ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 2 (2020). С. 10-20.

УДК 517.5

ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА НЕЙМАНА НА НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

В.В. ВОЛЧКОВ, ВИТ. В. ВОЛЧКОВ

Аннотация. Изучение переопределенных граничных задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных было инициировано Д. Серрином в 1971 г. В своей работе он установил свойство радиальной симметрии для решений некоторой переопределенной задачи Пуассона. Помимо значительного самостоятельного интереса, задачи такого типа имеют важные приложения в теории потенциала, интегральной геометрии, гидродинамике, электростатике и теории капиллярности. Как правило, их решение основано на принципе максимума, лемме Хопфа об угловой граничной точке и методе движения гиперплоскостей, введенным А.Д. Александровым для изучения некоторых геометрических проблем, связанных с характеризацией сфер. Среди других, более современных методов, не использующих принцип максимума в рассматриваемых задачах, отметим метод двойственности, метод объемной производной, а также интегральный метод.

В данной статье рассматривается переопределенная задача Неймана для уравнения Лапласа $\Delta f = 0$ на плоских неограниченных областях. Показано, что при определенных условиях (см. теорему 2.1 в § 1) такая задача разрешима только для внешности круга. Отличительной особенностью теоремы 2.1 является то, что в ней впервые в подобных задачах получено точное условие на рост f на бесконечности. Кроме того, как видно из теоремы 2.2 в § 2, другие условия в теореме 2.1 также необходимы. В отличие от работ предшественников, доказательство теоремы 2.1 использует некоторые граничные свойства конформных отображений, теорему В.И. Смирнова о функциях класса H_p и теорему Фейера-Рисса о неотрицательных тригонометрических полиномах.

Ключевые слова: переопределенные задачи, задача Неймана, гармонические функции, граничное поведение.

Mathematics Subject Classification: 31A05

1. Введение

В 1971 г. Д. Серрин инициировал [1] изучение переопределенных граничных задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. Впоследствии выяснилось, что, помимо значительного самостоятельного интереса, такие задачи имеют важные приложения в теории потенциала [2], интегральной геометрии [3], [4], гидродинамике [5], электростатике [6], [7] и теории капиллярности [8], [9]. Например, известная проблема Помпейю, до сих пор не решенная в полном объеме, при достаточно общих условиях сводится к переопределенной граничной задаче для уравнения Гельмгольца [4], [10], [11]. Более того, именно изучение подобных задач позволило получить наиболее глубокие результаты о регулярности границы множеств, рассматриваемых в проблеме Помпейю [3], [12], [13]. По поводу результатов, связанных с примыкающей к данному кругу вопросов старой гипотезы Шиффера, см. [14], [15] и библиографию к этим работам.

V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov, Overdetermined Neumann boundary value problem in unbounded domains.

Поступила 30 октября 2019 г.

Классический результат Д. Серрина [1] устанавливает свойство радиальной симметрии для решений следующей переопределенной задачи Пуассона.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2, для которой существует функция $f \in C^2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая уравнению Пуассона

$$\Delta f = -1 \quad \text{в} \quad \Omega \tag{1.1}$$

и граничным условиям

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial n} = const \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{1.2}$$

Тогда, как показано в [1], Ω – шар и f радиально симметрична. В [1] также отмечено, что подобное утверждение сохраняет силу и для некоторых других уравнений, обобщающих (1.1), если вместе с (1.2) выполняется условие

$$f > 0 \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{1.3}$$

Теорема Д. Серрина получила дальнейшее развитие и уточнение в разных направлениях (см. обзор [16] с обширной библиографией).

Во-первых, в ряде работ уточнялись условия теоремы Д. Серрина, связанные с гладкостью границы Ω и решения f.

Во-вторых, рассматривались подобные задачи для других уравнений (в том числе и нелинейных) и других граничных условий.

В-третьих, изучались аналоги теоремы Д. Серрина для других типов областей (проколотых, кольцевых, неограниченных). При этом в случае неограниченной области к условиям (1.2), (1.3) добавлялось условие на поведение функции f на бесконечности. Например, в работе [17] требуется, чтобы f стремилась к нулю на бесконечности, а в [8], [18] дополнительно предполагается, что этому же условию удовлетворяют все частные производные от f первого порядка.

Доказательство основных результатов в большинстве из цитированных выше работ основано на принципе максимума, лемме Хопфа об угловой граничной точке и методе движения гиперплоскостей, введенным А.Д. Александровым для решения некоторых геометрических проблем, связанных с характеризацией сфер (см. [16], [19], [20]). Среди других, более современных методов, не использующих принцип максимума в рассматриваемых задачах, отметим метод двойственности [21], метод объемной производной [22], а также интегральный метод [23].

В данной статье рассматривается переопределенная задача Неймана для уравнения Лапласа $\Delta f = 0$ на плоских неограниченных областях. Показано, что при определенных условиях (см. теорему 2.1 в § 1) такая задача разрешима только для внешности круга. Отличительной особенностью теоремы 2.1 является то, что в ней впервые в подобных задачах получено точное условие на рост f на бесконечности. Кроме того, как видно из теоремы 2.2 в § 2, другие условия в теореме 2.1 также необходимы. В отличие от работ предшественников, доказательство теоремы 2.1 использует некоторые граничные свойства конформных отображений, теорему В.И. Смирнова о функциях класса H_p и теорему Фейера-Рисса о неотрицательных тригонометрических полиномах.

2. Формулировки основных результатов

Пусть Γ – замкнутая гладкая жорданова кривая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, G – ограниченная область в $\mathbb{C}$ с границей Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$. Как обычно, символом $\dfrac{\partial}{\partial n}$ будем обозначать оператор дифференцирования в направлении внешней (по отношению к G) нормали к Γ.

Сформулируем основные результаты данной работы.

Теорема 2.1. *Предположим, что существует функция f, непрерывная в $\mathbb{C} \setminus G$ и гармоническая в $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. $f = 0$ *на* Γ*;*
2. $\dfrac{\partial f}{\partial n} = 1$ *на* Γ*;*
3. $f(z) = o\left(|z|^2\right)$ *при* $z \to \infty$.

Тогда область G является кругом, и при этом

$$f(z) = R \ln \frac{|z - z_0|}{R},$$

где z_0, R – центр и радиус круга G.

Доказательство теоремы 2.1 приводится в §3. Оно основано на применении конформного отображения внешности единичного круга на область $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$. Это отображение позволяет свести исходную задачу для области $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ к переопределенной краевой задаче для внешности круга, в которой основной трудностью является неоднородность граничного условия для нормальной производной. Для изучения этого условия потребовались некоторые тонкие результаты о граничных свойствах функции, осуществляющей указанное выше конформное отображение, а также некоторые свойства классов Харди H_p в единичном круге (см. [24, гл. 9, 10]). Соответствующие вспомогательные конструкции и утверждения содержатся в §2. Отметим, что отсутствие подобной теории конформных отображений в многомерном случае оставляет открытым вопрос о существовании аналога теоремы 2.1 в пространстве $\mathbb{R}^n$ при $n > 2$.

Следующий результат показывает необходимость условий 1, 2 и точность условия 3 в теореме 2.1.

Теорема 2.2. *Существуют отличная от круга ограниченная область $G \subset \mathbb{C}$ с жордановой границей Γ класса C^∞ и функции f_1, f_2, f_3, принадлежащие $C^\infty(\mathbb{C} \setminus G)$ и гармонические в $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$, такие что:*

1. f_1 *удовлетворяет условиям 1 и 3 теоремы 2.1;*
2. f_2 *удовлетворяет условиям 2 и 3 теоремы 2.1;*
3. f_3 *удовлетворяет условиям 1, 2 теоремы 2.1, и при этом*

$$f_3(z) = O\left(|z|^2\right) \quad \text{при} \quad z \to \infty.$$

Доказательство теоремы 2.2 содержится в § 4.

3. Вспомогательные конструкции

Пусть $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ и функция u непрерывна в $\overline{A} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geqslant 1\}$. При любом фиксированном $\rho \geqslant 1$ функции $u\left(\rho e^{i\varphi}\right)$ соответствует ряд Фурье

$$u\left(\rho e^{i\varphi}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(\rho) e^{in\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \tag{3.1}$$

где

$$u_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(\rho e^{i\varphi}\right) e^{-in\varphi} d\varphi. \tag{3.2}$$

Из (3.2) следует, что

$$|u_n(\rho)| \leqslant \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} \left|u\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right| \tag{3.3}$$

для любых $n \in \mathbb{Z}$, $\rho \geqslant 1$. Пусть $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа. Если $u \in C^2(A)$, то простые вычисления с использованием (3.2) показывают, что при любых $\rho > 1$, $\varphi \in [0, 2\pi]$,

$n \in \mathbb{Z}$ выполнено равенство

$$\Delta\left(u_n(\rho)e^{in\varphi}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\Delta u)(\rho e^{it})e^{in(\varphi - t)}dt. \tag{3.4}$$

Кроме того,

$$\Delta\left(u_n(\rho)e^{in\varphi}\right) = \left(u_n''(\rho) + \frac{u_n'(\rho)}{\rho} - \frac{n^2}{\rho^2}u_n(\rho)\right)e^{in\varphi}. \tag{3.5}$$

По теореме Римана о конформном отображении существует единственная голоморфная в области A функция $w = \psi(z)$, которая отображает A конформно на область $\mathbb{C}\setminus G$ при условиях

$$\psi(\infty) = \infty, \quad \psi'(\infty) = a > 0. \tag{3.6}$$

Первое условие в (3.6) показывает, что функция $w = \psi(z)$ точку $z = \infty$ переводит в точку $w = \infty$, а второе условие означает, что

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\psi(z)}{z} = a > 0. \tag{3.7}$$

Из условий (3.6) и (3.7) следует, что функция ψ, являясь голоморфной в области A, имеет в точке $z = \infty$ простой полюс, и поэтому ее лорановское разложение в A имеет вид

$$\psi(z) = az + \sum_0^\infty \psi_n z^{-n}, \quad a > 0. \tag{3.8}$$

Согласно принципу соответствия границ при конформных отображениях функция ψ может быть продолжена по непрерывности на множество $\overline{A}$. Для этого продолжения мы сохраним обозначение $w = \psi(z)$.

Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Как обычно, обозначим через $H_p(\mathbb{D})$, $p > 0$, класс функций f, голоморфных в $\mathbb{D}$ и таких, что для каждой из них интеграл

$$\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\varphi})\right|^p d\varphi \tag{3.9}$$

ограничен при $0 \leqslant r < 1$. При $z \in \mathbb{D}$ положим

$$h(z) = a - \sum_0^\infty n\psi_n z^{-n-1} = \psi'\left(\frac{1}{z}\right). \tag{3.10}$$

Отметим, что в силу однолистности ψ функция h не имеет нулей в $\mathbb{D}$. Далее нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения о свойствах функций h и ψ.

Лемма 3.1. *Функции h и $1/h$ принадлежат классу $H_p(\mathbb{D})$ при всех $p > 0$.*

Доказательство. Пусть $b \in G$. Обозначим через $d(b)$ расстояние от точки b до Γ. Тогда при любом $z \in \mathbb{D}$ имеем

$$\left|\psi\left(\frac{1}{z}\right) - b\right| \geqslant d(b) > 0.$$

Из этого неравенства и (3.8) следует, что существует постоянная $c_1 > 0$, такая что

$$\left|z\left(\psi\left(\frac{1}{z}\right) - b\right)\right| > c_1 \tag{3.11}$$

при всех $z \in \mathbb{D}$. Кроме того, из (3.8) и определения ψ получаем, что

$$\left|z\left(\psi\left(\frac{1}{z}\right) - b\right)\right| < c_2, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{3.12}$$

где $c_2 > 0$ не зависит от z. Далее, при $z \in \mathbb{D}$ из (3.10) находим

$$h(z) = -z^2 \left(\psi\left(\frac{1}{z}\right) - b\right)^2 \lambda'(z), \tag{3.13}$$

где

$$\lambda(z) = \left(\psi\left(\frac{1}{z}\right) - b\right)^{-1}.$$

Учитывая оценки (3.11) и (3.12), при любых $p > 0$, $r \in [0, 1)$ из (3.13) получаем

$$\int_0^{2\pi} \left(|h(re^{i\varphi})|^p + |h(re^{i\varphi})|^{-p}\right) d\varphi <$$

$$< c_2^{2p} \int_0^{2\pi} |\lambda'(re^{i\varphi})|^p d\varphi + c_1^{-2p} \int_0^{2\pi} |\lambda'(re^{i\varphi})|^{-p} d\varphi. \tag{3.14}$$

Функция λ отображает круг $\mathbb{D}$ конформно и однолистно на некоторую ограниченную область с гладкой жордановой границей. По теореме Линделёфа (см. [24, гл. 10, § 1, теорема 4]), при надлежащем выборе ветви аргумента функции $\arg \lambda'(z)$ и $\arg 1/\lambda'(z)$ могут быть продолжены до непрерывных функций на $\overline{\mathbb{D}}$. Отсюда следует (см. [24, гл. 10, § 1, теорема 5]), что функции λ и $1/\lambda$ принадлежит классу $H_p(\mathbb{D})$ при любом $p > 0$. Таким образом, интегралы в правой части неравенства (3.14) ограничены по r. Отсюда и из (3.14) получаем утверждение леммы 3.1. □

Следствие 3.1. *Функция h имеет почти всюду на $\mathbb{T}$ конечные предельные значения по некасательным путям, образующие граничную функцию $h(e^{i\varphi})$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. При этом $h(e^{i\varphi}) \in L^p(0, 2\pi)$ для любого $p > 0$ и*

$$h(e^{i\varphi}) \neq 0 \quad \text{для почти всех} \quad \varphi \in (0, 2\pi). \tag{3.15}$$

Доказательство. Утверждение о существовании указанной предельной функции $h(e^{i\varphi})$ и ее принадлежности классу $L^p(0, 2\pi)$ следует из леммы 3.1 и хорошо известного аналогичного свойства для любой функции класса $H_p(\mathbb{D})$ (см., например, [24, гл. 9, § 4]). Применяя данное свойство к функции $1/h$ и используя лемму 3.1, получим (3.15). □

Следствие 3.2. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $|\alpha| \geqslant |\beta| > 0$. Тогда функция*

$$h_1(z) = \frac{h(z)}{(\alpha + \beta z)^2}$$

принадлежит классу $H_p(\mathbb{D})$ при всех $0 < p < \frac{1}{4}$.

Доказательство. Сначала предположим, что $|\beta| = |\alpha|$. В этом случае $\alpha + \beta z = \beta(z - e^{i\gamma})$ при некотором $\gamma \in [0, 2\pi]$. Пусть $0 < p < \frac{1}{4}$. Выберем $q > 1$ так, чтобы $qp < \frac{1}{4}$. Используя неравенство Гельдера и лемму 3.1, для любого $r \in [0, 1)$ имеем

$$\int_0^{2\pi} \left|h_1(re^{i\varphi})\right|^p d\varphi = \int_0^{2\pi} \left|h(re^{i\varphi})\right|^p \left|\beta(re^{i\varphi} - e^{i\gamma})\right|^{-2p} d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^{2\pi} \left|h(re^{i\varphi})\right|^{\frac{pq}{q-1}} d\varphi\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_0^{2\pi} \left|\beta(re^{i\varphi} - e^{i\gamma})\right|^{-2pq} d\varphi\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant c \left(\int_0^{2\pi} \left|1 - re^{i(\varphi-\gamma)}\right|^{-2pq} d\varphi\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.16}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от r. Поскольку

$$\left|1 - re^{i(\varphi-\gamma)}\right| \geqslant 1 - \cos(\varphi - \gamma)$$

и $pq < \frac{1}{4}$, из (3.16) получаем требуемое утверждение. В случае $|\alpha| > |\beta| > 0$ утверждение очевидно в силу леммы 3.1 и неравенства

$$|\alpha + \beta z| \geqslant |\alpha| - |\beta|, \quad z \in \mathbb{D}.$$

$\square$

Лемма 3.2. *Для почти всех (по мере Лебега) $\varphi \in [0, 2\pi]$ имеет место равенство*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \psi'((1+\varepsilon)e^{i\varphi}) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\psi((1+\varepsilon)e^{i\varphi}) - \psi(e^{i\varphi})}{\varepsilon e^{i\varphi}}, \tag{3.17}$$

где оба предела существуют и конечны.

Доказательство. Из соотношения (3.10) имеем

$$\psi'\left((1+\varepsilon)e^{i\varphi}\right) = h\left((1+\varepsilon)^{-1}e^{-i\varphi}\right)$$

для любых $\varepsilon > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Отсюда и из следствия 3.1 вытекает существование конечного предела в левой части равенства (3.17) для почти всех $\varphi \in [0, 2\pi]$. По теореме о среднем для таких φ выполнено равенство

$$\int_1^{1+\varepsilon} \psi'(\rho e^{i\varphi}) d\rho = \varepsilon \psi'(\xi e^{i\varphi})$$

для любого $\varepsilon > 0$ и некоторого $\xi \in (1, 1+\varepsilon)$, зависящего от ε. Следовательно, существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{1+\varepsilon} \psi'(\rho e^{i\varphi}) d\rho,$$

который равен пределу в левой части равенства (3.17). Поскольку

$$\int_1^{1+\varepsilon} \psi'(\rho e^{i\varphi}) d\rho = \frac{\psi\left((1+\varepsilon)e^{i\varphi}\right) - \psi(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi}},$$

отсюда получаем утверждение леммы 3.2. $\square$

Лемма 3.3. *Для почти всех $\varphi \in (0, 2\pi)$ существует $\delta = \delta(\varphi) > 0$, такое что при любом $\varepsilon \in (0, \delta(\varphi))$ круг*

$$K_{\varepsilon,\varphi} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \psi(e^{i\varphi}) - \varepsilon e^{i\varphi} \psi'(e^{i\varphi}) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \left| \psi'(e^{i\varphi}) \right| \right\} \tag{3.18}$$

не пересекается с Γ.

Доказательство. Предположим, что для некоторого $\varphi \in (0, 2\pi)$ существует последовательность $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ положительных чисел такая, что $\lim\limits_{j \to \infty} \varepsilon_j = 0$ и при любом j круг $K_{\varepsilon_j,\varphi}$ пересекается с Γ. Обозначим через φ_j одну из точек полуинтервала $[0, 2\pi)$, для которой $\psi(e^{i\varphi_j}) \in K_{\varepsilon_j,\varphi} \cap \Gamma$. Тогда имеем

$$\left| \psi(e^{i\varphi_j}) - \psi(e^{i\varphi}) - \varepsilon_j e^{i\varphi} \psi'(e^{i\varphi}) \right| \leqslant \frac{\varepsilon_j}{2} \left| \psi'(e^{i\varphi}) \right|. \tag{3.19}$$

Из этого неравенства и однолистности ψ заключаем, что $\varphi_j \to \varphi$ при $j \to \infty$.

Далее, функция $\psi(e^{it})$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$ и для почти всех $t \in [0, 2\pi]$ выполнено равенство

$$\frac{d}{dt} \psi(e^{it}) = i e^{it} \psi'(e^{it}) \tag{3.20}$$

(см. [24, гл. 10, § 1, теорема 1]).

Предположим теперь, что $\psi'(e^{i\varphi}) \neq 0$ и

$$\psi(e^{i\varphi}) - \psi(e^{i\varphi_j}) = i\psi'(e^{i\varphi}) e^{i\varphi} (\varphi - \varphi_j) + o(\varphi - \varphi_j) \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{3.21}$$

Из следствия 3.1 и равенства (3.20) следует, что эти требования выполняются для почти всех $\varphi \in (0, 2\pi)$. Сопоставляя (3.21) и (3.19) и учитывая, что $\psi'(e^{i\varphi}) \neq 0$, приходим к неравенству

$$|\varepsilon_j + i(\varphi - \varphi_j) + o(\varphi - \varphi_j)| \leqslant \frac{\varepsilon_j}{2} \quad \text{при} \quad j \to \infty.$$

При достаточно больших j последнее неравенство противоречиво, откуда следует утверждение леммы 3.3. □

Лемма 3.4. *Пусть функция f гармонична в круге $K = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - \zeta_0| < r\}$ и*

$$M = \sup_{\zeta \in K} |f(\zeta)| < +\infty. \tag{3.22}$$

Тогда при любом $\zeta \in K$ имеет место оценка

$$|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \leqslant \frac{2M|\zeta - \zeta_0|}{r - |\zeta - \zeta_0|}. \tag{3.23}$$

Доказательство. Из условия леммы получаем, что функция $w(z) = f(rz + \zeta_0)$ гармонична в $\mathbb{D}$ и $|w(z)| \leqslant M$ для любого $z \in \mathbb{D}$. Отсюда следует (см., например, [24, гл. 9, § 2, следствие 2]), что почти всюду на $\mathbb{T}$ функция w имеет некасательные конечные предельные значения. Как обычно, сохраним обозначение $w(e^{it})$ для соответствующей предельной функции, определенной почти всюду на $\mathbb{T}$. Тогда из (3.22) имеем $|w(e^{it})| \leqslant M$. Кроме того, для любого $z = \rho e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \rho < 1$ выполнена формула Пуассона

$$w(z) - w(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} w(e^{it}) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos(n(\varphi - t)) dt \tag{3.24}$$

(см. [24, гл. 9, § 2, теорема 3]). Интеграл справа не превосходит выражения

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |w(e^{it})| \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n dt \leqslant \frac{2M\rho}{1 - \rho},$$

поэтому оценка (3.23) следует из (3.24). □

Лемма 3.5. *Для почти всех $\varphi \in (0, 2\pi)$ выполнено следующее утверждение: если f гармонична в $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$, непрерывна в $\mathbb{C}\backslash G$, и существует производная $\frac{\partial f}{\partial n}(\psi(e^{i\varphi}))$, то*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{f(\psi((1+\varepsilon)e^{i\varphi})) - f(\psi(e^{i\varphi}))}{\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial n}\left(\psi(e^{i\varphi})\right) \left|\psi'(e^{i\varphi})\right|.$$

Доказательство. Из следствия 3.1 и леммы 3.2 вытекает, что для почти всех $\varphi \in (0, 2\pi)$ существует отличный от нуля конечный предел в левой части равенства (3.17) и

$$\psi((1+\varepsilon)e^{i\varphi}) = \psi(e^{i\varphi}) + \varepsilon e^{i\varphi}\psi'(e^{i\varphi}) + o(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0. \tag{3.25}$$

Следовательно, для таких φ точка $\psi((1+\varepsilon)e^{i\varphi})$ содержится в круге $K_{\varepsilon,\varphi}$ (см. (3.18)) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Применим теперь лемму 3.4, полагая

$$\zeta_0 = \psi(e^{i\varphi}) + \varepsilon e^{i\varphi}\psi'(e^{i\varphi}), \quad r = \frac{\varepsilon}{2}\left|\psi'(e^{i\varphi})\right|,$$

$$\zeta = \psi((1+\varepsilon)e^{i\varphi}),$$

где $\varepsilon \in (0, \delta(\varphi))$ – достаточно мало. Поскольку круг $K_{\varepsilon,\varphi}$ содержится в круге

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \, |z| \leqslant \left|\psi(e^{i\varphi})\right| + \frac{3}{2}\delta(\varphi)\left|\psi'(e^{i\varphi})\right|\right\},$$

существует константа M_φ, не зависящая от ε, такая что

$$\sup_{K_{\varepsilon,\varphi}} |f| \leqslant M_\varphi \quad \text{для всех} \quad \varepsilon \in (0, \delta(\varphi)).$$

Тогда из (3.25) и леммы 3.4 получаем

$$f\left(\psi((1+\varepsilon)e^{i\varphi})\right) - f(\psi(e^{i\varphi}) + \varepsilon e^{i\varphi}\psi'(e^{i\varphi})) = o(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0. \tag{3.26}$$

Далее, из определения нормальной производной имеем

$$\frac{\partial f}{\partial n}\left(\psi(e^{i\varphi})\right) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{f(\psi(e^{i\varphi}) + \varepsilon e^{i\varphi}\psi'(e^{i\varphi})) - f(\psi(e^{i\varphi}))}{\varepsilon\,|\psi'(e^{i\varphi})|}.$$

Из этого равенства и соотношения (3.26) следует утверждение леммы 3.5. □

4. Доказательство теоремы 1

Пусть функция f удовлетворяет условиям теоремы 1. Докажем, что G – круг и

$$f(z) = R\ln\frac{|z-z_0|}{R},$$

где z_0, R – центр и радиус круга G.

Рассмотрим функцию $u(z) = f(\psi(z))$, где ψ – функция, определенная в § 2. Из условия теоремы 1 получаем, что u гармонична в области A и непрерывна в $\overline{A}$, при этом

$$u(e^{i\varphi}) = 0 \quad \text{для любого} \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{4.1}$$

Кроме того, из условия 3 теоремы 1 и равенства (3.8) следует, что

$$u(z) = o\left(|z|^2\right) \quad \text{при} \quad z \to +\infty. \tag{4.2}$$

При любом фиксированном $\rho \geqslant 1$ функции $u(\rho e^{i\varphi})$ соответствует ряд Фурье (3.1), в котором функции $u_n(\rho)$ являются непрерывными на $[1, +\infty)$ (см. (3.2)). Из гармоничности u и соотношения (3.4) получаем, что функции $u_n(\rho)e^{in\varphi}$ являются гармоническими в A при всех n. В силу (3.5), это означает, что

$$u_0(\rho) = a_0 + b_0\ln\rho, \quad u_n(\rho) = a_n\rho^n + b_n\rho^{-n} \quad \text{при} \quad n \neq 0,$$

где $\rho \geqslant 1$ и a_n, b_n – комплексные постоянные. Из равенств (4.1) и (3.2) следует, что $u_n(1) = 0$, откуда

$$a_0 = 0 \quad \text{и} \quad a_n + b_n = 0 \quad \text{при} \quad n \neq 0. \tag{4.3}$$

Далее, из (3.3) и (4.2) получаем

$$u_n(\rho) = o(\rho^2) \quad \text{при} \quad \rho \to +\infty.$$

Последнее равенство означает, что $a_n = 0$ и $b_{-n} = 0$ при $n \geqslant 2$. Сопоставляя это с (4.3), приходим к выводу, что при $|z| \geqslant 1$

$$u(z) = b_0\ln|z| + a_1\left(z - \frac{1}{\overline{z}}\right) + a_{-1}\left(\frac{1}{z} - \overline{z}\right), \tag{4.4}$$

где черта означает знак комплексного сопряжения. Из этого равенства находим

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{u\left((1+\varepsilon)e^{i\varphi}\right) - u\left(e^{i\varphi}\right)}{\varepsilon} = b_0 + 2a_1e^{i\varphi} - 2a_{-1}e^{-i\varphi}$$

для любого $\varphi \in [0, 2\pi]$. Отсюда и из леммы 3.5 заключаем, что

$$b_0 + 2a_1e^{-i\varphi} - 2a_{-1}e^{i\varphi} = |h(e^{i\varphi})| \tag{4.5}$$

для почти всех $\varphi \in [0, 2\pi]$.

По теореме Фейера-Рисса (см. [25, приложение 5]) неотрицательный тригонометрический полином в левой части равенства (4.5) можно представить в виде

$$b_0 + 2a_1e^{-i\varphi} - 2a_{-1}e^{i\varphi} = |\alpha + \beta e^{i\varphi}|^2, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \tag{4.6}$$

где комплексные постоянные α, β таковы, что

$$\alpha + \beta z \neq 0 \quad \text{при} \quad z \in \mathbb{D}. \tag{4.7}$$

Докажем, что $\beta = 0$. Предположим противное, тогда из (4.7) имеем $|\alpha| \geqslant |\beta| > 0$. Применяя лемму 3.1 и следствие 3.2, отсюда заключаем, что функции

$$h_1(z) = \frac{h(z)}{(\alpha + \beta z)^2}, \quad h_2(z) = \frac{1}{h_1(z)}$$

принадлежат классу $H_p(\mathbb{D})$ при $p \in (0, 1/4)$. Кроме того, из (4.5) и (4.7) следует, что

$$|h_1(e^{i\varphi})| = |h_2(e^{i\varphi})| = 1$$

для почти всех $\varphi \in (0, 2\pi)$. В силу теоремы В.И. Смирнова (см. [24, гл. 9, § 4, теорема 4]), это означает, что $|h_1(z)| = 1$ при всех $z \in \mathbb{D}$. Следовательно, $h(z) = \gamma(\alpha^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 z^2)$, где $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| = 1$. Учитывая (3.10), отсюда получаем $\beta = 0$, что противоречит нашему предположению. Данное рассуждение и формулы (4.5) и (4.6) показывают, что $\beta = a_1 = a_{-1} = 0$ и $|h(e^{i\varphi})| = b_0$ для почти всех $\varphi \in (0, 2\pi)$. Как и выше, отсюда и из теоремы В.И. Смирнова заключаем, что h – тождественная константа. Учитывая (3.10) и (3.8), имеем $h(z) = a$ в $\mathbb{D}$ и $\psi(z) = az + \psi_0$ в A. Таким образом, полагая $R = a$ и $z_0 = \psi_0$, приходим к утверждению теоремы 2.1.

5. Доказательство теоремы 2

Очевидно, при любом достаточно малом $\varepsilon \in (0, 1)$ выполнено неравенство

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{9(1-\varepsilon)^2} < (1-\varepsilon)^2. \tag{5.1}$$

Для таких ε обозначим

$$A_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1 - \varepsilon\}.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = z - \frac{2}{3z} - \frac{1}{27z^3}, \quad z \in A_\varepsilon. \tag{5.2}$$

Для любых $z_1, z_2 \in A_\varepsilon$ имеем оценки

$$|z_1 z_2| > (1-\varepsilon)^2, \quad \left|z_1^{-2} + (z_1 z_2)^{-1} + z_2^{-2}\right| < \frac{3}{(1-\varepsilon)^2}. \tag{5.3}$$

Кроме того, из (5.2) находим

$$\Phi(z_1) - \Phi(z_2) = (z_1 - z_2)\left(1 + \frac{1}{z_1 z_2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{27}\left(z_1^{-2} + (z_2 z_2)^{-1} + z_2^{-2}\right)\right)\right).$$

Учитывая неравенства (5.1) и (5.3), из последнего соотношения заключаем, что $\Phi(z_1) \neq \Phi(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$. Таким образом, Φ однолистна в области A_ε. Положим

$$\Phi(A_\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : z = \Phi(\zeta), \zeta \in A_\varepsilon\},$$

и обозначим через g обратную к Φ функцию, действующую из $\Phi(A_\varepsilon)$ на A_ε. Из формулы (5.2) следует, что при любом $z \in A_\varepsilon$ выполнены неравенства

$$|z| - \frac{2}{3(1-\varepsilon)} - \frac{1}{27(1-\varepsilon)^3} < |\Phi(z)| < |z| + \frac{2}{3(1-\varepsilon)} + \frac{1}{27(1-\varepsilon)^3}.$$

Отсюда и из определения g получаем, что

$$|z| - \frac{2}{3(1-\varepsilon)} - \frac{1}{27(1-\varepsilon)^3} < |g(z)| < |z| + \frac{2}{3(1-\varepsilon)} + \frac{1}{27(1-\varepsilon)^3} \tag{5.4}$$

при всех $z \in \Phi(A_\varepsilon)$.

Положим теперь

$$G = \mathbb{C} \setminus \overline{\Phi(A)}, \quad \text{где} \quad \Phi(A) = \{z \in \mathbb{C} : z = \Phi(\zeta), \zeta \in A\}.$$

В силу однолистности Φ множество G является ограниченной областью с гладкой жордановой границей $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = \Phi(\zeta), \zeta \in \mathbb{T}\}$. Кроме того, поскольку

$$\Phi(1) = -\Phi(-1) = \frac{8}{27} \quad \text{и} \quad \Phi(i) = -\Phi(-i) = \frac{44}{27}i,$$

область G не является кругом.

Рассмотрим функции

$$f_1 = \ln|g|, \quad f_2 = \frac{10}{9}\ln|g| - \frac{1}{3}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{g^2}\right),$$

$$f_3 = \frac{10}{9}\ln|g| + \frac{1}{6}\mathrm{Re}\left(g^2 - \frac{1}{g^2}\right).$$

Из определения g следует, что g голоморфна в $\Phi(A_\varepsilon)$ и не обращается в нуль. Отсюда получаем, что функции f_1, f_2, f_3 являются гармоническими в $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ и принадлежат классу $C^\infty(\mathbb{C} \setminus G)$. Используя также (5.4), приходим к выводу, что функции f_1, f_2, f_3 удовлетворяют всем требованиям теоремы 2.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Serrin *A symmetry problem in potential theory* // Arch. Rational Anal. Mech. **43**:1, 304–318 (1971).
2. L.E. Payne, G.A. Philippin *On two free boundary problems in potential theory* // J. Math. Anal. Appl. **161**:2, 332–342 (1991).
3. C.A. Berenstein, M. Shahshahani *Harmonic analysis and the Pompeiu problem* // Amer. J. Math. **105**:5, 1217–1229 (1983).
4. V.V. Volchkov *Integral Geometry and Convolution Equations*, Kluwer, Dordrecht (2003).
5. R.L. Fosdick, J. Serrin *Rectilinear steady flow of simple fluids* // Proc. R. Soc. Lond. A. **332**:1590, 311–333 (1973).
6. G.A. Philippin *On a free boundary problem in Electrostatics* // Math. Meth. Appl. Sci. **12**:5, 387–392 (1990).
7. O. Mendez, W. Reichel *Electrostatic characterization of spheres* // Forum Math. **12**:2, 223–245 (2000).
8. B. Sirakov *Symmetry for exterior elliptic problems and two conjectures in potential theory* // Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. non Linéaire. **18**:2, 135–156 (2001).
9. W. Reichel *Radial symmetry for an electrostatic, a capillarity and some fully nonlinear overdetermined problems on exterior domains* // Z. Anal. Anwendungen. **15**:3, 619–635 (1996).
10. L. Zalcman *A bibliographic survey of the Pompeiu problem* // Approximation by solutions of partial differential equations (ed. Fuglede B. et. al), Kluwer, Dordrecht, 185–194 (1992).
11. V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov *Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces*, Birkhäuser, Basel (2013).
12. S.A. Williams *Analyticity of the boundary for Lipschitz domains without the Pompeiu property* // Indiana Univ. Math. J. **30**:3, 357–369 (1981).
13. L.A. Caffarelli, L. Karp, H. Shahgholian *Regularity of a free boundary with application to the Pompeiu problem* // Ann. of Math. **151**:2, 269–292 (2000).
14. C.A. Berenstein, P. Yang *An overdetermined Neumann problem in the unit disk* // Adv. in Math. **44**:1, 1–17 (1982).
15. N.B. Willms, G.M.L. Gladwell *Saddle points and overdetermined problems for the Helmholtz equation* // Z. Angew Math. Phys. **45**:1, 1–26 (1994).
16. P.W. Schaefer *On nonstandard overdetermined boundary value problems* // Nonlinear Analysis. **47**:4, 2203–2212 (2001).
17. N. Garofalo, E. Sartori *Symmetry in exterior boundary value problems for quasilinear elliptic equations via blow-up and a priori estimates* // Adv. Diff. Eqs. **4**:2, 137–161 (1999).
18. W. Reichel *Radial symmetry for elliptic boundary-value problems on exterior domains* // Arch. Rational Mech. Anal. **137**:6, 381–394 (1997).

19. G.A. Philippin *Applications of the maximum principle to a variety of problems involving elliptic differential equations* // Pitman Res. Notes Math. Ser. **175**, 34–48 (1988).
20. A.D. Alexandrov *A characteristic property of the spheres* // Ann. Mat. Pura Appl. **58**:1, 303–315 (1962).
21. L.E. Payne, P.W. Schaefer *Duality theorems in some overdetermined problems* // Math. Methods in the Appl. Sciences. **11**:6, 805–819 (1989).
22. M. Choulli, A. Henrot *Use of the domain derivative to prove symmetry results in partial differential equations* // Math. Nachr. **192**:1, 91–103 (1998).
23. B. Brandolini, C. Nitsch, P. Salani, C. Trombetti *Serrin type overdetermined problems: an alternative proof* // Arch. Rational Mech. Anal. **190**:2, 267–280 (2008).
24. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1966.
25. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат, 1956.

Валерий Владимирович Волчков,
Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24,
283001, г. Донецк
E-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

Виталий Владимирович Волчков,
Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24,
283001, г. Донецк
E-mail: volna936@gmail.com