ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 3 (2020). С. 11-21.

УДК 517.538.2 + 517.984.26 + 517.547

СИНТЕЗИРУЕМЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ГЛАВНЫЕ ПОДМОДУЛИ В МОДУЛЕ ШВАРЦА

Н.Ф. АБУЗЯРОВА

Аннотация. Рассматривается модуль целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси (модуль Шварца) с неметризуемой локально-выпуклой топологией. В связи с задачей спектрального синтеза для оператора дифференцирования в пространстве $C^\infty(a;b)$ изучаются главные подмодули в этом модуле. В частности, выясняется, какие еще функции, кроме произведений многочленов на порождающую функцию, содержатся в главном подмодуле. Основной результат работы состоит в следующем: несмотря на то, что топология модуля Шварца не является метризуемой, главный подмодуль совпадает с секвенциальным замыканием множества произведений порождающей его функции на многочлены. В качестве одного из следствий основного результата доказывается весовой критерий слабой локализуемости главного подмодуля. Другое следствие относится к недавно введенному А. Барановым и Ю. Беловым понятию «синтезируемой последовательности». Из полученного этими авторами критерия синтезируемости последовательности следует, что синтезируемая последовательность обязательно будет нулевым множеством слабо локализуемого главного подмодуля. В настоящей работе дается положительный ответ на естественно возникающий вопрос о справедливости обратного утверждения. А именно, доказывается, что нулевое множество слабо локализуемого главного подмодуля представляет собой синтезируемую последовательность.

Ключевые слова: целые функции, преобразование Фурье-Лапласа, пространства Шварца, локальное описание подмодулей, спектральный синтез.

Mathematics Subject Classification: 30D15, 30H99, 42A38, 47E05

1. Введение

Совокупность бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty(a;b)$, снабженную своей стандартной метризуемой топологией, будем обозначать символом $\mathcal{E}(a;b)$, сильное сопряженное к этому пространству, состоящее из всех распределений с компактными носителями в $(a;b)$ — символом $\mathcal{E}'(a;b)$; здесь $(a;b) \subseteq \mathbb{R}$ — конечный или бесконечный интервал.

Пусть $W \subset \mathcal{E}(a;b)$ — замкнутое подпространство, инвариантное относительно оператора дифференцирования $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, короче, *D-инвариантное подпространство*. В работе [1] было начато изучение задачи спектрального синтеза и, в частности, установлено, что спектр σ_W сужения оператора дифференцирования $D : W \to W$ либо совпадает со всей комплексной плоскостью, либо дискретен, т.е. представляет собой бесконечную или конечную (возможно, пустую) последовательность кратных точек в $\mathbb{C}$ [1, теорема 2.1]. Для непустого относительно замкнутого промежутка $I \subset (a;b)$ подпространство W_I определяется формулой

$$W_I = \{f \in \mathcal{E}(a;b) : \quad f = 0 \quad \text{на} \quad I\}. \tag{1.1}$$

N.F. Abuzyarova, Synthesizable sequence and primary submodules in the Schwratz module.

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2020-0027).

Поступила 25 июня 2020 г.

Каждое D-инвариантное подпространство W обладает «резидуальным» подпространством $W_{res} \subset W$, которое представляет собой наибольшее подпространство вида (1.1), содержащееся в W [1, теорема 4.1]. Соответствующий промежуток обозначим I_W и будем называть *резидуальным* промежутком подпространства W; т.е. $W_{res} = W_{I_W}$.

Наличие D-инвариантных подпространств вида (1.1) привело авторов работы [1] к следующей постановке задачи спектрального синтеза: выяснить, при каких условиях D-инвариантное подпространство W с дискретным спектром имеет представление

$$W = \overline{W_{I_W} + \operatorname{span}(\operatorname{Exp} W)}? \qquad (1.2)$$

Здесь $\operatorname{Exp} W$ — множество всех экспоненциальных одночленов, содержащихся в W.

Оказалось, что в случае конечного (в частности, пустого) спектра σ_W, подпространство W всегда имеет вид (1.2), а если спектр σ_W дискретен и бесконечен, то ответ зависит от соотношения между величинами $|I_W|$ и $2\pi D_{BM}(\Lambda)$, где $|I_W|$ — длина резидуального промежутка, $D_{BM}(\Lambda)$ — плотность Берлинга-Мальявена последовательности $\Lambda = \mathrm{i}\sigma_W$:
1) если $|I_W| < 2\pi D_{BM}(\Lambda)$, то $W = \mathcal{E}(a;b)$ (см. [2, замечание 3], [3, теорема 1.3]);
2) если $|I_W| = 2\pi D_{BM}(\Lambda)$, то существуют как D-инвариантные подпространства, допускающие спектральный синтез в слабом[1] смысле (1.2) [4],[5], так и подпространства, не обладающие этим свойством [3], [6];
3) если $|I_W| > 2\pi D_{BM}(\Lambda)$, то D-инвариантное подпространство с дискретным спектром $\sigma_W = \mathrm{i}\Lambda$ и резидуальным промежутком I_W допускает слабый спектральный синтез (1.2) [2, следствие 3], [3, теорема 1.1].

Последний из трех сформулированных результатов можно интерпретировать таким образом: пусть заданы комплексная последовательность Λ и относительно замкнутый в $(a;b)$ промежуток I такие, что $|I| > 2\pi D_{BM}(\Lambda)$; тогда существует единственное D-инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{E}(a;b)$ с дискретным спектром $\sigma_W = -\mathrm{i}\Lambda$ и резидуальным промежутком $I_W = I$, и это подпространство имеет вид (1.2).

Исходя из этой интерпретации, авторы работы [7] назвали *синтезируемой* последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$ с $D_{BM}(\Lambda) < +\infty$, если D-инвариантное подпространство со спектром $-(\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным промежутком $[-\pi D_{BM}(\Lambda); \pi D_{BM}(\Lambda)]$ единственно (и значит, имеет вид (1.2)). В этой работе было получено полное описание синтезируемых последовательностей. В частности, доказано, что если система экспоненциальных одночленов $\operatorname{Exp}_\Lambda$, построенная по последовательности $-(\mathrm{i}\Lambda)$, полна или имеет конечный недостаток в пространстве $L^2(-\pi D_{BM}(\Lambda); \pi D_{BM}(\Lambda))$, то Λ — синтезируемая последовательность [7, предложение 3.2].

Если система $\operatorname{Exp}_\Lambda$ имеет бесконечный недостаток в $L^2(-\pi D_{BM}(\Lambda); \pi D_{BM}(\Lambda))$, то синтезируемость Λ определяется выполнением условий следующего критерия [7, теорема 1.3]:

Теорема А. *Для того чтобы последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$ была синтезируема, необходимо и достаточно, чтобы она была нулевым множеством какой-либо функции $\varphi \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R})$ и*

$$\dim\, (\mathcal{H}(\varphi) \ominus H_{pol}) \le 1.$$

При формулировке теоремы А мы использовали следующие обозначения:
$\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$ — совокупность всех целых функций φ экспоненциального типа, индикаторы которых удовлетворяют оценке

$$h_\varphi(\arg z) \le C_\varphi |\operatorname{Im} z|, \quad z \in \mathbb{C},$$

а на вещественной оси

$$|\varphi(x)| = o(|x|^{-n}), \quad |x| \to \infty, \quad n = 1, 2, \dots;$$

[1] «слабом» по отношению к классическому спектральному синтезу, когда $W = \overline{\operatorname{span}(\operatorname{Exp} W)}$

$\mathcal{H}(\varphi)$ — гильбертово пространство, состоящее из всех целых функций ω минимального типа при порядке 1, таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega(x)\varphi(x)|^2 \mathrm{d}x < +\infty,$$

со скалярным произведением

$$(\omega_1, \omega_2) = \int_{\mathbb{R}} \omega_1(x)\overline{\omega_2(x)}|\varphi(x)|^2 \mathrm{d}x, \quad \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}(\varphi), \tag{1.3}$$

H_{pol} — замыкание множества полиномов в $\mathcal{H}(\varphi)$.

Ясно, что синтезируемость последовательности Λ — *достаточное* условие допустимости слабого спектрального синтеза D-инвариантным подпространством с дискретным спектром $-(\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным промежутком длины $2\pi D_{BM}(\Lambda)$. В связи с чем возникает вопрос: когда синтезируемость последовательности Λ будет и *необходимым* условием допустимости слабого спектрального синтеза D-инвариантным подпространством со спектром $-(\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным промежутком, равным $[-\pi D_{BM}(\Lambda); \pi D_{BM}(\Lambda)]$ (или любому другому фиксированному замкнутому промежутку длины $2\pi D_{BM}(\Lambda)$)?

Одной из целей настоящей работы является получение ответа на этот вопрос.

Ранее для изучения D-инвариантных подпространств мы эффективно использовали двойственную схему, сводящую задачи о подпространствах к эквивалентным задачам о замкнутых подмодулях в специальном модуле целых функций $\mathcal{P}(a;b)$ (см. [2], [4], [8]). Эту схему мы также намерены применить в настоящей работе, поэтому ниже приводим краткое описание двойственности между D-инвариантными подпространствами и подмодулями.

Для каждого элемента $S \in \mathcal{E}'(a;b)$ определяется его преобразование Фурье-Лапласа

$$\mathcal{F}(S)(z) = S(e^{-itz}), \quad z \in \mathbb{C},$$

которое представляет собой целую функцию вполне регулярного роста при порядке 1. Обозначим ее φ. Индикаторная диаграмма функции φ есть отрезок мнимой оси

$$\mathrm{i}[c_\varphi; d_\varphi] \subset \mathrm{i}(a;b),$$

где $c_\varphi = -h_\varphi(-\pi/2)$, $d_\varphi = h_\varphi(\pi/2)$, h_φ – индикатор функции φ.

Положим $\mathcal{P}(a;b) = \mathcal{F}(\mathcal{E}'(a;b))$. Хорошо известно, что $\mathcal{P}(a;b) = \bigcup P_k$, где $\{P_k\}$ — возрастающая последовательность банаховых пространств, каждое из которых есть совокупность всех целых функций φ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{(1+|z|)^k \exp(b_k y^+ - a_k y^-)}, \quad y^\pm = \max\{0, \pm y\}, \quad z = x + \mathrm{i}y, \tag{1.4}$$

$[a_1; b_1] \Subset [a_2; b_2] \Subset \ldots$ – последовательность отрезков, исчерпывающая интервал $(a;b)$. Снабдив $\mathcal{P}(a;b)$ локально-выпуклой топологией индуктивного предела последовательности $\{P_k\}$, мы получим пространство типа (LN^*) (см. [9]), изоморфное $\mathcal{E}'(a;b)$ [10, теорема 7.3.1]. Отметим, что согласно этой же теореме, $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}) = \mathcal{F}(C_0^\infty(\mathbb{R}))$.

В пространстве $\mathcal{P}(a;b)$ операция умножения на независимую переменную z непрерывна, поэтому $\mathcal{P}(a;b)$ – топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$, который называют *модулем Шварца*.

Замкнутый подмодуль $J \subset \mathcal{P}(a;b)$ — это замкнутое подпространство, удовлетворяющее также условию $zJ \subset J$. В дальнейшем изложении для краткости будем пользоваться термином *„подмодуль“*, имея в виду замкнутый подмодуль.

Напомним ряд понятий, характеризующих подмодули (см. [11], [12]). *Индикаторный отрезок* подмодуля J — это отрезок $[c_J; d_J] \subset \overline{\mathbb{R}}$, где $c_J = \inf_{\varphi\in J} c_\varphi$, $d_J = \sup_{\varphi\in J} d_\varphi$.

Дивизор подмодуля $J \subset \mathcal{P}(a;b)$ — это функция $n_J(\lambda) = \min_{\varphi\in J} n_\varphi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, где $n_\varphi(\lambda)$ — *дивизор функции* $\varphi \in J$:

$$n_\varphi(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \varphi(\lambda) \neq 0, \\ m, & \text{если} \quad \lambda \quad \text{– нуль} \quad \varphi \quad \text{кратности} \quad m. \end{cases}$$

$\Lambda_\varphi = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ n_\varphi(\lambda) > 0\}$, $\Lambda_J = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ n_J(\lambda) > 0\}$ — *нулевые множества* функции φ и подмодуля J, соответственно, каждая точка λ выписывается столько раз, какова ее кратность.

Подмодули модуля $\mathcal{P}(a;b)$ состоят в двойственности с D-инвариантными подпространствами пространства $\mathcal{E}(a;b)$: *между совокупностью замкнутых подмодулей* $\{J\}$ *модуля* $\mathcal{P}(a;b)$ *и совокупностью* D*-инвариантых подпространств* $\{W\}$ *пространства* $\mathcal{E}(a;b)$ *имеет место взаимно однозначное соответствие по правилу:* $J \longleftrightarrow W$ *тогда и только тогда, когда* $J = \mathcal{F}(W^0)$, *где замкнутое подпространство* $W^0 \subset \mathcal{E}'(a;b)$ *состоит из всех распределений* $S \in \mathcal{E}'(a;b)$, *аннулирующих* W*; при этом*

$$\operatorname{Exp} W = \{t^j e^{-\mathrm{i}\lambda_k t}, \quad j = 0, \dots m_k - 1, \quad n_J(\lambda_k) = m_k > 0\},$$

а границей резидуального промежутка I_W *служат точки* c_J *и* d_J. (См. [2], [12]).

Сформулированный факт называют *принципом двойственности.*

Подмодуль $J \subset \mathcal{P}(a;b)$ *слабо локализуем*, если для функции $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$ из выполнения условий: 1) $n_\varphi(z) \geq n_J(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$, 2) индикаторная диаграмма функции φ содержится в множестве $\mathrm{i}[c_J; d_J]$ — следует включение $\varphi \in J$.

Подмодуль J называется *устойчивым*, если для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ верна импликация

$$\varphi \in J, \quad n_\varphi(\lambda) > n_J(\lambda) \Longrightarrow \frac{\varphi}{z-\lambda} \in J.$$

D-инвариантое подпространство W допускает слабый спектральный синтез тогда и только тогда, когда, его аннуляторный подмодуль $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ слабо локализуем (см. [2], [4]).

D-инвариантое подпространство W имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда, его аннуляторный подмодуль $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ устойчив ([1, предложение 3.1], [12, предложение 2]).

Главный подмодуль J_φ, *порожденный функцией* $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$, определяется как замыкание в $\mathcal{P}(a;b)$ множества

$$\mathrm{Pol}_\varphi = \{p\varphi : \quad p \in \mathbb{C}[z]\}.$$

Главный подмодуль всегда устойчив [12].

Пусть, как и выше, Λ — комплексная последовательность, плотность Берлинга-Мальявена которой конечна; $W \subset \mathcal{E}(\mathbb{R})$ — D-инвариантное подпространство со спектром $\sigma_W = -\mathrm{i}\Lambda$ и резидуальным промежутком $I_W = [-\pi D_{BM}(\Lambda); \pi D_{BM}(\Lambda)]$. Заметим, что если резидуальный промежуток I_W задан, то соответствующее подпространство W можно рассматривать в любом пространстве $\mathcal{E}(a;b)$, таком, что $I_W \subset (a;b)$.

Предположим сначала, что *система* Exp_Λ *полна или имеет конечный недостаток в пространстве* $L^2(-\pi D_{BM}(\Lambda); \pi D_{BM}(\Lambda))$. Нетрудно убедиться, что это эквивалентно существованию функции $\varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{P}_0(\mathbb{R})$, с нулевым множеством $\Lambda_\varphi = \Lambda$ и с индикаторной диаграммой $[-\mathrm{i}\pi D_{BM}(\Lambda); \mathrm{i}\pi D_{BM}(\Lambda)]$. Отсюда, с учетом теоремы 2 из работы [8], выводим, что аннуляторным подмодулем подпространства W будет главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ с образующей φ. Более того, в этом случае

$$\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{J}_\varphi = \{p\varphi : \quad p \in \mathbb{C}[z]\}, \tag{1.5}$$

где символом $\mathcal{J}(\varphi)$ обозначен слабо локализуемый подмодуль с нулевым множеством Λ и индикаторным отрезком $[-\mathrm{i}\pi D_{BM}(\Lambda); \mathrm{i}\pi D_{BM}(\Lambda)]$.

Из двойственности между D-инвариантными подпространствами и подмодулями и сказанного выше, перед теоремой А, заключаем, что *если система* Exp_Λ *полна или имеет конечный недостаток в пространстве*

$$L^2(-\pi D_{BM}(\Lambda);\pi D_{BM}(\Lambda)),$$

то W *допускает слабый спектральный синтез, а* Λ *— синтезируемая последовательность.*

Рассмотрим теперь случай, когда *экспоненциальная система* Exp_Λ *имеет бесконечный недостаток в* $L^2(-\pi D_{BM}(\Lambda);\pi D_{BM}(\Lambda))$. В этом случае из теоремы A и двойственности следует, что для синтезируемости Λ необходимо, чтобы W имело вид

$$W = W_S = \{f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) : \quad S(f^{(k)}) = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots\}, \tag{1.6}$$

где $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, причем $\varphi = \mathcal{F}(S) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R})$, $\Lambda_\varphi = \Lambda$, индикаторная диаграмма φ есть $[-\mathrm{i}\pi D_{BM}(\Lambda);\mathrm{i}\pi D_{BM}(\Lambda)]$. Далее, $\mathcal{F}(W_S^0) = \mathcal{J}_\varphi$, и допустимость слабого спектрального синтеза для W_S эквивалентна слабой локализуемости $\mathcal{J}_\varphi : \mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}(\varphi)$; иными словами, тому, что $\mathcal{J}(\varphi)$ есть замыкание множества Pol_φ в топологии пространства $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

С другой стороны, в рассматриваемом случае если Λ — синтезируемая последовательность, то подмодуль $\mathcal{J}(\varphi)$ совпадает с *секвенциальным* замыканием множества Pol_φ, т.е. с совокупностью пределов всех сходящихся в топологии пространства $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *счетных* последовательностей из Pol_φ, которое мы будем обозначать символом $\mathcal{J}_{\varphi,seq}$. Это следует из теоремы A, с учетом замечания после леммы 1 (см. следующий параграф).

Таким образом, *для эквивалентности синтезируемости последовательности* Λ *и допустимости слабого спектрального синтеза соответствующим* D*-инвариантным подпространством* W *со спектром* $\sigma_W = -\mathrm{i}\Lambda$ *и резидуальным промежутком* $I_W = [-\pi D_{BM}(\Lambda);\pi D_{BM}(\Lambda)]$ *необходимо, чтобы* $W = W_S$ *и* $\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}_{\varphi,seq}$, где $\varphi = \mathcal{F}(S)$, *причем* $\Lambda_\varphi = \Lambda$, *а индикаторная диаграмма* φ *— отрезок* $[-\mathrm{i}\pi D_{BM}(\Lambda);\mathrm{i}\pi D_{BM}(\Lambda)]$.

Пространство $\mathcal{P}(a;b)$ неметризуемо [9, следствие 2 из теоремы 1]. Поэтому замыкание произвольного множества $A \subset \mathcal{P}(a;b)$, вообще говоря, нельзя получить, присоединяя к нему только пределы сходящихся *счетных* последовательностей $\{\varphi_n\} \subset A$. Следовательно, для ответа на вопрос об эквивалентности синтезируемости последовательности Λ и слабого спектрального синтеза для соответствующего подпространства вида (1.6) со спектром $\sigma_W = -\mathrm{i}\Lambda$ нужно сначала исследовать возможность равенства

$$J_{\varphi,seq} = J_\varphi. \tag{1.7}$$

Теорема 1. *Равенство (1.7) имеет место для всех* $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$.

При помощи этой теоремы мы доказываем эквивалентность синтезируемости последовательности Λ и допустимости слабого спектрального синтеза подпространством вида (1.6) со спектром $-(\mathrm{i}\Lambda)$ (следствие 2).

Другое важное применение теоремы 1 — удобный весовой критерий слабой локализуемости главного подмодуля в модуле $\mathcal{P}(a;b)$ (теорема 2).

Основные результаты настоящей работы были анонсированы в [13].

2. Секвенциальное описание главных подмодулей в модуле Шварца

2.1. Предварительные сведения и леммы. Пусть $[c;d] \subset (a;b)$, $PW(c;d) = \mathcal{F}\left(L^2(c;d)\right)$ — пространство Пэли-Винера, $P_0[c;d]$ — пространство всех целых функций ψ, для которых конечна норма

$$\|\psi\|_0 = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\psi(z)|}{\exp(dy^+ - cy^-)}, \quad y^\pm = \max\{0, \pm y\}, \quad z = x + \mathrm{i}y. \tag{2.1}$$

Лемма 1. *Если* $\psi \in PW(c;d)$, *то* $\psi \in P_0[c;d]$, *причем*

$$\|\psi\|_0 \le C_0 \|\psi\|_{PW(c;d)}, \tag{2.2}$$

где положительная постоянная C_0 *зависит только от* c *и* d.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $c=-d$; тогда

$$\psi(z)=\int_{-d}^{d}e^{-\mathrm{i}zt}f(t)\mathrm{d}t,\quad f\in L^2(-d;d),$$

$$\|\psi\|_0=\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|\psi(z)|}{\exp(d|y|)},\quad z=x+\mathrm{i}y.$$

Согласно теореме Планшереля, при фиксированном $y\in\mathbb{R}$ будет

$$\|\psi(x+\mathrm{i}y)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}=2\pi\|e^{yt}f(t)\|^2_{L^2(-d;d)}.$$

Используя этот факт и субгармоничность функции $|\psi|^2$, получаем для всех $x\in\mathbb{R}$ оценки

$$|\psi(x)|^2\le\frac{1}{\pi}\int\limits_{|w-x|\le1}|\psi(w)|^2|\mathrm{d}w|\le\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\psi(s+\mathrm{i}\tau)|^2\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\le C_1e^{2d}\|\psi\|^2_{PW(-d;d)},$$

где C_1 — абсолютная постоянная.

Неравенство (2.2) следует из этих оценок и принципа Фрагмена-Линделефа. □

Замечание 1. Из теоремы А и доказанной леммы легко вывести, что если нулевое множество Λ_φ функции $\varphi\in\mathcal{P}(a;b)\bigcap\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$ — синтезируемая последовательность, то

$$\mathcal{J}(\varphi)=\mathcal{J}_\varphi=\mathcal{J}_{\varphi,seq}.$$

Действительно, если $\Phi\in\mathcal{J}(\varphi)$, то $\Phi=\omega\varphi$, где ω — целая функция минимального типа, и найдется многочлен q_Φ, такой, что $\frac{\omega}{q_\Phi}\in\mathcal{H}(\varphi)$. Далее, по теореме А, либо $\frac{\omega}{q_\Phi}\in H_{pol}$, либо для произвольной фиксированной точки $\lambda_0\in\Lambda_\omega\setminus\Lambda_\varphi$ найдутся числа α_1, $\alpha_2\in\mathbb{C}$ такие, что

$$\left(\alpha_2-\frac{\alpha_1}{z-\lambda_0}\right)\cdot\frac{\omega}{q_\Phi}\in H_{pol}.$$

В обоих случаях, из доказанной леммы, с учетом внутреннего описания пространства $\mathcal{P}(a;b)$ и секвенциальной сходимости в нем ([9, следствие 1 из теоремы 2]), заключаем, что $\Phi\in\mathcal{J}_{\varphi,seq}$.

Пусть $\varphi\in\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$, $c_\varphi=h_\varphi(-\pi/2)$, $d_\varphi=h_\varphi(\pi/2)$, где h_φ — индикатор функции φ, $PW=PW(c_\varphi;d_\varphi)$. Рассмотрим следующие замкнутые подпространства в PW: подпространство $PW(\varphi)=J(\varphi)\bigcap PW$ и подпространство PW_{pol}, определяемое как замыкание в PW множества Pol_φ.

Соответствие

$$\omega\mapsto\omega\varphi,\quad\omega\in\mathcal{H}(\varphi),\tag{2.3}$$

устанавливает изометрию гильбертовых пространств $\mathcal{H}(\varphi)$ и $PW(\varphi)$. Подпространство H_{pol}, определяемое как замыкание множества полиномов в $\mathcal{H}(\varphi)$, есть прообраз подпространства PW_{pol} при этой изометрии.

Нам понадобятся некоторые определения и факты из общей теории пространств де Бранжа [14], а также из работы [7], в которой эта теория успешно была использована для исследования D-инвариантных подпространств в пространстве Шварца (в частности, для доказательства цитированной выше теоремы А).

Первоначально *пространство де Бранжа* определяется как пространство, ассоциированное с целой функцией E из класса Эрмита-Билера, и представляет собой совокупность всех целых функций F, таких, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{F(t)}{E(t)}\right|^2\mathrm{d}t<+\infty,$$

и подчиненных еще некоторым ограничениям (см. [14, § 19–21], [7, §2]).

Здесь мы ограничимся точной формулировкой эквивалентного определения пространства де Бранжа, носящего характер аксиоматического описания (см. [14, Теорема 23]):

нетривиальное гильбертово пространство целых функций $\mathcal{H}$ является пространством де Бранжа тогда и только тогда, когда выполнены аксиомы:

($H1$) если $F \in \mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ — нуль функции F, то $F_1 = F(z)\frac{z-\bar{\lambda}}{z-\lambda} \in \mathcal{H}$ и нормы функций F и F_1 равны;

($H2$) для любого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ соответствующий (линейный) δ_λ-функционал, действующий по формуле $\delta_\lambda(F) = F(\lambda)$, $F \in \mathcal{H}$, непрерывен в $\mathcal{H}$;

($H3$) для любой функции $F \in \mathcal{H}$ функция $F^*(z) = \overline{F(\bar{z})}$ принадлежит $\mathcal{H}$ и имеет ту же норму, что и F.

С использованием этого аксиоматического описания в [15], [7, §2, теорема 2.7] устанавливается, что $\mathcal{H}(\varphi)$ является пространством де Бранжа. Нетрудно также проверить, что аксиомы ($H1$) – ($H3$) выполнены и для подпространства H_{pol}, рассматриваемого как самостоятельное гильбертово пространство со скалярным произведением (1.3), т.е. H_{pol} — пространство де Бранжа.

Сформулируем еще два результата о пространствах де Бранжа (см. [14, § 35], [7, Теорема 2.1] и [14, § 29], соотвественно).

Теорема B. *Пусть H_1 и H_2 — замкнутые подпрострaства одного и того же пространства де Бранжа $\mathcal{H}$, которые сами являются пространствами де Бранжа со скалярным произведением, индуцированным из $\mathcal{H}$. Тогда имеет место одно из включений: либо $H_1 \subset H_2$, либо $H_2 \subset H_1$.*

Теорема C. *Пусть $\mathcal{H}$ — пространство де Бранжа, H_k — замыкание в $\mathcal{H}$ линейного множества $\{f \in \mathcal{H} : \ z^j f \in \mathcal{H}, \ j = 1, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда* $\dim\,(\mathcal{H} \ominus H_k) < +\infty$.

Используя теоремы B и C, нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 2. *Предположим, что в пространстве H_{pol} имеется функция ω_0 со свойством: для некоторого $k_0 \in \mathbb{N}$*

$$z^{k_0-1}\omega_0 \in \mathcal{H}(\varphi), \quad z^{k_0}\omega_0 \notin \mathcal{H}(\varphi).$$

Тогда

$$\dim\,(\mathcal{H}(\varphi) \ominus H_{pol}) \le 1.$$

Доказательство. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ обозначим символом $\mathcal{H}_k$ замыкание в $\mathcal{H}(\varphi)$ множества

$$\{\omega \in \mathcal{H}(\varphi) : \ z^k\omega \in \mathcal{H}(\varphi)\}.$$

Так как $\mathcal{H}(\varphi)$ — прообраз множества $PW \bigcap \mathcal{J}(\varphi)$ при изометрии (2.3), а $\mathcal{J}(\varphi)$ — устойчивый подмодуль, то $\mathcal{H}_k$ совпадает с подпространством H_k из теоремы C. Ясно также, что $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}(\varphi)$, $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$

Каждое $\mathcal{H}_k$, со скалярным произведением, индуцированным из $\mathcal{H}(\varphi)$ — пространство де Бранжа, как и подпространство H_{pol}. Поэтому, в силу теоремы B, либо $\mathcal{H}_{k_0} \subset H_{pol}$, либо $H_{pol} \subset \mathcal{H}_{k_0}$. Но наличие в H_{pol} функции ω_0 исключает возможность $H_{pol} \subset \mathcal{H}_{k_0}$; следовательно,

$$\mathcal{H}_{k_0} \subset H_{pol}.$$

С учетом теоремы C имеем

$$\dim\,(\mathcal{H}(\varphi) \ominus H_{pol}) \le \dim\,(\mathcal{H}(\varphi) \ominus \mathcal{H}_{k_0}) < +\infty.$$

С другой стороны, известно, что коразмерность H_{pol} в $\mathcal{H}(\varphi)$ может принимать только три значения: 0, 1, $+\infty$ [7, теоремы 2.1, 2.2, 2.9]. Откуда получаем нужное утверждение. $\square$

2.2. Доказательство теоремы 1. Соотношение $\varphi \in \mathcal{P}(a;b) \setminus \mathcal{P}_0(\mathbb{R})$, как уже было отмечено во введении, по теореме 2 из [8], равносильно справедливости (1.5); и значит, в этом случае утверждение теоремы тривиально.

Пусть $\varphi \in \mathcal{P}(a;b) \bigcap \mathcal{P}_0(\mathbb{R})$. Тогда, как уже было сказано в конце доказательства леммы 2, величина $\dim\,(\mathcal{H}(\varphi) \ominus H_{pol})$ может принимать только одно из трех значений: 0, 1, $+\infty$.

Если $\dim\,(\mathcal{H}(\varphi) \ominus H_{pol}) = 0$, то

$$J_{\varphi,seq} = J_\varphi = J(\varphi). \tag{2.4}$$

В случае когда $\dim\,(\mathcal{H}(\varphi) \ominus H_{pol}) = 1$, справедливость равенств (2.4) получаем из леммы 1, рассуждая так же, как в замечании после нее.

Рассмотрим последнюю возможность:

$$\dim\,(\mathcal{H}(\varphi) \ominus H_{pol}) = +\infty. \tag{2.5}$$

Обозначим символом H_φ прообраз замкнутого подпространства $PW_\varphi = PW \bigcap \mathcal{J}_\varphi$ пространства PW при изометрии (2.3) и положим $H_1 = H_\varphi \ominus H_{pol}$.

Для завершения доказательства теоремы мы должны убедиться в том, что

$$H_1 = \{\bar{0}\}.$$

Прежде всего, заметим, что подпространство H_1 не может содержать ненулевую функцию ω, для которой $\Phi = \omega\varphi \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R})$. Действительно, в противном случае

$$\Phi = \mathcal{F}(s), \quad s \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \bigcap \mathcal{E}'(a;b).$$

И если S_φ — функционал (тоже регулярный, принадлежащий $C_0^\infty(a;b)$), для которого $\varphi = \mathcal{F}(S_\varphi)$, то

$$\int_a^b S_\varphi^{(k)}(t)\overline{s(t)}\mathrm{d}t = 0, \quad k = 0, 1, 2\ldots$$

Следовательно, $\bar{s} \in W_{S_\varphi}$.

С другой стороны, $\Phi \in J_\varphi$, так как $\omega \in H_1 \subset H_\varphi$. Поэтому $s \in W^0_{S_\varphi}$ и

$$0 = s(\bar{s}) = \int_a^b s(t)\overline{s(t)}\mathrm{d}t,$$

т.е. $s = 0$.

Таким образом, если $\omega \in H_1 \setminus \{\bar{0}\}$, то найдется число $n_\omega \in \mathbb{N}$ со свойством

$$z^j\omega \in \mathcal{H}(\varphi), \quad j = 0, \ldots, n_\omega - 1, \quad z^{n_\omega}\omega \notin \mathcal{H}(\varphi). \tag{2.6}$$

Предположим, что нам удалось установить следующий факт.

(F): *в подпространстве H_{pol} имеются функции со свойством (2.6).*

Тогда, применяя лемму 2, заключаем, что $\dim\,(\mathcal{H}(\varphi) \ominus H_{pol}) < +\infty$, а это противоречит соотношению (2.5). Таким образом, установлено, что в случае (2.5)

$$H_1 = \{\bar{0}\}, \qquad J_{\varphi,seq} = J_\varphi \neq J(\varphi),$$

т.е. главный подмодуль J_φ секвенциально порожден, но не слабо локализуем.

Для завершения доказательства теоремы осталось обосновать утверждение **(F).**

Пусть $\{\mu_j\}$ — «редкая» подпоследовательность нулей фиксированной ненулевой функции $\omega \in H_1$, такая, что, скажем, $\mu_1 > 1$, $\mu_j > 8\mu_{j-1}$, $j = 2, 3, \ldots$ Положим

$$q_m(z) = \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right), \qquad \tilde{\omega}_m = \frac{\omega}{q_m}.$$

Ясно, что $\tilde{\omega}_m$ удовлетворяет условию (2.6) и, в силу устойчивости подмодуля J_φ, $\tilde{\omega}_m \in H_\varphi$.

Пусть $\mathrm{Pr}_{pol} : H_\varphi \to H_{pol}$ и $\mathrm{Pr}_1 : H_\varphi \to H_1$ — операторы проектирования на соответствующие подпространства. Если $\mathrm{Pr}_1(\tilde{\omega}_m) = 0$ для какого-нибудь значения индекса m, то утверждение **(F)** доказано.

Иначе, $\mathrm{Pr}_1(\tilde{\omega}_m) \neq 0$ для всех $m = 1, 2, \ldots$ Используя стандартные приемы оценок целых функций и описание ограниченных множеств в локально-выпуклых пространствах типа (LN^*) [9, теорема 2], к которым относится $\mathcal{P}(a;b)$, нетрудно убедиться в том, что последовательность $\{\tilde{\omega}_m\varphi\}$ ограничена по некоторой норме $\|\cdot\|_{k_0}$ (см. (1.4)). И значит, подпоследовательность этой последовательности сходится в $\mathcal{P}(a;b)$, более точно,

$$\left\|\tilde{\omega}_{m_j}\varphi - \tilde{\omega}_0\varphi\right\|_{k_0+1} \to 0,$$

где

$$\tilde{\omega}_0(z) = \frac{\omega(z)}{\prod\limits_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\mu_i}\right)}.$$

Пусть q — какой-нибудь многочлен степени (k_0+2) с корнями из множества $\Lambda_\omega \setminus \{\mu_j\}$. Как и в случае с $\tilde{\omega}_m$, если $\mathrm{Pr}_1(\tilde{\omega}_m q^{-1}) = 0$ для некоторого значения индекса m, то $\tilde{\omega_m} q^{-1} \in H_{pol}$ и удовлетворяет (2.6), т.е. утверждение **(F)** справедливо.

В противном случае воспользуемся тем, что последовательность $\{\tilde{\omega}_{m_j} q^{-1}\}$ сходится к функции $\omega_0 = \tilde{\omega}_0 q^{-1}$ в пространстве $\mathcal{H}(\varphi)$ и $\omega_0\varphi \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R})$. В силу сделанного выше замечания о том, что для всякой функции из H_1 выполнено (2.6), имеем $\mathrm{Pr}_{pol}(\omega_0) \neq 0$. Если при этом $\mathrm{Pr}_1(\omega_0) \neq 0$, то функция $\mathrm{Pr}_{pol}(\omega_0)$ — искомая, и **(F)** доказано.

Осталось разобрать случай, когда $\omega_0 \in H_{pol}$.

Заметим, что умножение функции ω_0 на любую рациональную функцию Q, такую, что $Q\omega_0$ — целая функция, приводит к функции, принадлежащей H_φ и не удовлетворяющей условию (2.6). Поэтому если для некоторой рациональной функции Q_0 будет $Pr_1(Q_0\omega_0) \neq 0$, то функция $Pr_{pol}(Q_0\omega_0)$ удовлетворяет предложению **(F)**.

Пусть, наконец, $Q\omega_0 \in H_{pol}$ для любой рациональной функции Q, такой, что $Q\omega_0$ — целая функция. Для главного подмодуля, порожденного функцией

$$\Phi = \omega q^{-1}\varphi,$$

выполнены соотношения (1.5), так как функция ωq^{-1} удовлетворяет (2.6). В силу требований, которым был подчинен выбор точек $\{\mu_j\}$, мы находимся в тех же условиях, что и перед теоремой 2 в работе [8, § 2]. Воспользовавшись леммами 1–3 этой работы, найдем последовательность многочленов $\{p_j\}$ со свойством:

$$\lim_{j\to\infty} p_j\omega_0\varphi = \Phi$$

в пространстве $\mathcal{P}(a;b)$. С учетом описания секвенциальной сходимости в $\mathcal{P}(a;b)$ (см. [9, следствие 1 из теоремы 2]), заключаем, что существует многочлен p со свойством: последовательность $\{p_j\omega_0 p^{-1}\}$ сходится к целой функции $\nu = \omega q^{-1}p^{-1}$ в норме пространства $\mathcal{H}(\varphi)$, при этом функция ν удовлетворяет (2.6). Так как $\mathrm{Pr}_1(p_j\omega_0 p^{-1}) = 0$, для всех значений индекса j, то $\nu \in H_{pol}$, что и завершает доказательство.

3. Применения основного результата

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{C}$, $2\pi D_{BM}(\Lambda) < b - a$. Из теоремы 1 и теоремы A получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Для того чтобы устойчивый подмодуль $J \subset \mathcal{P}(a;b)$ с нулевым множеством Λ и индикаторным отрезком $[c;d] \subset (a;b)$ длины $2\pi D_{BM}(\Lambda)$ был единственным, необходимо и достаточно, чтобы он был главным и слабо локализуемым.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что

$$b = -a, \quad d = -c = -\pi D_{BM}(\Lambda).$$

Из сказанного во введении следует справедливость утверждения для случая, когда система Exp_Λ полна или имеет конечный недостаток в пространстве $L^2(-\pi D_{BM}(\Lambda);\pi D_{BM}(\Lambda))$. Действительно, это условие на систему Exp_Λ эквивалентно тому, что подмодуль $\mathcal{J}$ — главный и имеет вид (1.5).

Если система Exp_Λ имеет бесконечный недостаток в $L^2(-\pi D_{BM}(\Lambda);\pi D_{BM}(\Lambda))$, то часть утверждения, касающаяся *необходимости*, следует из теоремы A и того, что главный подмодуль всегда устойчив.

Для обоснования *достаточности* заметим, что если J — слабо локализуемый главный подмодуль, то

$$\dim\,(\mathcal{H}(\varphi)\ominus H_{pol})\le 1$$

(см. доказательство теоремы 1). Остается только применить теорему A. □

Принцип двойственности позволяет дать эквивалентную формулировку следствия 1 в терминах D-инвариантных подпространств.

Следствие 2. *Для того чтобы D-инвариантное подпространство W с заданными дискретным спектром $(-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным промежутком $[c;d]\subset(a;b)$ длины $2\pi D_{BM}(\Lambda)$ было единственным, необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид (1.6) и допускало слабый спектральный синтез (1.2).*

Из теоремы 1 следует, что слабую локализуемость главного подмодуля в модуле $\mathcal{P}(a;b)$, порожденного функцией $\varphi\in\mathcal{P}_0(a;b)$, можно изучать, исследуя только возможность аппроксимации функций $\Phi\in J(\varphi)$ *счетными* последовательностями функций из множества Pol_φ.

Для того чтобы сформулировать соответствующий критерий, введем обозначения: $u(z)$ — наибольшая субгармоническая миноранта функции $(h_\varphi(\arg z)|z|-\ln|\varphi(z)|)$, где h_φ — индикатор функции φ,

$$H_u=\{\omega\in H(\mathbb{C}):\quad \|\omega(z)\|_u=\sup_{z\in\mathbb{C}}|\omega(z)|e^{-u(z)}<+\infty\}.$$

Теорема 2. *Главный подмодуль J_φ, порожденный функцией $\varphi\in\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$, слабо локализуем тогда и только тогда, когда каждая функция $\omega\in H_u$ аппроксимируется многочленами в норме* $\|\omega\|'=\sup\limits_{z\in\mathbb{C}}|\omega(z)|\exp\left(-u(z)-2\ln(2+|z|)\right)$.

Доказательство. Ясно, что в доказательстве нуждается только *необходимость*.

Пусть $\omega\in H_u$ и μ_0 — какой-нибудь нуль этой функции, тогда $\frac{\omega}{z-\mu_0}\in\mathcal{H}(\varphi)$.

В силу следствия 1 и теоремы A либо $\mathcal{H}(\varphi)=H_{pol}$, либо

$$\dim\,(\mathcal{H}(\varphi)\ominus H_{pol})=1. \tag{3.1}$$

В первом случае для некоторой последовательности многочленов $\{q_j\}$ будет выполнено соотношение

$$\frac{\omega}{z-\mu_0}=\lim_{j\to\infty}q_j$$

в пространстве $\mathcal{H}(\varphi)$. Далее, в силу леммы 1,

$$\left\|q_j\varphi-\frac{\omega}{z-\mu_0}\varphi\right\|_0\to 0,$$

где $\|\cdot\|_0$ определяется формулой (2.1) с $c=c_\varphi$, $d=d_\varphi$. Отсюда легко вывести сходимость последовательности многочленов $\{(z-\mu_0)q_j\}$ к функции ω в норме $\|\cdot\|'$.

Если имеет место (3.1), то при некоторых $\alpha_0,\alpha_1\in\mathbb{C}$ будет

$$\left(\alpha_0\frac{\omega}{z-\mu_0}+\alpha_1\frac{\omega}{z-\mu_1}\right)\in H_{pol},$$

где $\mu_1 \neq \mu_0$ — еще один нуль функции ω. В силу леммы 1, некоторая последовательность многочленов $\{p_j\}$ будет сходиться к функции $((\alpha_0+\alpha_1)z-(\alpha_1\mu_0+\alpha_0\mu_1))\,\omega$ в норме $\|\cdot\|'$.

Если $\alpha_0+\alpha_1=0$, то все доказано. В противном случае, полагая $\beta=\frac{\alpha_1\mu_0+\alpha_0\mu_1}{\alpha_0+\alpha_1}$ и принимая во внимание принцип Фрагмена-Линделефа и определение функции u, видим, что последовательность многочленов

$$\tilde{p}_j(z)=\frac{p_j(z)-p_j(\beta)}{(\alpha_0+\alpha_1)z-(\alpha_1\mu_0+\alpha_0\mu_1)}, \quad j=1,2,\ldots,$$

сходится к функции ω в норме $\|\cdot\|'$.

$\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Aleman, B. Korenblum. *Derivation-Invariant Subspaces of C^∞* // Computation Methods and Function Theory. **8**:2, 493–512 (2008).
2. Н.Ф. Абузярова. *Спектральный синтез в пространстве Шварца бесконечно дифференцируемых функций* // Доклады РАН. **457**:5, 510–513 (2014).
3. A. Aleman, A. Baranov, Yu. Belov. *Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation*// Journal of Functional Analysis. **268**, 2421–2439 (2015).
4. Н.Ф. Абузярова. *Спектральный синтез для оператора дифференцирования в пространстве Шварца* // Матем. заметки. **102**:2, 163–177 (2017).
5. N.F. Abuzyarova. *Principal submodules in the module of entire functions, which is dual to the Schwarz space, and weak spectral synthesis in the Schwartz space* // Journal of Mathematical Sciences. **241**:6, 658–671 (2019).
6. Н.Ф. Абузярова. *Некоторые свойства главных подмодулей в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси* // Уфимский матем. журнал. **8**:1, 3–14 (2016).
7. A. Baranov, Yu. Belov. *Synthesizable differentiation-invariant subspaces* // Geometric and Functional Analysis. **29**:1, 44–71 (2019).
8. Н.Ф. Абузярова. *О 2-порожденности слабо локализуемых подмодулей в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси* // Уфимск. матем. журн. **8**:3, 8–21 (2016).
9. Ж. Себастьян-и-Сильва. *О некоторых классах ЛВП, важных в приложениях* // Математика. Сб. переводов инстранных статей. **1**:1, 60-77 (1957).
10. Л. Хермандер. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1. Теория распределений и анализ Фурье.* М.: Мир. 1986.
11. И.Ф. Красичков-Терновский. *Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. I, II*// Известия АН СССР, серия матем. **43**:1, 44–66, **43**:2, 309–341 (1979).
12. Н.Ф. Абузярова. *Замкнутые подмодули в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси*// Уфимский матем. журнал. **6**:4, 3–18 (2014).
13. Н.Ф. Абузярова. *Главные подмодули в модуле Шварца* // Известия вузов. Математика. 5, 83–88 (2020).
14. L. de Branges. *Hilbert spaces of entire functions.* N.J.: Prentice-Hall inc. 1968.
15. Yu. Belov. *Complementability of exponential systems* // C.R. Math. Acad. Sci. Paris. **353**, 215–218 (2015).

Наталья Фаирбаховна Абузярова,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: abnatf@gmail.com