ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 3 (2020). С. 22-29.

УДК 517.958

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПО КОНЕЧНОМУ НАБОРУ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Б.Е. КАНГУЖИН

Аннотация. Восстановление граничных условий для дифференциальных уравнений высших порядков по некоторому набору спектров затруднено двумя обстоятельствами. Во-первых, в отличие от дифференциальных уравнений второго порядка в случае дифференциальных уравнений высших порядков отсутствуют треугольные операторы преобразования. Во-вторых, не распадающиеся граничные условия вносят дополнительные аналитические трудности при их восстановлении по набору спектров. Отметим, что в данной работе предложен новый способ нормировки граничных условий, который адаптирован на последующее их восстановление по некоторому набору спектров краевых задач. Иначе говоря, прежде чем ставить вопрос, по каким данным надо восстанавливать набор граничных условий, их надо привести к каноническому виду. Затем, исходя из предлагаемого канонического вида, выбирается система краевых задач, по набору спектров которых происходит восстановление граничных условий.

Предложен алгоритм восстановления двухточечных граничных условий краевой задачи для дифференциальных уравнений высших порядков. В качестве дополнительной информации выступает конечный набор собственных значений специально построенных краевых задач. Согласно терминологии В.А. Садовничего такие задачи называются эталонными задачами. В работе особое внимание уделяется специальному выбору эталонных задач.

Ключевые слова: граничные условия, краевые задачи, собственное число, эталонные задачи.

Mathematics Subject Classification: 34B05, 47A10

1. Введение

Восстановлению обыкновенных дифференциальных уравнений и их краевых условий по набору собственных значений посвящены работы [1] – [4]. В монографии [5] систематизированы методы восстановления дифференциальных операторов на отрезке. В случае нераспадающихся граничных условий авторы монографии [5] предлагают для решения задачи восстановления метод эталонных задач. Согласно их методике каждой краевой задаче с нераспадающимися условиями для дифференциального уравнения надо уметь подбирать набор эталонных краевых задач, по спектрам которых и производится восстановление исходного оператора. Однако методика подбора эталонных задач, по нашему

B.E. Kanguzhin, Recover of two-point boundary conditions by a finite set of eigenvalues of boundary value problems for higher order differential equations.

Работа поддержана Комитетом науки МОН РК (грант AP05131292).

Поступила 15 января 2020 г.

мнению, требует определенной систематизации. В данной работе процесс выбора эталонных задач несколько систематизирован. Вообще говоря, процесс восстановления краевых условий и дифференциального уравнения распадается на два этапа. На первом этапе по некоторым спектральным данным восстанавливают коэффициенты дифференциального уравнения, а затем на заключительном этапе восстанавливают коэффициенты граничных условий. Отметим, что довольно полно разработаны методы восстановления коэффициентов дифференциального уравнения. При этом могут параллельно определяться и некоторые граничные коэффициенты. В общем случае без заключительного этапа восстановления оставшихся коэффициентов граничных условий не обойтись. В монографии [5] пропагандируется, именно, указанная методика восстановления дифференциального оператора в два этапа.

В данной работе предполагается, что первый этап восстановления коэффициентов дифференциального уравнения осуществлен. Остается восстановить коэффициенты граничных условий краевой задачи для заданного дифференциального уравнения по некоторому набору собственных значений некоторых эталонных задач. Во-первых, надо уточнить набор эталонных задач. При этом одна из эталонных задач должна совпадать с исходной краевой задачей. Во-вторых, сколько и какие собственные значения выбранных эталонных задач однозначно определяют граничные условия исходной краевой задачи?

2. Исходная краевая двухточечная задача

В функциональном пространстве $L_2(0,1)$ рассмотрим задачу на собственные значения

$$d(y) \equiv y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)}(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1 \tag{2.1}$$

$$V_j(y) \equiv \sum_{s=1}^{n} \left(\alpha_{js} y^{(s-1)}(0) + \beta_{js} y^{(s-1)}(1) \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n \tag{2.2}$$

где $p_k(x)$ – достаточно гладкие коэффициенты дифференциального уравнения, α_{js}, β_{js} – числовые коэффициенты граничных условий. Предполагаем, что $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (2.1) и (2.2). Прямая задача спектрального анализа: по заданным дифференциальному выражению $d(\cdot)$ и по набору граничных форм $\{V_j(\cdot)\}$ исследовать спектр и свойства системы корневых функций задачи (2.1)-(2.2). Согласно предположению резольвентное множество задачи (2.1)–(2.2) не пусто и, как следствие, вытекает, что спектр исходной задачи состоит из счетного числа собственных значений [6]. При решении прямой задачи сначала надо нормировать набор граничных условий (2.1)–(2.2). К примеру [6], если условия (2.2) эквивалентны регулярным по Биркгофу граничным условиям, то система корневых функций задачи (2.1)–(2.2) образует полную в $L_2(0,1)$ систему.

В данной работе исследуется обратная задача: по заданному дифференциальному уравнению (2.1) и некоторому набору собственных значений эталонных задач однозначно восстановить коэффициенты граничных условий (2.2). Ниже уточним, как надо выбирать эталонные задачи. Прежде, чем выбирать эталонные задачи, надо нормировать специальным образом граничные условия.

Оказывается, что решение обратной задачи также как прямой надо начинать с нормировки набора граничных условий (2.2). Иначе говоря, набор граничных условий (2.2) сначала надо привести к некоторому эквивалентному каноническому виду.

3. Эквивалентные канонические граничные условия

В данном пункте укажем процесс нормировки набора двухточечных граничных условий и затем уточним постановку обратной задачи. Введем фундаментальную систему решений $\{y_i(x)\}$ однородного уравнения $d(y) = 0$ со стандартными условиями Коши в нуле

$y_i^{(s-1)}(0) = \delta_{is}$. Здесь и далее δ_{is} – означает символ Кронекера. Определитель

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \end{vmatrix}$$

обозначим через $g(x,t)$. Известно [6], что функция $u_0(x)$, определяемая по формуле

$$u_0(x) = \int\limits_0^x g(x,t)f(t)dt$$

является решением неоднородной задачи Коши с нулевыми условиями в нуле

$$d(u_0) = f(x), \quad u_0^{(s-1)}(0) = 0.$$

Отметим также, что справедливы соотношения при $s = 1, \ldots, n$

$$u_0^{(s-1)}(x) = \int\limits_0^x \frac{\partial^{s-1}}{\partial x^{s-1}} g(x,t)f(t)dt,$$

Теперь можно сформулировать утверждение.

Лемма 3.1. *Для любого f из $L_2(0,1)$ неоднородное уравнение $d(u) = f(x)$ имеет единственное решение, которое удовлетворяет условиям (2.2). Причем для такого решения справедливо представление*

$$u(x) = u_0(x) - \sum_{s=1}^{n} \varphi_s(x) V_s(u_0). \tag{3.1}$$

Здесь $\{\varphi_s(x)\}$ – система решений однородного уравнения $d(y) = 0$ с условиями $V_j(\varphi_s) = \delta_{js}, j = 1, \ldots, n$.

Лемма 3.1 доказывается непосредственной проверкой. Единственность следует из предположения: $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (2.1) и (2.2). Вычислим значения граничных форм $V_j(u_0)$. Вспоминая свойства $u_0(x)$, имеем

$$V_j(u_0) = \sum_{s=1}^{n} \beta_{js} \int\limits_0^1 \frac{\partial^{s-1}}{\partial x^{s-1}} g(x,t) \mid_{x=1} f(t)dt.$$

Из представления (3.1) получим равенство

$$u(x) + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) V_j(u_0) = u_0(x).$$

Следовательно, для $u_0(x)$ справедливо представление

$$u_0(x) = u(x) + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) \sum_{s=1}^{n} \beta_{js} \int\limits_0^1 \frac{\partial^{s-1}}{\partial x^{s-1}} g(x,t) \mid_{x=1} f(t)dt.$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$u_0(x) = u(x) + \int\limits_0^1 \theta(x,t) f(t)dt,$$

где $\theta(x,t)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)\sum_{s=1}^{n}\beta_{js}\int\limits_0^1\frac{\partial^{s-1}}{\partial x^{s-1}}g(x,t)\mid_{x=1}$. Так как $u_0^{(s-1)}(0)=0$ и $d(u)=f(x)$, то имеем соотношения

$$u^{(s-1)}(0)+\int\limits_0^1\rho_s(t)d(u)dt=0,\quad s=1,\ldots,n,$$

где

$$\rho_s(t)=\frac{\partial^{s-1}}{\partial x^{s-1}}\theta(x,t)\mid_{x=0}.$$

Теперь введем набор граничных форм по формулам

$$W_s(u)=u^{(s-1)}(0)+\int\limits_0^1\rho_s(t)d(u)dt,\quad s=1,\ldots,n.$$

Итак, доказано следующее утверждение

Теорема 3.1. *Набор граничных условий* (2.2) *эквивалентен следующим граничным условиям*

$$W_s(u)\equiv u^{(s-1)}(0)+\int\limits_0^1\rho_s(t)d(u)dt=0,\quad s=1,\ldots,n.$$

Граничные условия, определяемые согласно теореме 3.1, назовем каноническими граничными условиями или нормированными граничными условиями. Таким образом, набор граничных форм $\{V_j(\cdot)\}$ эквивалентен каноническому набору граничных форм $\{W_j(\cdot)\}$. Поэтому вместо того, чтобы восстанавливать граничные условия $\{V_j(\cdot)\}$ будем восстанавливать граничные условия $\{W_j(\cdot)\}$.

4. Выбор эталонных задач и уточненная постановка обратной задачи

В данном пункте указан способ выбора эталонных задач, спектры которых позволят однозначно найти граничные условия исходной краевой задачи или эквивалентные им граничные условия. На самом деле, при определении граничных коэффициентов используется не весь спектр вспомогательной эталонной задачи, а только ее конечная часть.

Количество вспомогательных эталонных задач равно порядку дифференциального уравнения (2.1). То есть построим n эталонных задач. В качестве первой эталонной задачи выберем следующую задачу

$$\begin{gathered}d(y)\equiv y^{(n)}(x)+\sum_{k=0}^{n-2}p_k(x)y^{(k)}(x)=\lambda y(x),\quad 0<x<1,\\ W_1(y)=0,y^{(k-1)}(0)=0,\quad k=2,\ldots,n.\end{gathered}\tag{4.1}$$

В качестве второй эталонной задачи выберем следующую задачу

$$\begin{gathered}d(y)\equiv y^{(n)}(x)+\sum_{k=0}^{n-2}p_k(x)y^{(k)}(x)=\lambda y(x),\quad 0<x<1,\\ W_1(y)=0,W_2(y)=0,y^{(k-1)}(0)=0,\quad k=3,\ldots,n.\end{gathered}\tag{4.2}$$

Аналогично выбираются 3-я, 4-я, ..., $(n-1)$-я эталонные задачи. В качестве n-той эталонной задачи выберем следующую задачу

$$\begin{gathered} d(y) \equiv y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)}(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1, \\ W_k(y) = 0, k = 1, \ldots, n-1, y^{(n-1)}(0) = 0. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Уточнение постановки обратной задачи. 1-я обратная задача: по заданному дифференциальному уравнению (2.1) и спектру первой эталонной задачи однозначно восстановить первую граничную функцию $\rho_1(t)$. 2-я обратная задача: по заданному дифференциальному уравнению (2.1), а также найденной граничной функции $\rho_1(t)$ и спектру второй эталонной задачи однозначно восстановить первую граничную функцию $\rho_2(t)$. Аналогично ставится 3-я, 4-я,..., $(n-1)$-я обратные задачи. n -я обратная задача: по заданному дифференциальному уравнению (2.1), а также по уже найденным граничным функциям $\rho_1(t), \ldots, \rho_{n-1}(t)$ и спектру n-той эталонной задачи однозначно восстановить n-тую граничную функцию $\rho_n(t)$. На самом деле будет использован не весь спектр эталонной задачи, а только ее конечная часть. В последующих пунктах более детально проработан указанный момент.

5. Теорема единственности восстановления граничных функций

Переход от краевых условий (2.2) к эквивалентным каноническим граничным формам позволит доказать теорему единственности восстановления граничных функций $\rho_1(t), \ldots, \rho_n(t)$. В дальнейшем s–ю эталонную задачу будем называть задачей E_s. Условимся задачу типа E_s с тем же уравнением (2.1), но с другими параметрами в граничных условиях (2.2) обозначать через $\widetilde{E}_s$. Всюду будем считать, что если некоторый символ обозначает объект, относящийся к задаче E_s, то этот же символ с «волной» наверху обозначает аналогичный объект задачи $\widetilde{E}_s$.

Теорема 5.1. *Фиксируем целое s из множества $\{1, \ldots, n\}$. Пусть спектры задач E_s и $\widetilde{E}_s$ совпадают. Если $\rho_1(t) = \widetilde{\rho_1(t)}, \ldots, \rho_{s-1}(t) = \widetilde{\rho_{s-1}(t)}$ в $L_2(0,1)$ и системы корневых функций задач E_s и $\widetilde{E}_s$ полны в $L_2(0,1)$, то $\rho_s(t) = \widetilde{\rho_s(t)}$ в $L_2(0,1)$.*

Замечание 5.1. *В случае двухточечных краевых задач* (2.1)-(2.2) *граничные функции $\rho_1(t), \ldots, \rho_n(t)$ являются достаточно гладкими. Больше того, каждая из них является решением однородного уравнения $d^+(y) = 0$, где $d^+(\cdot)$ – формально сопряженное дифференциальное выражение. Следовательно, граничные функции $\rho_1(t), \ldots, \rho_n(t)$ принадлежат конечномерному пространству, и их восстановление сводится к определению конечного количества констант. Поэтому требования полноты системы корневых функций задач E_s и $\widetilde{E}_s$ излишни. Однако теорема 2 справедлива для граничных функций $\rho_1(t), \ldots, \rho_n(t)$ из $L_2(0,1)$.*

Proof of Theorem 5.1. **При** $s = 1$. Введем фундаментальную систему решений $\{y_i(x)\}$ однородного уравнения $d(y) = \lambda y(x)$ со стандартными условиями Коши в нуле $y_i^{(s-1)}(0) = \delta_{is}$. Пусть $\lambda = \lambda^{(1)}$ произвольное собственное значение задачи E_1. Тогда $y_1(x, \lambda^{(1)})$ – собственная функция задачи Э$_1$ соответствующая собственному значению $\lambda^{(1)}$. Первое граничное условие задачи E_1 примет вид

$$y_1(0, \lambda^{(1)}) + \int_0^1 \rho_1(t) d(y_1) dt = 0.$$

Поскольку

$$d(y_1) = \lambda^{(1)} y_1(x, \lambda^{(1)}),$$

то

$$\int_0^1 \rho_1(t) y_1(t, \lambda^{(1)}) dt = -\frac{1}{\lambda^{(1)}}.$$

Следовательно, собственные значения задачи E_1 определяют коэффициенты Фурье функции $\rho_1(t)$ по системе корневых функций сопряженной к задаче E_1. Поскольку система корневых функций задачи E_1 полна в пространстве $L_2(0,1)$, то и система корневых функций сопряженной задачи также полна в $L_2(0,1)$. Таким образом, если спектры задач E_s и $\widetilde{E}_s$ совпадают, то совпадают коэффициенты Фурье функций $\rho_1(t)$ и $\widetilde{\rho_1(t)}$ по одной и той же полной системе пространства $L_2(0,1)$. Следовательно, в пространстве $L_2(0,1)$ функции $\rho_1(t)$ и $\widetilde{\rho_1(t)}$ совпадают. Это доказательство соответствует случаю простых собственных значений задач E_s и $\widetilde{E}_s$. В случае наличия кратных собственных значений рассуждения требуют небольшой модификации.

При $s = 2$. Введем решение $\chi_2(x, \lambda)$ однородного уравнения $d(y) = \lambda y(x)$ с условиями $\chi_2^{(s-1)}(0) = \delta_{2s}, s = 2, \ldots, n$, $W_1(\chi_2) = 0$. Пусть $\lambda = \lambda^{(2)}$ произвольное собственное значение задачи E_2. Тогда $\chi_2(x, \lambda^{(2)})$ – собственная функция задачи E_2, соответствующая собственному значению $\lambda^{(2)}$. Второе граничное условие задачи E_2 примет вид

$$\chi_2^{(1)}(0, \lambda^{(2)}) + \int_0^1 \rho_2(t) d(\chi_2) dt = 0.$$

Поскольку

$$d(\chi_2) = \lambda^{(2)} \chi_2(x, \lambda^{(2)}),$$

то

$$\int_0^1 \rho_2(t) \chi_2(t, \lambda^{(2)}) dt = -\frac{1}{\lambda^{(2)}}.$$

Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 5.1 при $s = 1$. В случае когда задачи E_1 и E_2 имеют общие собственные значения требуют небольшой модификации в рассуждениях. Доказательства теоремы 5.1 при других s аналогичны. □

6. Уточнение теоремы единственности в случае двухточечных краевых задач

В данном пункте уточним теорему 2 для двухточечных краевых задач. В пункте 3 настоящей статьи приведена связь между $\{\beta_{js}\}$ коэффициентами граничных условий (2.2), $\{p_k(x)\}$ коэффициентами дифференциального уравнения (2.2) и функциями $\rho_1(t), \ldots, \rho_n(t)$. Напомним, что

$$\rho_k(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^{(k-1)}(0) \sum_{s=1}^{n} \beta_{js} \frac{\partial^{s-1}}{\partial x^{s-1}} g(x,t) \mid_{x=1} .$$

Известно [6], при $x = 1$ функции $\frac{\partial^{s-1}}{\partial x^{s-1}} g(x,t)$ удовлетворяют однородному уравнению $d^+(y) = 0$, где $d^+(\cdot)$ – формально сопряженное дифференциальное выражение. Следовательно, граничные функции $\rho_1(t), \ldots, \rho_n(t)$ также являются решениями однородного уравнения $d^+(y) = 0$.

Так как коэффициенты дифференциального выражения $d(\cdot)$ заданы, то формально сопряженное выражение $d^+(\cdot)$ также известно. Обозначим фундаментальную систему решений $\{z_i(x)\}$ однородного уравнения $d^+(z) = 0$ со стандартными условиями Коши в нуле $z_i^{(s-1)}(0) = \delta_{is}$. Пусть

$$\rho_k(t) = c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) + \cdots + c_n z_n(t)$$

с неизвестными константами $_1, c_2, \ldots, c_n$. В пункте 5 настоящей статьи приведена связь между коэффициентами Фурье граничной функции $\rho_k(t)$ и собственными значениями задачи E_k. Напомним, что

$$\int\limits_0^1 \rho_k(t) u_k(t) dt = -\frac{1}{\lambda^{(k)}},$$

где $u_k(t)$ – собственная функция задачи E_k, соответствующая собственному значению $\lambda^{(k)}$.

Следовательно, получается система уравнений относительно неизвестных констант $c_1, c_2, \ldots, c_n$

$$c_1 \int\limits_0^1 z_1(t) u_k(t) dt + c_2 \int\limits_0^1 z_2(t) u_k(t) dt + \cdots + c_n \int\limits_0^1 z_n(t) u_k(t) d = -\frac{1}{\lambda^{(k)}}.$$

Таким образом, для однозначного определения неизвестных констант $c_1, c_2, \ldots, c_n$ достаточно подобрать собственные значения задачи E_k так, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} \int\limits_0^1 z_1(t) u_{k1}(t) dt & \cdots & \int\limits_0^1 z_n(t) u_{k1}(t) dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int\limits_0^1 z_1(t) u_{kn}(t) dt & \cdots & \int\limits_0^1 z_n(t) u_{kn}(t) dt \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля. Здесь $u_{k1}(t), \ldots, u_{kn}(t)$ - собственные функций задачи E_k, которые соответствуют выбранным собственным значениям.

Лемма 6.1. *Пусть задача E_k имеет бесконечно много собственных значений. Существует $\{\lambda_j^{(k)}, j = j_1, \ldots, j_n\}$ набор из собственных значений задачи E_k таких, что определитель*

$$A = \begin{vmatrix} \int\limits_0^1 z_1(t) u_{k1}(t) dt & \cdots & \int\limits_0^1 z_n(t) u_{k1}(t) dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int\limits_0^1 z_1(t) u_{kn}(t) dt & \cdots & \int\limits_0^1 z_n(t) u_{kn}(t) dt \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Здесь $u_{k1}(t)$ – собственная функция задачи E_k, соответствующая собственному значению $\lambda_j^{(k)}, j = j_1$. Аналогичный смысл имеют $u_{k2}(t), \ldots, u_{kn}(t)$.

Доказательство. Предположим противное: для любого набора $\{\lambda_j^{(k)}, j = j_1, \ldots, j_n\}$ определитель $A = 0$. Положим $j_1 = 1, \ldots, j_{n-1} = n - 1$. Поскольку задача E_k имеет бесконечно много собственных значений, то пусть $\lambda_j^{(k)}$, $j = j_n$ – пробегает весь спектр задачи E_k. Так как $A = 0$, то система линейных алгебраических уравнений

$$c_1 \int\limits_0^1 z_1(t) u_{kj}(t) dt + c_2 \int\limits_0^1 z_2(t) u_{kj}(t) dt + \cdots + c_n \int\limits_0^1 z_n(t) u_{kj}(t) dt = 0, \qquad j = 1, \ldots, n$$

имеет ненулевое решение. Допустим, что $c_n = 1$. Следовательно, коэффициенты Фурье функции $z_n(t)$ линейно выражаются через коэффициенты Фурье функций $\{z_1(x), \ldots, z_{n-1}(t)\}$

$$\int_0^1 z_n(t)u_{kj}(t)dt = -c_1 \int_0^1 z_1(t)u_{kj}(t)dt - \cdots - c_{n-1} \int_0^1 z_{n-1}(t)u_{kj}(t)dt.$$

Если все коэффициенты Фурье функции $z_n(t)$ линейно выражаются через коэффициенты Фурье функций $\{z_1(x), \ldots, z_{n-1}(t)\}$, то система функций $\{z_1(x), \ldots, z_n(t)\}$ представляет линейно зависимую систему. Последнее противоречит ее выбору. Если $c_1 = 1$ не выполняется, то требуется некоторая модификация в рассуждениях. Из леммы 6.1 и теоремы 5.1 следует утверждение. □

Теорема 6.1. *Фиксируем целое s из множества $\{1, \ldots, n\}$. Пусть конечные наборы собственных значений из леммы 2 задач E_s и $\widetilde{E}_s$ совпадают. Если $\rho_1(t) = \widetilde{\rho_1(t)}, \ldots, \rho_{s-1}(t) = \widetilde{\rho_{s-1}(t)}$ в $L_2(0,1)$, то $\rho_s(t) = \widetilde{\rho_s(t)}$ в $L_2(0,1)$.*

При доказательстве теоремы 5.1 установлено, что собственные функций задач E_s и $\widetilde{E}_s$ совпадают, если совпадают соответствующие собственные значения. Этот факт играет существенную роль при доказательстве теоремы 6.1. В заключении отметим, что некоторые из приведенных здесь конструкции можно найти в работах [7, 8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. З.Л. Лейбензон, *Обратная задача спектрального анализа обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков*// Тр. ММО, **15**, 70–144 (1966).
2. Б.М. Левитан, М.Г. Гасымов, *Определение дифференциального уравнения по двум спектрам* // УМН, **19:2** (116), 3–63 (1964).
3. В.А. Юрко, *О дифференциальных операторах с нераспадающимися краевыми условиями* // Функц. анализ и его прил., **28**:4, 90–92 (1994).
4. В.А. Садовничий, *Единственность решения обратной задачи в случае уравнения второго порядка с нераспадающимися краевыми условиями. Регуляризованные суммы части собственных чисел. Факторизация характеристического определителя* // Докл. АН СССР, **206**:2, 293–296 (1972).
5. В.А. Садовничий, Я.Е. Султанаев, А.М. Ахтямов, *Обратные задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями.* М.:Изд-во Моск. ун-та, 2009.
6. М.А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука. 1969.
7. Б.Е. Кангужин, Г. Даирбаева, Ж. Мадибайулы, *Единственность восстановления граничных условий дифференциального оператора по набору спектров* // Вестник КазНУ, серия математика. № 4 (104), 44–49 (2019).
8. Б.Е. Кангужин, Г. Даирбаева, Ж. Мадибайулы, *Идентификация граничных условий дифференциального оператора* // Вестник КазНУ, серия математика. № 3 (103), 82–93 (2019).

Балтабек Есматович Кангужин,
Казахский национальный университет имени Аль-Фараби,
пр. Аль-Фараби, 71,
050040, г. Алматы, Казахстан
E-mail: kanguzhin53@gmail.com