,l} = \cup_{\lambda_k \in U_m(d_l)} B(\lambda_k, \gamma_{k,l})$, $m \geqslant 1$, попарно не пересекаются, а также для каждого числа $\beta \in (0,1)$ найдем $a = a(\beta)$, $a_1 = a_1(\beta) > 0$ такие, что верно (2.7).

Увеличивая при необходимости номер j_l, найдем $\beta_l \in (0, 1/2)$ такое, что для любых $j \geqslant j_l$ и $z = re^{i\varphi} \in B_{m(s,l,j)}(\beta_l)$ имеет место включение $e^{-i\varphi} \in \Xi_{s,l+2}$, $s = 1, 2$.

Определим теперь множества $B_{s,l,p}$. В качестве $B_{s,1,p}$ возьмем все множества $B_{m(s,1,j)}(\beta_1)$. Пусть $l > 1$. В качестве $B_{s,l,p}$ возьмем все множества

$$B_{m(s,l,j)}(\beta_l) \setminus \left(\bigcup_{\eta=1}^{2} \bigcup_{\nu=1}^{l-1} \bigcup_{\mu \geqslant 1} B_{\eta,\nu,\mu} \right),$$

каждое из которых содержит хотя бы одну точку λ_k.

Отметим, что множества $B_{s,l,p}$ попарно не пересекаются, любое из них содержит хотя бы одну точку λ_k, и каждая точка $\lambda_k = r_k e^{i\varphi_k}$ такая, что $e^{-i\varphi_k} \in \mathrm{int} J(D)$, принадлежит одному и только одному из множеств $B_{s,l,p}$.

Положим

$$A_l = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant l} a(\beta_\nu), \quad A_{1,l} = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant l} a_1(\beta_\nu).$$

В силу (2.7) имеем:

$$\ln |f(z)| \geqslant -A_{1,l} - A_l |z|, \quad z \in \partial B_{s,l,p}, \quad p, l \geqslant 1, \quad s = 1, 2. \tag{3.3}$$

Так как $g \in W(\Lambda, D)$, то

$$g(z) = \lim_{\mu \to \infty} P_\mu(z), \quad P_\mu(z) = \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{n=0}^{n_k - 1} a_{k,n,\mu} z^n e^{\lambda_k z},$$

причем сходимость равномерная на компактах из области D. Пусть $w \in K$. По формуле (2.2) определяется интерполирующая функция $\omega_{f_w}(\lambda, \sigma, P_\mu)$ для всех $\mu \geqslant 1$ и $\sigma \in \mathbb{C}$. Положим $a_{k,n,\mu} = 0$, $k > \mu$. Из (2.4) следует, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B(\lambda_k, b_k)} \frac{\omega_{f_w}(\lambda, \sigma, P_\mu)}{f_w(\lambda)} e^{\lambda z} d\lambda = \sum_{n=0}^{n_k - 1} a_{k,n,\mu} z^n e^{\lambda_k z}, \quad \sigma \in \mathbb{C}, \quad k \geqslant 1.$$

Фиксируем $l \geqslant 1$. По теореме о вычетах получаем:

$$\int\limits_{\partial B_{s,l,p}} \frac{\omega_{f_w}(\lambda, \sigma, P_\mu)}{f_w(\lambda)} e^{\lambda z} d\lambda = \sum_{\lambda_k \in B_{s,l,p}} a_{k,n,\mu} z^n e^{\lambda_k z}, \quad p \geqslant 1, \quad s = 1, 2. \tag{3.4}$$

Пусть

$$h - 1 = \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} h_f(\varphi),$$

$s = 1, 2$ и $\varepsilon > 0$. Так как P_μ — целая функция, то в силу (2.3), (3.3) и определения f_w имеем:

$$\left|\int\limits_{\partial B_{s,l,p}} \frac{\omega_{f_w}(\lambda,\sigma,P_\mu)}{f_w(\lambda)}e^{\lambda z}d\lambda\right| \leqslant A(f,\varepsilon)b_{s,l,p}\max_{\lambda\in\partial B_{s,l,p}}\left(\frac{\exp(|\lambda|h-\mathrm{Re}((w+\sigma-z)\lambda))}{\exp(-A_{1,l}-A_l|\lambda|-\mathrm{Re}w)}\right)\max_{x\in\Omega_\sigma(\varepsilon)}|P_\mu(x)|$$
$$=A(f,\varepsilon)b_{s,l,p}e^{A_{1,l}}\max_{x\in\Omega_\sigma(\varepsilon)}|P_\mu(x)|$$
$$\cdot\max_{\lambda\in\partial B_{s,l,p}}\exp(|\lambda|(h+A_l)-\mathrm{Re}((\sigma-z)\lambda)),$$

где $b_{s,l,p}$ — длина границы $\partial B_{s,l,p}$, $\sigma\in\mathbb{C}$ и $p\geqslant 1$.

Для каждого $p\geqslant 1$ выберем какую-нибудь точку $\lambda_{k(s,l,p)}\in B_{s,l,p}$. Отметим, что граница $\partial B_{s,l,p}$ состоит из дуг окружностей $S(\lambda_k,\beta_\nu\gamma_k)$, $\lambda_k\in B_(s,\nu,p)$, $\nu\leqslant l$, которые имеют непустое пересечение с окружностями $S(\lambda_k,\beta_l\gamma_k)$, $\lambda_k\in B_{s,l,p}$. Поэтому с учетом неравенств $\bar{n}(\Lambda^1)<+\infty$, $d_{\Lambda^1}(U^1(d_0))<+\infty$ и (2.6) найдутся числа $c_l, c_{0,l}>0$ такие, что

$$b_{s,l,p}\leqslant c_{0,l}|\lambda_{k(s,l,p)}|^2\leqslant c_le^{|\lambda_{k(s,l,p)}|},\quad p\geqslant 1,\quad s=1,2. \tag{3.5}$$

Пусть $l\geqslant 1$. Согласно определению числа β_l найдем номер p_l такой, что для любых $p\geqslant p_l$, $s=1,2$ и $z=re^{i\varphi}\in B_{s,l,p}$ имеет место включение $e^{-i\varphi}\in\Xi_{s,l+2}$. По лемме 3.2 существует $e^{i\varphi_0}\in J_0(D)$ такое, что для любого $R>0$ найдется $t_l>0$, удовлетворяющее условию

$$\mathrm{Re}((t_le^{i\varphi_{s,l}}-z)\lambda)\geqslant(h+A_l+|w|+|w_0|+4)|\lambda|,\quad \lambda\in\partial B_{s,l,p},\quad p\geqslant p_l,\quad |z|\leqslant R.$$

Положим $\sigma_{s,l}=w+w_0+t_le^{i\varphi_{s,l}}$. Пусть $p\geqslant p_l$ и $|z|\leqslant R$. Тогда в силу (3.5) имеем:

$$\left|\int\limits_{\partial B_{s,l,p}} \frac{\omega_{f_w}(\lambda,\sigma_{s,l},P_\mu)}{f_w(\lambda)}e^{\lambda z}d\lambda\right|\leqslant A(f,\varepsilon)e^{A_{1,l}}\max_{\mu\in\Omega_{\sigma_{s,l}}}(\varepsilon)|P_\mu(\mu)|b_{s,l,p}\max_{\lambda\in\partial B_{s,l,p}}\exp(-4|\lambda|).$$

Так как $d_l,\beta_l\in(0,1/2)$, то, увеличивая при необходимости номер p_l, можно считать, что

$$-4|\lambda|\leqslant -2|\lambda_{k(s,l,p)}|,\quad \lambda\in\partial B_{s,l,p},\quad p\geqslant p_l.$$

Поэтому с учетом (3.5) получаем:

$$\left|\int\limits_{\partial B_{s,l,p}} \frac{\omega_{f_w}(\lambda,\sigma_{s,l},P_\mu)}{f_w(\lambda)}e^{\lambda z}d\lambda\right|\leqslant A(\varepsilon,l)\max_{\mu\in\Omega_{\sigma_{s,l}}}(\varepsilon)|P_\mu(\mu)|e^{-|\lambda_{k(s,l,p)}|},\quad p\geqslant p_l,\quad |z|\leqslant R,$$

где $A(\varepsilon,l)=A(f,\varepsilon)e^{A_{1,l}}c_l$. Имеем:

$$\Omega_{\sigma_{s,l}}(\varepsilon)=\Omega(\varepsilon)+\sigma_{s,l}=\partial(K(\varepsilon))-w+\sigma_{s,l}=\partial(K(\varepsilon))+w_0+t_le^{i\varphi_{s,l}}.$$

Компакт $K+w_0$ лежит в области D. Поэтому согласно лемме 3.1 для некоторого числа $\varepsilon_l>0$ компакт $\Omega_{\sigma_{s,l}}(\varepsilon_l)$ также лежит в области D. Последовательность P_μ сходится равномерно на этом компакте. Следовательно,

$$\left|\int\limits_{\partial B_{s,l,p}} \frac{\omega_{f_w}(\lambda,\sigma_{s,l},P_\mu)}{f_w(\lambda)}e^{\lambda z}d\lambda\right|\leqslant A(\varepsilon_l,l)B(R,l)e^{-|\lambda_{k(s,l,p)}|},\quad p\geqslant p_l,\quad |z|\leqslant R, \tag{3.6}$$

Выберем номер $p_l(R)$ такой, что

$$\left|\int\limits_{\partial B_{s,l,p}} \frac{\omega_{f_w}(\lambda,\sigma_{s,l},P_\mu)}{f_w(\lambda)}e^{\lambda z}d\lambda\right|\leqslant e^{-|\lambda_{k(s,l,p)}|/2},\quad p\geqslant p_l(R),\quad |z|\leqslant R. \tag{3.7}$$

Можно считать, что функция $p_l(R)$ не убывает.

Пусть $\mu \geqslant 1$. Представим многочлены P_μ в виде

$$P_\mu(z) = P_{\mu,1}(z) + P_{\mu,2}(z), \quad \mu \geqslant 1, \qquad P_{\mu,1}(z) = \sum_{k=1}^{\mu}\sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n,\mu,1} z^n e^{\lambda_k z},$$

$$a_{k,n,\mu,1} = a_{k,n,\mu}, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad \lambda_k \in B_{s,l,p}, \quad s = 1,2, \quad l \geqslant 1, \quad p \geqslant p_l(l),$$

$$a_{k,n,\mu,1} = 0, \qquad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad \lambda_k \in B_{s,l,p}, \quad s = 1,2, \quad l \geqslant 1, \quad p \geqslant p_l(l).$$

С учетом (3.4), определения многочлена $P_{\mu,1}$, множеств $B_{s,l,p}$ и того, что последние попарно не пересекаются, получаем:

$$P_{\mu,1}(z) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{p=p_l(l)}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B_{s,l,p}} \frac{\omega_{f_w}(\lambda, \sigma_{s,l}, P_\mu)}{f_w(\lambda)} e^{\lambda z} d\lambda, \quad \mu \geqslant 1.$$

Отметим, что последние суммы содержат лишь конечное число ненулевых слагаемых. Пусть $m \geqslant 1$. В силу (3.6) и (3.7) имеем:

$$|P_{\mu,1}(z)| \leqslant \sum_{l=1}^{m-1}\sum_{p=p_l(l)}^{p_l(m)-1} A(\varepsilon_l, l) B(m,l) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-|\lambda_k|/2}, \quad |z| \leqslant m, \quad \mu \geqslant 1.$$

Так как $\bar{n}(\Lambda^1) < +\infty$, то последний ряд сходится. Таким образом, последовательность функций $\{|P_{\mu,1}|\}$ равномерно ограничена на любом компакте плоскости. Применяя теорему Монтеля, найдем подпоследовательность $\{P_{\mu_j,1}\}_{j=1}^{\infty}$, которая сходится равномерно на каждом компакте плоскости. Пусть

$$g_1, 0(z) = \lim_{j\to\infty} P_{\mu_j,1}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Поскольку $\{P_\mu\}$ сходится равномерно на компактах из D, то $P_{\mu_j,2} = P_{\mu_j} - P_{\mu_j,1}$ также сходится равномерно на компактах из D к некоторой функции $g_{2,0}$. Очевидно, что $g = g_{1,0} + g_{2,0}$.

По построению $g_{1,0} \in W(\Lambda_{1,0}, \mathbb{C})$, где $\Lambda_{1,0}$ — последовательность всех пар λ_k, n_k таких, что $\lambda_k \in B_{s,l,p}$, $s = 1,2$, $l \geqslant 1$, $p \geqslant p_l(l)$. Пусть $\Lambda_{2,0}$ — последовательность, дополняющая $\Lambda_{1,0}$ до Λ, т.е. $\Lambda = \Lambda_{1,0} \cup \Lambda_{2,0}$. Тогда $g_2 \in W(\Lambda_{2,0}, D)$.

Отметим, что каждое из множеств

$$\{t\omega : \omega \in \Xi_{1,l} \cup \Xi_{2,l}, t > 0\}, \quad l \geqslant 1,$$

содержит лишь конечное число точек $\bar{\lambda}_k$ таких, что $(\lambda_k, n_k) \in \Lambda_{2,0}$. Поэтому верно вложение $\Xi(\Lambda_{2,0}) \subseteq S(0,1) \setminus \mathrm{int} J(D)$.

Пусть $\Xi(\Lambda) \subseteq \mathrm{int} J(D)$. Тогда $\Lambda_{2,0}$ — конечное множество. В этом случае $g_{2,0}$ — многочлен. Поэтому $g_{2,0} \in W(\Lambda_2, 0, \mathbb{C})$. Положим $g_1 = g_{1,0} + g_{2,0}$, $\Lambda_1 = \Lambda_{1,0} \cup \Lambda_{2,0}$, $\Lambda_2 = \emptyset$ и $g_2 = 0$.

Пусть теперь $\Xi(\Lambda) \setminus \mathrm{int} J(D) \neq \emptyset$. В этом случае положим $\Lambda_1 = \Lambda_{1,0}$, $\Lambda_2 = \Lambda_{2,0}$, $g_1 = g_{1,0}$ и $g_2 = g_{2,0}$. Теорема доказана.

□

4. Фундаментальный принцип

В заключительном параграфе сформулируем и докажем основной результат работы. Но прежде, приведем некоторые известные результаты, которые нам понадобятся.

Пусть $a, \varphi \in \mathbb{R}$. Рассмотрим полуплоскость

$$\Pi(a, \varphi) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < a\}.$$

Положим

$$S_\Lambda(\varphi) = \min_{\{\lambda_{k(j)}\}} \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{j\to\infty} \frac{\ln|q_\Lambda^{k(j)}(\lambda_{k(j)},\delta)|}{|\lambda_{k(j)}|}, \quad q_\Lambda^k(z,\delta) = \prod_{\lambda_\nu\in B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|),\nu\neq k} \left(\frac{z-\lambda_\nu}{3\delta|\lambda_\nu|}\right)^{n_\nu},$$

где минимум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{k(j)}\}$ последовательности $\{\lambda_k\}$ таким, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}| \to e^{-i\varphi}$, $j\to\infty$.

Последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ называется почти вещественной, если $\Xi(\Lambda) = \{1\}$ и $\mathrm{Re}\lambda_k > 0$, $k \geqslant 1$.

Следующий результат доказан в теореме 3.5 из работы [11].

Теорема 4.1. *Пусть $a\in\mathbb{R}$, W — замкнутое нетривиальное инвариантное подпространство в $H(\Pi(a,0))$ с почти вещественным спектром $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Следующие утверждения эквивалентны.*

1) Каждая функция $g\in W$ раскладывается в ряд (1.1), сходящийся равномерно на компактах в $\Pi(a,0)$.

2) $S_\Lambda = 0$.

Сформулируем еще результат из работы [9] (следствие из теоремы 9.5), который решает проблему фундаментального принципа для инвариантных подпространств целых функций.

Теорема 4.2. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\bar n(\Lambda) < +\infty$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $S_\Lambda > -\infty$;

2) Каждая функция $g\in W(\Lambda,\mathbb{C})$ представляется рядом (1.1), который сходится равномерно на компактах плоскости.

Докажем теперь один вспомогательный результат, который имеет и самостоятельный интерес.

Теорема 4.3. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $S_\Lambda = -\infty$. Тогда существуют числа $\{d_{k,n}\}$ и номера k_s, $1 = k_1 < k_2 < \ldots$, такие, что ряд*

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{k=k_s}^{k_{s+1}-1}\sum_{n=0}^{n_k-1} d_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}\right) \tag{4.1}$$

сходится равномерно на компактах в плоскости, а ряд (1.1) расходится в каждой точке плоскости.

Доказательство. Согласно условию и определению S_Λ найдем подпоследовательность натуральных чисел $\{k(p)\}_{p=1}^\infty$ такую, что

$$\frac{\ln|q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)},\delta_p)|}{|\lambda_{k(p)}|} \leqslant -p, \tag{4.2}$$

где $(0,1/4)\ni\delta_1 \geqslant \ldots \geqslant \delta_p \to 0$, и

$$|\lambda_{k(p+1)}| \geqslant 2|\lambda_{k(p)}|, \quad p\geqslant 1. \tag{4.3}$$

Положим

$$\lambda_{k(p)} = r_p e^{i\varphi_p}, \quad B_p(c) = B(\lambda_{k(p)}, c\delta_p r_p),$$

$$c_p = \sqrt{|q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)},\delta_p)|}, \tag{4.4}$$

$$g_p(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B_p(5)} \frac{e^{\lambda z}d\lambda}{(\lambda-\lambda_{k(p)})q_\Lambda^{k(p)}(\lambda,\delta_p)}, \quad p\geqslant 1. \tag{4.5}$$

Имеем:

$$|q_\Lambda^{k(p)}(\lambda,\delta_p)| \geqslant 1, \quad \lambda \in \partial B_p(5).$$

Следовательно,

$$|g_p(z)| \leqslant \sup_{\lambda\in\partial B_p(5)} |e^{\lambda z}| \leqslant \exp(\mathrm{Re}(\lambda_{k(p)}z) + 5\delta_p r_p|z|), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.6}$$

Пусть K — произвольный компакт. В силу (4.6)

$$|g_p(z)| \leqslant e^{Ar_p}, \quad z \in K, \quad p \geqslant 1,$$

для некоторого $A > 0$. Отсюда с учетом (4.2)–(4.4) получаем:

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} |c_p g_p(z)| \leqslant \sum_{p=p_0}^{\infty} \exp(r_p(-p/2+A)) \leqslant \sum_{p=p_0}^{\infty} e^{-r_p} < \infty, \quad z \in K.$$

где $p_0 \geqslant 2(A+1)$. Таким образом, ряд

$$g(z) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p g_p(z)$$

сходится равномерно на каждом компакте плоскости. Используя вычеты и определение функции $q_\Lambda^{k(p)}(\lambda,\delta_p)$ и (4.4) для каждого $p \geqslant 1$, получаем:

$$c_p g_p(z) = d_{k(p),0} e^{\lambda_{k(p)}z} + \sum_{\lambda_k\in B_p(1), k\neq k(p)} \sum_{n=0}^{n_k-1} d_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \quad d_{k(p),0} = \frac{c_p}{q_\Lambda^{k(p)}(\lambda,\delta_p)}.$$

Положим еще $d_{k(p),n} = 0$, $n = \overline{1, n_{k(p)}-1}$,

$$d_{k,n} = 0, \quad n = \overline{0, n_{k(p)}-1}, \quad \lambda_k \in B_p(1), \quad p \geqslant 1.$$

Так как $\delta_p \in (0,1/4)$, $p \geqslant 1$, то в силу (4.3) найдутся номера k_s, $1 = k_1 < k_2 < \ldots$, такие, что

$$\sum_{s=1}^{m} \left(\sum_{k=k_s}^{k_{s+1}-1} \sum_{n=0}^{n_k-1} d_{k,n} z^n e^{\lambda\lambda_k z} \right) = \sum_{p=1}^{m} c_p g_p(z), \quad m \geqslant 1.$$

Таким образом, ряд (4.1) сходится равномерно на компактах в плоскости.

В силу (4.4) и (4.2) имеем:

$$|d_{k(p),0} e^{\lambda_{k(p)}z}| = \frac{1}{\sqrt{|q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)},\delta_p)|}} |e^{\lambda_{k(p)}z}| \geqslant \exp((p/2-|z|)r_p) \to \infty, \quad p \to \infty.$$

Следовательно, ряд (1.1) расходится в каждой точке плоскости. Теорема доказана. □

Сформулируем и докажем, наконец, основной результат работы.

Теорема 4.4. *Пусть $a,\varphi \in \mathbb{R}$, W — замкнутое инвариантное подпространство в $H(\Pi(a,\varphi))$ со спектром $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\bar{n}(\Lambda) < +\infty$. Следующие утверждения эквивалентны.*

1) Каждая функция $g \in W$ раскладывается в ряд (1.1), сходящийся равномерно на компактах в $\Pi(a,\varphi)$.

2) $S_\Lambda(\varphi) = 0$ и $S_\Lambda > -\infty$.

Доказательство. По условию $\bar{n}(\Lambda) < +\infty$. Следовательно, система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(\Pi(a,\varphi))$ и W — замкнутое нетривиальное инвариантное подпространство в $H(\Pi(a,0))$.

Пусть верно 1). Предположим, что $S_\Lambda = -\infty$. Тогда по теореме 4.3 существуют числа $\{d_{k,n}\}$ и номера k_s, $1 = k_1 < k_2 < \ldots$, такие, что ряд (4.1) сходится равномерно на компактах в плоскости, а ряд (1.1) расходится в каждой точке плоскости. Пусть g — сумма ряда (4.1). Тогда $g \in W(\Lambda, \mathbb{C}) \subset W(\Lambda, \Pi(a,\varphi))$. Ранее отмечалось, что W допускает спектральный синтез. Поэтому $W = W(\Lambda, \Pi(a,\varphi))$. Согласно утверждению 1) имеет место представление

$$g(z) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \quad z \in \Pi(a,\varphi),$$

причем ряд сходится равномерно на компактах в полуплоскости $\Pi(a,\varphi)$. Тогда из леммы 2.2 следует, что

$$d_{k,n} = a_{k,n}, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geqslant 1.$$

Это противоречит тому, что ряд (1.1) расходится в каждой точке плоскости. Таким образом, $S_\Lambda > -\infty$.

Пусть $\{\lambda_{k(j)}\}$ — подпоследовательность $\{\lambda_k\}$ такая, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}| \to e^{-i\varphi}$, $j \to \infty$. Положим $\Lambda_0 = \{e^{i\varphi}\lambda_{k(j)}, n_{k(j)}\}$. Тогда $\Xi(\Lambda_0) = \{1\}$. Поэтому найдется номер m такой, что $\Lambda_{0,0} = \{e^{i\varphi}\lambda_{k(j)}, n_{k(j)}\}_{j=m}^{\infty}$ является почти вещественной последовательностью. Пусть $\Lambda_{0,1} = \{\lambda_{k(j)}, n_{k(j)}\}_{j=m}^{\infty}$. Согласно утверждению 1) каждая функция из подпространства $W(\Lambda_{0,1}, \Pi(a,\varphi)) \subset W(\Lambda, \Pi(a,\varphi))$ раскладывается в ряд (1.1), сходящийся равномерно на компактах в $\Pi(a,\varphi)$. Следовательно, этим же свойством обладает и каждая функция из подпространства $W(\Lambda_{0,0}, \Pi(a,0))$, но уже на компактах в $\Pi(a,0)$. Тогда по теореме 4.1 верно равенство $S_{\Lambda_{0,0}} = 0$. Отсюда следует, что $S_{\Lambda_1} = 0$, где $\Lambda_1 = \{\lambda_{k(j)}, n_{k(j)}\}$. Таким образом, $S_\Lambda(\varphi) = 0$.

Пусть теперь верно 2) и $g \in W(\Lambda, \Pi(a,\varphi))$. Так как $\bar{n}(\Lambda) < +\infty$, то система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(\Pi(a,\varphi))$. По теореме 3.4 существуют последовательности Λ_1 и Λ_2 такие, что $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $\Xi(\Lambda_2) \subset S(0,1) \setminus \mathrm{int} J(\Pi(a,\varphi))$ и верно представление $g = g_1 + g_2$, где $g_1 \in W(\Lambda_1, \mathbb{C})$ и $g_2 \in W(\Lambda_2, \Pi(a,\varphi))$.

Поскольку $S_\Lambda > -\infty$, то $S_{\Lambda_1} > -\infty$. Тогда по теореме 4.1 функция g_1 представляется рядом (1.1), который сходится равномерно на компактах плоскости.

Множество $S(0,1) \setminus \mathrm{int} J(\Pi(a,\varphi))$ совпадает с точкой $e^{i\varphi}$. Поэтому $\Xi(\Lambda_2) \subseteq \{e^{i\varphi}\}$. Пусть $\Lambda_2 = \{\lambda_{k(j)}, n_{k(j)}\}$. Если Λ_2 — конечная последовательность, то g_2 — экспоненциальный многочлен, и теорема доказана. В противном случае найдется номер m такой, что $\Lambda_{2,0} = \{e^{i\varphi}\lambda_{k(j)}, n_{k(j)}\}_{j=m}^{\infty}$ является почти вещественной последовательностью. Пусть $\Lambda_{2,1} = \{e^{i\varphi}\lambda_{k(j)}, n_{k(j)}\}_{j=1}^{m-1}$ и $\Lambda_{2,2} = \{\lambda_{k(j)}, n_{k(j)}\}_{j=m}^{\infty}$. По лемме 3.3 верно представление $g_2 = g_{2,1} + g_{2,2}$, где $g_{2,1}$ — экспоненциальный многочлен из пространства $W(\Lambda_{2,1}, \mathbb{C})$ и $g_{2,2} \in W(\Lambda_{2,2}, \Pi(a,\varphi))$. Так как $S_\Lambda(\varphi) = 0$, то $S_{\Lambda_{2,0}} = 0$. Тогда по теореме 4.1 каждая функция из $W(\Lambda_{2,0}, \Pi(a,0))$ раскладывается в ряд (1.1), сходящийся равномерно на компактах в $\Pi(a,0)$. Следовательно, функция $g_{2,2}$ раскладывается в ряд (1.1), сходящийся равномерно на компактах в $\Pi(a,\varphi)$. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев А.Ф., *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука, 1983.
2. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций.I. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Матем. сб. **87(129)**:4, 459–489 (1972).
3. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций.II. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Матем. сб. **88(130)**, 3–30 (1972).
4. Гольдберг А.А., Левин Б.Я., Островский И.В. *Целые и мероморфные функции* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. **85**, 5–185 (1991).
5. Кривошеев А.С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях* // Изв. РАН. Сер. матем. **68**:2, 71–136 (2004).

6. Кривошеева О.А., Кривошеев А.С. *Критерий справедливости фундаментального принципа для инвариантных подпространств в ограниченных выпуклых областях комплексной плоскости* // Функц. анализ и его прил. **46**:4, 14–30 (2012).
7. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций* // Матем. сб. **204**:12, 49–104 (2013).
8. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Фундаментальный принцип и базис в инвариантном подпространстве* // Матем. заметки. **99**:5, 684–697 (2016).
9. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Базис в инвариантном подпространстве целых функций* // Алгебра и анализ. **27**:2, 132–195 (2015).
10. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Замкнутость множества сумм рядов Дирихле* // Уфимск. матем. журн. **5**:3, 96–120 (2013).
11. Кривошеева О.А., Кривошеев А.С. *Представление функций из инвариантного подпространства с почти вещественным спектром* // Алгебра и анализ. **29**:4, 82–139 (2017).
12. Леонтьев А.Ф. *Последовательности полиномов из экспонент.* М.: Наука, 1980.
13. Левин Б.Я.*Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат. 1956.
14. Хабибуллин Б.Н., *О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси* // Матем. сб. **180**:5, 706–719 (1989).
15. Malliaven P. , Rubel L. *On small entire functions of exponential type with given zeros* // Bull. Soc. Math. France **89**, 175–201 (1961).

Александр Сергеевич Кривошеев,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
Олеся Александровна Кривошеева,
ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru