ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 3 (2020). С. 3-10.

УДК 517.958

ПУАССОНОВСКИЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В СХЕМАХ РАЗМЕЩЕНИЯ РАЗЛИЧИМЫХ ЧАСТИЦ

Ф.А. АБДУШУКУРОВ

Аннотация. Рассматривается случайная величина $\mu_r(n, K, N)$ – число ячеек, содержащих r частиц, среди первых K ячеек в равновероятной схеме размещения не более n различимых частиц по N различным ячейкам. Найдены условия, обеспечивающие сходимость этих случайных величин к пуассоновской случайной величине. Получено описание предельного распределения. Эти условия имеют наиболее простой вид, когда количество частиц r принадлежит ограниченному множеству (2.2) или K эквивалентно $\sqrt{N}$ (теорема 3). Тогда случайные величины $\mu_r(n, K, N)$ ведут себя как суммы независимых одинаково распределенных индикаторов (биномиальные случайные величины), и наши условия совпадают с условиями классической пуассоновской предельной теоремы. Получены аналоги этих теорем для равновероятной схемы размещения n различимых частиц по N различным ячейкам. Доказательства теорем основаны на пуассоновской предельной теореме для сумм перестановочных индикаторов и аналоге локальной предельной теореме Гнеденко.

Ключевые слова: схема размещения различимых частий по различным ячейкам, пуассоновская случайная величина, гауссовская случайная величина, предельная теорема, локальная предельная теорема.

Mathematics Subject Classification: 60C05, 60F05

1. Введение

Предельным теоремам для равновероятной схемы размещения различимых частиц по различным ячейкам посвящено большое количество работ (см., например, монографию В.Ф. Колчина, Б.А. Севастьянова, В.П. Чистякова [1], и ее библиографию).

В.Ф. Колчин в [3] ввел понятие обобщенной схемы размещения. Многие схемы комбинаторной теории вероятностей такие, как случайные перестановки, случайные леса, случайные разбиения, урновые схемы являются обобщенными схемами размещения [2]. Ряд работ посвящен предельным теоремам для обобщенной схемы размещения (см. монографии А.Н. Тимашева [4], [5], [6] и их библиографии). Большое количество исследований, проводимых в этом направлении, посвящено пуассоновским предельным теоремам для числа ячеек заданного объема (см., например, недавнюю работу А.Н. Тимашева [7]).

В работе А.Н. Чупрунова, И. Фазекаша [8] введен аналог обобщенной схемы размещения, который можно рассматривать как обобщенную схему размещения не более n частиц по N ячейкам. В ней доказаны законы больших чисел, гауссовская и пуассоновская предельные теоремы для числа ячеек заданного объема.

В работе Р.Х. Хакимуллина, Ю.Ю. Энатской [10] в схеме размещения различимых частиц по различным ячейкам получены предельные теоремы для числа пустых ячеек из

F.A. Abdushukurov, Poisson limit theorems in schemes of distributions of distinguishable particles.

Поступила 24 ноября 2019 г.

отмеченного множества ячеек. Их доказательства в идейном плане близки к доказательствам теорем из работы В.А. Ватутина, В.Г. Михайлова [10]. В этой работе в схеме размещения не более n различимых частиц по N различным ячейкам получены пуассоновские предельные теоремы для числа ячеек заданного объема из отмеченного множества ячеек. Их доказательства основаны на известной пуассоновской предельной теореме для перестановочных случайных величин (см. [11], [12]). В последнем параграфе мы показываем, что наши результаты обобщаются на схему размещения n различимых частиц по N различным ячейкам и приводим их формулировки.

Заметим, что условия, обеспечивающие сходимость количества ячеек заданного объема к пуассоновской случайной величине, как в схеме размещения не более n различимых частиц по N различным ячейкам (теорема 2.1), так и в схеме размещения n различимых частиц по N различным ячейкам (теорема 4.1), совпадают.

2. Основные результаты

Пусть n, N – натуральные числа. Равновероятной схемой размещения n различимых частиц по N различным ячейкам называются случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$, совместное распределение которых определяется формулой

$$P\{\eta_1 = k_1, \dots \eta_N = k_N\} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_N!} \left(\frac{1}{N}\right)^N, \tag{2.1}$$

где $k_1, k_2, \dots k_N$ – неотрицательные целые числа такие, что $k_1 + k_2 + \cdots + k_N = n$.

Равновероятной схемой размещения n различимых частиц по N различным ячейкам имеет представление

$$P\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = P\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \;\middle|\; \sum_{i=1}^{N} \xi_i = n\right\}, \tag{2.2}$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные пуассоновские случайные величины с произвольным параметром λ (см., например, с. 25 в монографии В.Ф. Колчина [2]).

В этой статье мы будем рассматривать случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$, совместное распределение которых определяется формулой

$$P\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = P\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \;\middle|\; \sum_{i=1}^{N} \xi_i \le n\right\}, \tag{2.3}$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные пуассоновские случайные величины с параметром $\lambda = \lambda_{n,N} = \frac{n}{N}$. Схему (2.3) можно рассматривать как равновероятную схему размещения не более n различимых частиц по N различным ячейкам.

Мы будем обозначать:

$$p_k(\lambda) = P\{\xi_i = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2 \dots, \tag{2.4}$$

γ – гауссовская случайная величина с нулевым среднем и единичной дисперсии, Phi – ее функция распределения, $Pi(a)$ - пуассоновская случайная величина с параметром a, $\overset{d}{=}$ – равенство распределений, $\overset{d}{\to}$ – сходимость по распределению.

Мы будем изучать сходимость последовательности случайных величин

$$\mu_r(n, K, N) = \sum_{i=1}^{K} I_{\{\eta_i = r\}}, \quad \text{где} \quad 0 < K \le N, \quad r = 0, 1, 2 \dots.$$

Случайную величину $\mu_r(n, K, N)$ можно интерпретировать как количество ячеек среди первых K ячеек, которые содержат r частиц.

Основным результатом работы является следующая теорема. Она верна как для случая, когда $r \to \infty$, так и для случая, когда множество чисел r ограничено.

Теорема 2.1. *Пусть $K, n, N \to \infty$ так, что*

$$\sqrt{\frac{n}{N^2}} - \frac{r}{\sqrt{n}} \to 0, \quad Kp_r(\lambda) \to \beta, \tag{2.5}$$

где $0 \le \beta < \infty$. Тогда

$$\mu_r(n, K, N) \xrightarrow{d} Pi(\beta).$$

Если множество чисел r ограничено, то 2.1 имеет уточнение.

Теорема 2.2. *Пусть $r \le C$ для некоторого $C > 0$, $K, n, N \to \infty$ так, что*

$$Kp_r(\lambda) \to \beta,$$

где $0 < \beta < \infty$. Тогда

$$\mu_r(n, K, N) \xrightarrow{d} Pi(\beta).$$

Следующий пример показывает, что существуют r, K, n, N, удовлетворяющие условиям теоремы 2.1, причем $K = O(\sqrt{N})$. Кроме того, если множество чисел r ограничено, то $\frac{r}{\sqrt{n}} \to 0$ и из доказательства теоремы 2.2 следует, что при $0 < \beta < \infty$ второе условие в (2.5) влечет $\frac{n}{N^2} \to 0$. Пример показывает, что, если $r \to \infty$, то это, вообще говоря, не верно.

Пример 2.1. *Будем обозначать: $[x]$ – целая часть числа x, $\{x\}$ – дробная часть числа x.*

Пусть $0 < \alpha < \infty$. Положим

$$n = (\alpha + o(1))N^2, \quad r = [(\alpha + o(1))N].$$

Тогда $\lambda = (\alpha + o(1))N$. Поэтому $\frac{r}{\sqrt{n}} \to \sqrt{\alpha}$, $\frac{n}{N^2} \to \alpha$, и первое условие в (2.5) выполнено. Используя формулу Стирлинга для оценки $r!$, получаем

$$p_r(\lambda) = \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2Pi[(\alpha + o(1))N]}} e^{-\{(\alpha+o(1))N\}} \left(\frac{(\alpha + o(1))N}{[(\alpha + o(1))N]}\right)^{[(\alpha+o(1))N]} (1 + o(1)) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2Pi\alpha N}} e^{-\{(\alpha+o(1))N\}} \left(1 + \frac{\{(\alpha + o(1))N\}}{[(\alpha + o(1))N]}\right)^{[(\alpha+o(1))N]} (1 + o(1)).$$

Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{2Pi\alpha N}} e^{-1}(1 + o(1)) \le p_r(\lambda) \le \frac{1}{\sqrt{2Pi\alpha N}}(1 + o(1))$$

и найдутся числа K, $0 < K < N$, для которых выполнено второе условие в (2.5). Заметим, что, если $\beta > 0$, то из второго условия в (2.5) следует, что найдутся $C_1, C_2 > 0$ со свойством

$$C_1\sqrt{N} < K < C_2\sqrt{N}.$$

Теорема 2.3. *Пусть $r, K, n, N \to \infty$ так, что*

$$Kp_r(\lambda) \to \beta,$$

где $0 < \beta < \infty$ и $C_1\sqrt{r} < K < C_2\sqrt{r}$ для некоторых $C_1, C_2 > 0$. Тогда

$$\mu_r(n, K, N) \xrightarrow{d} Pi(\beta).$$

Замечание 2.1. *Как следует из доказательств теоремы 2.2 и теоремы 2.3, при дополнительных условиях второе условие в (2.5) влечет первое условие. Автором не известно, верно ли это без дополнительных условий.*

Замечание 2.2. *Пусть выполено второе условие в (2.5) и $\beta > 0$, $r \to \infty$. Тогда, так как $e^{1-x}x \leq 1$, при $x > 0$, используя формулу Стирлинга для оценки $r!$, получаем*

$$\frac{K(1+o(1))}{\sqrt{2Pir}} \geq Kp_r(\lambda) = \frac{K}{\sqrt{2Pir}} \left(e^{1-\frac{\lambda}{r}} \frac{\lambda}{r}\right)^r (1+o(1)) = \beta + o(1).$$

Поэтому

$$K \geq (\beta + o(1))\sqrt{2Pir}$$

и условие на числа K в теореме 2.3 в некотором смысле экстремально.

Доказательства наших теорем основаны на предельной теореме для перестановочных случайных величин. Случайные величины $\eta'_1, \eta'_2, \dots \eta'_K$ называются перестановочными, если распределение случайного вектора $(\eta'_1, \eta'_2, \dots \eta'_N)$ совпадает с распределением случайного вектора $(\eta'_{i_1}, \eta'_{i_2}, \dots \eta'_{i_K})$ для всех перестановок $(i_1, i_2, \dots i_N)$ последовательности $(1, 2, \dots K)$. Мы будем использовать следующую известную теорему (см. Теорема II в [11] или предложение 2.1 в [12]; отметим также Теорему 1 из работы (Benczúr, [13]), в которой эта теорема приведена без доказательства в более общем виде).

Теорема 2.4. *Пусть для каждого фиксированного K случайные величины η'_{Ki}, $1 \leq i \leq K$, перестановочные, события $A_{Ki} = A_{Kri} = \{\omega \in \Omega : \eta'_{Ki}(\omega) = r\}$, $S_K = \sum_{i=1}^{K} I_{A_{Ki}}$. Предположим, что случайные величины η'_{Ki}, $1 \leq i \leq K$, $K \in \mathbf{N}$, и числа r такие, что выполнены условия: найдется такое $0 \leq \beta < \infty$, что*

$$K^k \mathbf{P}(A_{K1} \cap A_{K2} \cap \dots \cap A_{Kk}) \to \beta^k, \quad \text{при} \quad K \to \infty, \quad \text{для всех} \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

Тогда

$$S_K \xrightarrow{d} Pi(\beta).$$

Заметим, что случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$, определенные в (2.3), перестановочные и справедливо равенство

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = (p_r(\lambda))^k \frac{P\{\zeta_{N-k} \leq n - kr\}}{P\{\zeta_N \leq n\}}, \tag{2.6}$$

где $A_i = A_{ri} = \{\omega \in \Omega : \eta_i(\omega) = r\}$, $\zeta_l = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_l$, $l \in \{N, N-k\}$.

Распределение случайной величины $\mu_r(n, K, N)$ совпадает с распределением случайной величины $\mu_r(n, A, N) = \sum_{i \in A} I_{\{\eta_i = r\}}$, где A – отмеченное подмножество множества ячеек, состоящее из K ячеек.

Предельным теоремам для $\mu_0(n, A, N)$ – числа пустых ячеек из отмеченного множества ячеек в схеме размещения различимых частиц по различным ячейкам, посвящена работа [10]. Наши результаты можно рассматривать как перенос некоторых результатов работы [10] на схему (2.3).

3. Доказательства теорем

Мы будем использовать следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть ξ_i, $i = 1, 2 \ldots,$ – независимые пуассоновские случайные величины с параметром α, $\zeta_N = \sum_{i=1}^N \xi_i$, $S_N = \frac{\zeta_N - \alpha N}{\sqrt{\alpha N}}$. Будем считать, что $\alpha = \alpha_N$ – такие числа, что $\alpha N \to \infty$. Тогда*

$$S_N \xrightarrow{d} \gamma.$$

Лемма 1 – следствие теоремы Линдеберга -Феллера. Однако ее можно доказать проще: характеристическая функция случайной величины S_N имеет вид

$$Phi_N(t) = \exp\left(-\alpha N(1 - e^{i\frac{t}{\sqrt{\alpha N}}}) - it\sqrt{\alpha N}\right), \quad t \in \mathbf{R}.$$

и $Phi_N(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$, при $\alpha N \to \infty$, для любого $t \in \mathbf{R}$.

Доказательство теоремы 2.1. Используя (2.6), имеем

$$K^k P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = (Kp_r(\lambda))^k \frac{P\left\{\frac{\zeta_{N-k} - \lambda(N-k)}{\sqrt{\lambda(N-k)}} \leq \frac{n - kr - \lambda(N-k)}{\sqrt{\lambda(N-k)}}\right\}}{P\left\{\frac{\zeta_N - \lambda N}{\sqrt{\lambda N}} \leq \frac{n - \lambda N}{\sqrt{\lambda N}}\right\}} =$$

$$= (\beta + o(1))^k \frac{P\left\{S_{N-k} \leq k\left(\sqrt{\frac{n}{N^2}} - \frac{r}{\sqrt{n}}\right)(1 + o(1))\right\}}{P\left\{S_N \leq 0\right\}}.$$

Так как при $\alpha = \lambda = \frac{n}{N}$, $\alpha N = n \to \infty$, то применима лемма 1. По лемме 1 получаем

$$P\{S_N \leq 0\} = \Phi(0)(1 + o(1)).$$

Из первого условия в (2.5) и леммы 1 вытекает, что

$$P\left\{S_{N-k} \leq k\left(\sqrt{\frac{n}{N^2}} - \frac{r}{\sqrt{n}}\right)\right\} = Phi(0)(1 + o(1)).$$

Следовательно,

$$K^k P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = \beta^k + o(1).$$

Итак, условие теоремы 2.4 выполнены, и теорема 2.1 следует из теоремы 2.4. Доказательство закончено. □

Доказательство теоремы 2.2. Если множество чисел λ ограничено, то $\frac{\lambda}{N} = \frac{n}{N^2} \to 0$. Пусть $\lambda \to \infty$. Логарифмируя равенство $Kp_r(\lambda) = \beta + o(1)$, получаем

$$\ln(K) - \lambda + r\ln(\lambda) - \ln(r!) = \ln(\beta + o(1)).$$

Поэтому

$$\frac{\ln(K)}{N} - \frac{\lambda}{N}(1 + o(1)) - \frac{\ln(r!)}{N} = \frac{\ln(\beta + o(1))}{N}.$$

Так как $\frac{\ln(K)}{N} \to 0$, $\frac{\ln(r!)}{N} \to 0$, $\frac{\ln(\beta+o(1))}{N} \to 0$, то $\frac{\lambda}{N} = \frac{n}{N^2} \to 0$. Поскольку, кроме того $\frac{r}{\sqrt{n}} \to 0$, то условия (2.5) выполнены, и теорема 2.2 следует из теоремы 2.1. Доказательство закончено. □

Доказательство теоремы 2.3. Используя формулу Стирлинга для оценки $r!$, получаем

$$C_1'(\beta + o(1)) < e^{r-\lambda}\left(\frac{\lambda}{r}\right)^r < C_2'(\beta + o(1)), \tag{3.1}$$

где $C_i' = \frac{C_i}{\sqrt{2Pi}}$, $i \in \{1, 2\}$. Поэтому

$$(C_1'(\beta + o(1)))^{1/r} < e^{1-\frac{\lambda}{r}}\frac{\lambda}{r} < (C_2'(\beta + o(1)))^{1/r}.$$

Следовательно, $e^{1-\frac{\lambda}{r}}\frac{\lambda}{r} \to 1$ и $\frac{\lambda}{r} \to 1$. Но тогда $1 - \frac{\lambda}{r} = \frac{r-\lambda}{r} \to 0$ и, используя формулу Тейлора, имеем

$$e^{r-\lambda}\left(\frac{\lambda}{r}\right)^r = \exp\left(r\frac{r-\lambda}{r} + r\ln\left(1 - \frac{r-\lambda}{r}\right)\right) =$$

$$= \exp\left(r\frac{r-\lambda}{r} + r\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}\left(-\frac{r-\lambda}{r}\right)^i\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(r-\lambda)^2}{r}(1 + o(1))\right).$$

С учетом (3.1) это влечет

$$C_3 < -\frac{(\lambda - r)^2}{r} < C_4, \tag{3.2}$$

где $C_3 = 2\ln(C_1'(\beta))(1 + o(1))$, $C_4 = 2\ln(C_2'(\beta))(1 + o(1))$. Тогда, или $\lambda > r$, или $\lambda \le r$ и, в этом случае, из левого неравенства в (3.2) имеем

$$\lambda > r - \sqrt{-C_3 r}.$$

Поэтому

$$\frac{n}{N} > r - \sqrt{-C_3 r} \text{ и } n > N(r - \sqrt{-C_3 r}) = Nr(1 + o(1)).$$

Следовательно,

$$\left|\sqrt{\frac{n}{N^2}} - \frac{r}{\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{\lambda - r}{\sqrt{n}}\right| < \left|\frac{\lambda - r}{\sqrt{Nr}}\right|(1 + o(1)) < \frac{\sqrt{C_4}}{\sqrt{N}}(1 + o(1)) = o(1).$$

Итак, условия (2.5) выполнены, и теорема 2.3 следует из теоремы 2.1. Доказательство закончено. □

4. Добавление

В этом параграфе мы рассмотрим обобщения результатов этой работы на схему размещения различимых частиц по различным ячейка. Т. е. мы будем рассматривать случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$, определенные формулой (2.1). При этом мы будем использовать представление (2.2) с независимыми пуассоновскими случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \dots$, имеющими параметр $\lambda = \frac{n}{N}$.

Тогда случайная величина $\mu_r(n, K, N) = \sum_{i=1}^{K} I_{\{\eta_i = r\}}$ – количество ячеек среди первых K ячеек, которые содержат r частиц. При этом справедлив следующий аналог формулы (2.5)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = (p_r(\lambda))^k \frac{P\{\zeta_{N-k} = n - kr\}}{P\{\zeta_N = n\}}, \tag{4.1}$$

где $A_i = A_{ri} = \{\omega \in \Omega : \eta_i(\omega) = r\}$.

Используя формулу Стирлинга для оценки $n!$, имеем

$$P\{\zeta_N = n\} = e^{-N\alpha}\frac{(N\alpha)^n}{n!} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2Pin}} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2PiN\alpha}}. \tag{4.2}$$

При оценке числителя дроби в (4.1) используем следующую лемму. Ее доказательство повторяет доказательство локальной теоремы Гнеденко (см. теорему 1.1.11 на с. 20 в [2]) и использует лемму 1.

Лемма 2. *Пусть $\alpha = \alpha_N$ – такие числа, что $\alpha N \to \infty$. Тогда*

$$P\{\zeta_N = l\} = \frac{e^{-\frac{(l-N\alpha)^2}{2\alpha N}}}{\sqrt{2Pi\alpha N}}(1+o(1)) \tag{4.3}$$

равномерно по $l = 0, 1, 2 \ldots$.

В силу (4.3), имеем

$$P\{\zeta_{N-k} = n - kr\} = \frac{e^{-\frac{(k(\lambda-r))^2}{2\alpha N}}}{\sqrt{2Pi\alpha(N-k)}}(1+o(1)) = \frac{e^{-\frac{k^2}{2}\left(\sqrt{\frac{n}{N^2}}-\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^2}}{\sqrt{2Pi\alpha(N-k)}}(1+o(1)). \tag{4.4}$$

Повторяя доказательство теоремы 2.1 с использованием (4.2) и (4.4) для оценки дроби в (4.1), получаем следующую теорему.

Теорема 4.1. *Пусть $K, n, N \to \infty$ так, что*

$$\sqrt{\frac{n}{N^2}} - \frac{r}{\sqrt{n}} \to 0, \quad Kp_r(\lambda) \to \beta, \tag{4.5}$$

где $0 \le \beta < \infty$. Тогда

$$\mu_r(n, K, N) \xrightarrow{d} Pi(\beta).$$

Замечание 4.1. *В теореме 2.4 из работы* [12] *доказывается, что если выполнено одно из условий:*

(A) множество чисел r ограничено, $\frac{n}{N^2} \to 0$, $K\left(\frac{n}{N}\right)^r e^{-\frac{n}{N}} \to \beta$,

(B) $\frac{r}{N} \to 0$, $\frac{r^2}{N} \to 0$, $\frac{n}{N} \to 0$, $K\left(\frac{n}{N}\right)^r e^{-\frac{n}{N}} \to \beta$,

то

$$\mu_r(n, K, N) \xrightarrow{d} Pi(\beta).$$

Условие (A) или условие (B) влекут условия теоремы 4.1. Поэтому теорема 2.4 из работы [12] является следствием теоремы 4.1.

Доказательства теоремы 2.2 и теоремы 2.3 состоят в том, что мы показываем: в условиях этих теорем второе условие в (4.5) влечет первое условие. Поэтому их доказательства на случай схемы размещения различимых частиц по различным ячейкам переносятся без изменения. В итоге мы получаем следующие теоремы.

Теорема 4.2. *Пусть $r \le C$ для некоторого $C > 0$, $K, n, N \to \infty$ так, что*

$$Kp_r(\lambda) \to \beta,$$

где $0 < \beta < \infty$. Тогда

$$\mu_r(n, K, N) \xrightarrow{d} Pi(\beta).$$

Теорема 4.3. *Пусть $r, K, n, N \to \infty$ так, что*

$$Kp_r(\lambda) \to \beta,$$

где $0 < \beta < \infty$ и $C_1\sqrt{r} < K < C_2\sqrt{r}$ для некоторых $C_1, C_2 > 0$. Тогда

$$\mu_r(n, K, N) \xrightarrow{d} Pi(\beta).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. *Случайные размещения.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1976.
2. Колчин В.Ф. *Случайные графы.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.
3. Колчин В.Ф. *Один класс предельных теорем для условных распределений.* // Литовск. матем. сб. **8**:1, 53-63 (1968).
4. Тимашев А.Н. *Асимптотические разложения в вероятностной комбинаторике.* // М.: Редакция ОПиПМ / Научное изд-во ТВП, 2011.
5. Тимашев А.Н. *Большие уклонения в вероятностной комбинаторике.* // М.: Издательский дом Академия, 2011.
6. Тимашев А.Н. *Обобщенная схема размещения в задачах вероятностной комбинаторики.* // М.: Издательский дом Академия, 2011.
7. Тимашев А.Н. *Предельный закон Пуассона для распределения числа компонент в обобщенной схеме размещения.* // Дискрет. матем. **29**:4, 143-157 (2017).
8. Чупрунов А.Н., Фазекаш И. *Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для числа ячеек заданного объема.* // Дискрет. матем. **24**:1, 140-158 (2012).
9. Хакимуллин Е.Р., Энатская Н. Ю. *Предельные теоремы для числа пустых ячеек.* // Дискрет. матем. **9**:2, 120-130 (1997).
10. Ватутин В.А. Михайлов В.Г. *Предельные теоремы для числа пустых ячеек в равновероятной схеме размещения частиц по ячейкам.* // Теор. вероятн. и ее примен. **27**:4, 682-692 (1982).
11. D. G. Kendall *On finite and infinite sequences of exchangeble events.* // Studia Sci. Math. Hangar. **2**, 319-327 (1967).
12. A. Chuprunov, and I. Fazekas *Poisson limit theorems for the for the generalized allocation scheme.* // Annales Unive. Sci. Budapest, Sect. Comp. **49**, 77-96 (2019).
13. A. Benczúr *On sequences of equivalent events and the compound Poisson Process.* // Studia Sci. Math. Hangar. **3**, 451-458 (1968).

Файзихутдин Абдурахимович Абдушукуров,
Институт вычислительной математики и информационных технологий,
Казанский (поволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 35,
420008, г. Казань, Россия
E-mail: fayz.abdushukurov@mail.ru