ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 2 (2020). С. 71-86.

УДК 517.938

СЕКТОРИАЛЬНАЯ НОРМАЛИЗАЦИЯ ПРОСТЕЙШИХ РОСТКОВ ПОЛУГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ПОЛУОКРЕСТНОСТИ

П.А. ШАЙХУЛЛИНА

Аннотация. Рассматривается задача об аналитической классификации ростков полугиперболических отображений на плоскости на примере простейшего класса таких ростков (а именно, класса ростков, формально эквивалентных ростку F_λ — единичному сдвигу вдоль векторного поля $x^2\frac{\partial}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial}{\partial y},\ \lambda \in \mathbb{R}_+$). Ключевым этапом построения классификации является аналитическая нормализация ростков на секториальных областях, образующих покрытие «прорезанной» окрестности начала координат $(\mathbb{C}^2, 0)\backslash\{x = 0\}$. В данной работе для указанного класса доказана теорема о секториальной аналитической нормализации в полуокрестности, инвариантной относительно F_λ^{-1}. Также показано, что формальная нормализующая замена координат является асимптотической для построенной секториальной аналитической нормализующей замены.

Ключевые слова: полугиперболические отображения, секториальная нормализация, аналитическая классификация.

Mathematics Subject Classifcation: 34M35, 34M40

1. Введение

В работе рассматривается классическая задача о локальной аналитической классификации ростков голоморфизмов на плоскости. Кратко опишем историю вопроса.

Уже в XIX в. выяснилось, что дифференциальные уравнения, как правило, не удается решить явно (в квадратурах). С целью преодоления этой трудности А. Пуанкаре в конце XIX в. предложил следующую стратегию исследования дифференциальных уравнений: если уравнение не может быть решено, то нужно найти такую замену координат, чтобы уравнение имело по возможности более простой вид (нормальную форму). Тем самым он поставил два вопроса: к какому простейшему виду можно привести уравнение? как узнать, можно ли привести одно уравнение к другому заменой координат? Ответы на эти вопросы существенно зависят от классов рассматриваемых уравнений и замен. Такие же вопросы возникают и для отображений. Обе эти задачи были решены, в основном, в работах Пуанкаре [1]–[5], Зигеля [6] и Брюно [7], [8]. Неисследованными оставались лишь ростки типа Зигеля, при наличии резонансов или патологической близости к резонансам [9]. В 80-е гг. прошлого столетия существенные продвижения были получены и для этих «особых» случаев: в работах Йоккоза [10] — для «лиувиллевых» ростков, в работах Воронина [11], Экалля [12] и Мартине-Рамис [13] и [14] — для резонансных.

Оказалось, что в резонансном случае препятствием к нормализации ростка являются так называемые «функциональные инварианты».

P.A. Shaikhullina, Sectorial normalization of simplest germs of semihyperbolic maps in a half-neighborhood.

Работа поддержана РФФИ (грант 17-01-00739А).

Поступила 23 июня 2019 г.

Одним из способов построения функциональных инвариантов является следующий [15], [16], [17]. Проколотая окрестность особой (неподвижной) точки покрывается секториальными областями. На каждой из них строится аналитическая замена координат, нормализующая росток. Функции перехода полученного «нормализующего» атласа и доставляют искомые функциональные инварианты. Таким образом, задача о секториальной нормализации, то есть задача о нормализации ростка на области, для которой особая (неподвижная) точка является не внутренней, а граничной — первый и важнейший этап решения задачи об аналитической классификации резонансных ростков.

Намеченную выше программу удалось реализовать полностью для одномерных резонансных отображений, седловых и седлоузловых резонансных векторных полей. Следующими по сложности являются двумерные отображения и трехмерные векторные поля.

Ростки двумерных отображений и трехмерных векторных полей (при чрезвычайно сильных ограничениях, выделяющих в пространстве ростков подмножества коразмерности бесконечность) рассматривались в работах [16],[18]. Для таких ростков намеченная выше программа также была реализована в полной мере. Однако, для типичных резонансных отображений на плоскости сделано пока мало.

Росток отображения в неподвижной точке $(0,0)$ будем называть *полугиперболическим*, если один из его мультипликаторов гиперболический, а другой — параболический (по модулю равен 1). Отметим, что полугиперболический росток является резонансным ростком типа Зигеля. В работе [19] была получена полуформальная классификация таких ростков при некоторых ограничениях типичности. Рассмотрим класс ростков, формально эквивалентных ростку F_λ отображения $F_\lambda = \left(\frac{x}{1-x}, e^\lambda y\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Отметим, что рассматриваемые в работе ростки являются ростками наиболее простого вида из [19] (будем называть их «простейшими»). В данной работе мы ограничимся исследованием ростков данного класса. Будет доказана теорема о секториальной нормализации в «правильной» полуокрестности — инвариантной относительно обратного отображения ${\mathsf{F}_\lambda}^{-1}$ (полуокрестность представляет собой прямое произведение полудиска на диск). В работе [20] также была проведена секториальная аналитическая нормализация простейших ростков класса в «неправильной» полуокрестности начала координат — не инвариантной относительно отображения F_λ или F_λ^{-1}. С учетом [19] и [20] это завершает первый этап описанной выше программы.

Отметим, что уже для простейших ростков построение секториальных нормализующих отображений нетривиально, поэтому в настоящей работе и в работе [20] рассматривается именно простейший случай с целью избежать излишних вычислений. Однако аналогичные рассуждения можно привести и для других формальных нормальных форм из [19].

Стоит отметить следующее. На первый взгляд, построение секториальных нормализующих отображений в «правильной» полуокрестности (инвариантной относительно отображения F_λ^{-1}) должно быть не сложнее, чем в другой — «неправильной» полуокрестности. Однако это не так в силу наличия в «неправильной» полуокрестности центрального многообразия. Напомним, что центральным многообразием называется голоморфное подмногообразие, касающееся (в неподвижной точке отображения) собственного вектора линеаризации отображения, соответствующего негиперболическому мультипликатору. Так, для F_λ центральным многообразием является $\{y = 0\}$. Вопрос о существовании центрального многообразия не является тривиальным. Например, ответ на аналогичный вопрос для седло-узловых векторным полей удается сформулировать лишь в терминах функциональных инвариантов Мартине-Рамиса [14]. Для типичных полугиперболических отображений ответ на вопрос, соответственно, будет получен после завершения намеченной программы исследования, частью которой является данная работа. Вместе с тем можно ставить вопрос о существовании «секториального» центрального многообразия (лежащего в секторе с вершиной в начале координат). Так вот в «неправильной» полуокрестности (для ростков из [20]) такое секториальное многообразие имеется [19] и это существенно облегчает решение задачи о секториальной нормализации. В другой же полуокрестности центральное многообразие существует не всегда. Соответствующий пример дается сдвигом за единичное время вдоль векторного поля из известного примера Эйлера [17].

Ранее в работах Уеда [21], [22] уже исследовались ростки полугиперболических отображений и было установлено существование центрального многообразия в «неправильной» полуокрестности. В одном частном случае (а именно, когда центральное многообразие в такой полуокрестности все-таки существует) там были построены секториальные нормализующие отображения.

2. Определения и формулировка основного результата

Определение 1. *Росток* F *голоморфизма* $F : (\mathbb{C}^2, (0,0)) \to (\mathbb{C}^2, (0,0))$ *будем называть полугиперболическим, если один его мультипликатор равен 1, а другой — гиперболический:* $F(x,y) = (x + ..., \Lambda y + ...)$, *где* $|\Lambda| \neq 0, 1$.

В частности, росток F_λ отображения $F_\lambda(x,y) \mapsto \left(\frac{x}{1-x}, e^\lambda y\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ (являющийся единичным сдвигом вдоль векторного поля $x^2\frac{\partial}{\partial x} + \lambda y \frac{\partial}{\partial y}$), полугиперболический.

Как обычно, два отображения F и $\tilde{F}$ с различными областями определения U и $\tilde{U}$ будем называть *аналитически эквивалентными*, если существует голоморфная замена координат $H : \tilde{U} \to U$, сопрягающая $\tilde{F}$ с F:

$$F \circ H = H \circ \tilde{F}. \tag{1}$$

При этом эквивалентность будем называть *строгой*, если замена координат H из (1) имеет вид:

$$H(x,y) = \left(x + o\left(x^2\right), y + o\left(x\right)\right), \; x \to 0. \tag{2}$$

Замены координат такого вида будем называть *нормированными.* Два отображения называются строго *формально* эквивалентными, если существует обратимое формальное отображение H вида (2), для которого (1) верно как равенство формальных степенных рядов. Два ростка F и $\tilde{\mathsf{F}}$ будем называть строго аналитически (формально) эквивалентными, если существуют их строго аналитически (формально) эквивалентные представители F и $\tilde{F}$.

Пусть $\mathbf{F}_\lambda$ — класс ростков голоморфных отображений, строго формально эквивалентных ростку F_λ. В этой работе мы ограничимся исследованием строгой аналитической классификации ростков класса $\mathbf{F}_\lambda$. Росток F_λ будем называть *нормальной формой* класса $\mathbf{F}_\lambda$.

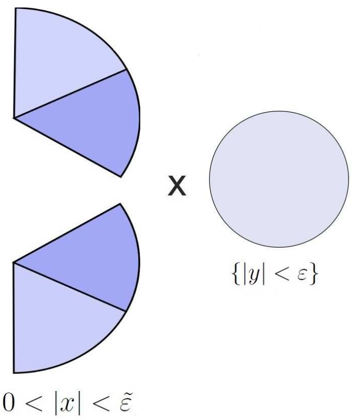

Рис. 1. Секториальные области.

Области $\Omega^\pm$ вида

$$\Omega^+ = \{0 < |x| < \tilde{\varepsilon}, \; \arg x \in \left(-\delta, \tfrac{\pi}{2}\right)\} \times \{|y| < \varepsilon\},$$
$$\Omega^- = \{0 < |x| < \tilde{\varepsilon}, \; \arg x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \delta\right)\} \times \{|y| < \varepsilon\}.$$

будем называть *верхней правой* или *нижней правой* секториальной областью.

Как было показано в работе [19], $\forall \mathsf{F} \in \mathbf{F}_\lambda$ существует единственная полуформальная нормированная нормализующая замена координат $\mathtt{H}$, сопрягающая нормальную форму F_λ с ростком F. Эта замена $\mathtt{H}$ является формальным рядом по переменной «x» с голоморфными по «y» коэффициентами.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1 (о секториальной нормализации в правой полуокрестности). *Пусть росток* F *класса* $\mathbf{F}_\lambda$, *тогда:*

1. *Существует секториальная область* $\Omega^\pm$ *такая что: существует и единственно голоморфное нормированное нормализующее отображение* $H^\pm$, *сопрягающее нормальную форму* F_λ *с представителем ростка* F *на* $\Omega^\pm$*;*
2. *Пусть* $\mathtt{H}$ *— полуформальная нормированная замена координат, нормализующая* F, *тогда* $\mathtt{H}$ *является асимптотическим рядом (при* $x \to 0$*) для голоморфного нормированного нормализующего отображения* $H^\pm$.

3. Доказательство теоремы о секториальной нормализации

3.1. Предварительная нормализация. Из теоремы о полуформальной нормализации [19] следует, что если $\mathtt{H}_N$ — частичная сумма нормализующего полуформального ряда $\mathtt{H}$, то $\mathtt{H}_N$ является голоморфной заменой координат и переводит росток F в росток F_N, такой, что:

$$F_N(x,y) = F_\lambda(x,y) + \left(O\left(x^N\right), O\left(x^N\right)\right) \text{ при } x \to 0. \tag{3}$$

Полученное таким образом отображение F_N будем называть *предварительной нормальной формой* (для ростка F).

Выберем произвольное $N > 6$ (выбор параметра N следует из дальнейших вычислений, см. леммы 5-7). Будем искать голоморфную замену координат H_N, сопрягающую нормальную форму F_λ с предварительной нормальной формой F_N:

$$F_N \circ H_N = H_N \circ F_\lambda.$$

Аналитическую нормализацию удобнее производить в координатах

$$(\xi, z) = B(x,y) = \left(\xi = -\frac{1}{x}, z = y\right).$$

В этих координатах предварительная нормальная форма F_N из (3) имеет вид

$$\begin{array}{l} \tilde{F}_N(\xi,z) = F_0(\xi,z) + (\Delta_{1N}, \Delta_{2N}) \\ \Delta_{1N} = O\left(\xi^{-N_1}\right), \Delta_{2N} = O\left(\xi^{-N_1}\right), \ |\xi| \to \infty \end{array}. \tag{4}$$

где $F_0 \overset{def}{=} B \circ F_\lambda \circ B^{-1}$, $F_0(\xi,z) = (\xi+1, e^\lambda z)$, $N_1 = N-2$ (см. [20]).

Полиномиальное по «x» преобразование $\mathtt{H}_N$, сопрягающее F_N с F, записанное в координатах (ξ, z), будем обозначать $\tilde{\mathtt{H}}_N$.

Пусть в новых координатах голоморфное преобразование

$$\tilde{H}_N \overset{def}{=} B \circ H_N \circ B^{-1},$$

сопрягающее нормальную форму F_0 с $\tilde{F}_N$ имеет вид:

$$\tilde{H}_N(\xi,z) = (\xi + h_N(\xi,z), z + g_N(\xi,z)).$$

Тогда функции $h_N(\xi,z)$ и $g_N(\xi,z)$ удовлетворяют паре функциональных уравнений:

$$\begin{array}{l} h_N \circ F_0 - h_N = \Delta_{1N} \circ \tilde{H}_N \\ g_N \circ F_0 - e^\lambda g_N = \Delta_{2N} \circ \tilde{H}_N \end{array}. \tag{5}$$

Считая h_N, g_N, Δ_{1N}, Δ_{2N} малыми, и пренебрегая членами порядка выше первого, из функциональных уравнений получим так называемые гомологические уравнения:

$$h \circ F_0 - h = \Delta_{1N}. \tag{6}$$

$$g \circ F_0 - e^{\lambda} g = \Delta_{2N}. \tag{7}$$

Доказательство теоремы о секториальной нормализации будет проводиться следующим образом:

Шаг 1. Построение (h, g) — пары решений гомологических уравнений в некоторых секториальных областях.

Шаг 2. Построение вспомогательных операторов: оператора решения гомологических уравнений $\mathcal{L} : (\Delta_{1N}, \Delta_{2N}) \to (h, g)$ и оператора подстановки $\mathcal{R} : (h, g) \to (\delta_{1N}, \delta_{2N}) = (\Delta_{1N}(\xi + h, z + g), \Delta_{2N}(\xi + h, z + g))$. Тем самым неподвижная точка (h_N, g_N) оператора $\mathcal{H} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ доставляет (единственное) решение $\tilde{H}_N = id + (h_N, g_N)$ функциональных уравнений:

$$\mathcal{H}[(h_N, g_N)] = (h_N, g_N).$$

Сжимаемость оператора $\mathcal{H}$ будет обеспечена выбором подходящих параметров секториальных областей и соответствующих им метрических пространств. Применение теоремы о сжимающих отображениях дает существование и единственность секториального нормализующего отображения для $\tilde{F}_N$, а также соответствующие оценки этого отображения.

Шаг 3. Композиция частичной суммы полуформальной нормализующей замены координат $\mathtt{H}_N$ и голоморфного нормализующего секториального отображения H_N доставляет секториальное нормализующее отображение H. Асимптотика (утверждение 2 теоремы) следует из единственности секториального нормированного нормализующего отображения и произвольности выбора N.

3.2. Решение гомологических уравнений.

Определение 2. *Решением гомологического уравнения в некоторой области W будем называть голоморфную функцию u, удовлетворяющую этому уравнению на W. Норму решения на W будем задавать стандартным способом*

$$\|u\|_W = \sup_W |u(\xi, z)|. \tag{8}$$

Определение 3. *Обозначим $\mathbf{D}_m(W)$ — класс функций d, голоморфных в W и непрерывных на $\overline{W}$ с конечной нормой*

$$\|d\|_{W,m} = \sup_W \left| d(\xi, z)(1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \right| < +\infty, \ m > 3. \tag{9}$$

Параметр m будем использовать для краткости записи. Его выбор будет уточнен при построении решений функциональных уравнений.

Определение 4. *Область $S_\xi = \{\mathrm{Re}\xi < -R < -1\}$ будем называть левой секториальной областью на ξ-плоскости. Область $S_\xi^{\pm}$, полученную как пересечение S_ξ и области $\{-\delta < \pm(\pi - \arg \xi) < \frac{\pi}{2}\}$, левой верхней (соответственно нижней) секториальной областью на плоскости ξ. Параметр раствора $\delta \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$ будет определен ниже в предложении 3.*

Определение 5. *Назовем левой (левой верхней или левой нижней) секториальной областью в (ξ, z)-плоскости прямое произведение S_ξ (соответственно, $S_\xi^{\pm}$) и диска $\{|z| < \varepsilon\}$. Обозначать эти области будем S и $S^{\pm}$ соответственно.*

Лемма 1 (о решении первого гомологического уравнения). *Пусть Δ_{1N} класса $\mathbf{D}_m(S)$, тогда существует голоморфное решение h первого гомологического уравнения в левой секториальной области S, такое что:*

1. $\|h\|_S \leqslant c_1\|\Delta_{1N}\|_{S,m}$ *где* $c_1 = c_1(m)$;
2. $h(\xi, z) = O(|\xi|^{-m+1})$ *при* $|\xi| \to \infty,\ (\xi, z) \in S$;
3. *решение первого гомологического уравнения в левой секториальной области единственно в классе голоморфных и ограниченных функций, для которых выполнено условие 2.*

Лемма 2 (о решении второго гомологического уравнения). *Пусть Δ_{2N} класса $\mathbf{D}_m(S)$, тогда существуют голоморфные решения второго гомологического уравнения $g^{\pm}$ в области S такие что:*

1. $\|g^{\pm}\|_S \leqslant c_2(m, \lambda)\|\Delta_{2N}\|_{S,m}$ *где* $c_2 = c_2(m, \lambda)$;
2. $g^{\pm}(\xi, z) = O(|\xi|^{-m+3})$ *при* $|\xi| \to +\infty, (\xi, z) \in S^{\pm}$;
3. *пусть параметр $\delta \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$ такой, что $tg\delta > \frac{\lambda}{2\pi}$, тогда решение второго гомологического уравнения в левой верхней (левой нижней) секториальной области единственно в классе голоморфных и ограниченных функций, для которых выполнено условие 2 соответственно в $S^{\pm}$.*

Доказательство леммы 1. Решение первого гомологического уравнения может быть представлено следующим образом:

$$h(\xi, z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Delta_{1N}\left(\xi - n, e^{-\lambda n}z\right). \tag{10}$$

Нетрудно проверить, что все функции в правой части корректно определены, ряд сходится равномерно на S, так что его сумма — голоморфная функция на S, поэтому функция h действительно удовлетворяет первому гомологическому уравнению на S.

Покажем единственность. Предположим, что h_1 и h_2 — решения первого гомологического уравнения в области S, для которых выполнено условие 2. Пусть $r = h_1 - h_2$ — разность этих решений. Тогда для r на всей области S выполнено:

$$r(\xi + 1, e^{\lambda}z) - r(\xi, z) = 0 \tag{11}$$

и r может быть продолжена на $\mathbb{C}^2$ следующим способом. Пусть (ξ, z) — точка $\mathbb{C}^2$ вне S. Тогда существуют такие $n_1 = [\mathrm{Re}\xi + R] + 1$ и $n_2 = [\log_{e^{\lambda}} \frac{1}{\varepsilon}] + 1$, что для $n = \max\{n_1; n_2\}$, точка $(\xi_0, z_0) = (\xi - n, e^{-\lambda n}z)$ попадает в область S, и мы можем определить значение функции r в точке (ξ, z) через значение в точке (ξ_0, z_0), а именно:

$$r(\xi, z) = r(\xi - n, e^{-\lambda n}z) = r(\xi_0, z_0)$$

Так как r голоморфна и ограничена на S и удовлетворяет (11), то ее продолжение на $\mathbb{C}^2$ голоморфно и ограничено на $\mathbb{C}^2$. Из теоремы Лиувилля [23] следует, что $r = const$. С учетом условия 2, $r \equiv 0$. $\square$

Доказательство леммы 2. Рассмотрим сужение второго гомологического уравнения на $S_0 \overset{def}{=} \{(\xi, z) \in S : z = 0\}$. Отметим, что из определения левой секториальной области следует, что $S_0 = S_{\xi}$. Положим

$$g_0(\xi) \overset{def}{=} g(\xi, 0), \qquad \Delta_0(\xi) \overset{def}{=} \Delta_{2N}(\xi, 0).$$

Тогда g_0 может быть найдена как решение уравнения:

$$g_0(\xi + 1) - e^{\lambda}g_0(\xi) = \Delta_0(\xi),\ \xi \in S_{\xi}. \tag{12}$$

Умножим уравнение (12) на $e^{-\lambda(\xi+1+R)}$ и положим

$$d(\xi) \overset{def}{=} e^{-\lambda(\xi+1+R)}\Delta_0(\xi). \tag{13}$$

Тогда уравнение (12) примет вид:

$$u(\xi+1)-u(\xi)=d(\xi),\ \xi\in S_\xi. \tag{14}$$

Решение такого простейшего функционального уравнения в области типа «криволинейная полоса» рассматривалось в работе [24]. Следуя доказанной в этой работе Теореме 1, зададим на S_ξ полосу Π ширины $3/2$ следующим образом: вертикальная прямая $L_+ \overset{def}{=} \partial S_\xi = \{\mathrm{Re}\xi = -R\}$ будет образовывать правую границу полосы, а вертикальная прямая $L_- = L_+ - 3/2$ — левую, причем $\partial\Pi = L_+ - L_-$.

Так как Δ_{2N} класса $\mathbf{D}_m(S)$, то функция d в правой части уравнения (14) принадлежит классу $\mathbf{D}_m(\Pi)$. Тогда из Теоремы 1 [24] следует истинность следующей леммы

Лемма 3 (Основная лемма)**.** *Функция*

$$u(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int\limits_{L_-}\frac{d(t)dt}{t-\xi-n}+\int\limits_{L_+}\frac{d(t)dt}{t-\xi+n+1}\right).$$

является решением уравнения (14) с правой частью d класса $\mathbf{D}_m(\Pi)$ на полосе Π, причем:

1. *Существует $c(m)$ такое, что $\|u\|_\Pi \leqslant c(m)\|d\|_{\Pi,m}$;*
2. *Пусть $M_0^R = \frac{1}{2}\int\limits_{L_-} d(t)dt$, тогда:*

$$\sup_\Pi|u(\xi)\mp M_0^R| \leqslant \frac{C(m)\|d\|_{\Pi,m}}{|\xi|^{m-3}},\ \xi\in\Pi,\ \pm\mathrm{Im}\xi > |\mathrm{Re}\xi|;$$

3. *Решение уравнения (14) единственно в классе голоморфных и ограниченных функций, удовлетворяющих условию 2 в полосе Π.*

Положим $M_0(a) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathrm{Re}t=a}\Delta_0(t)e^{-\lambda(t+1)}dt$. Отметим, что при $a=-R-\frac{3}{2}$, $M_0 = M_0^R e^{\lambda R}$.

Предложение 1. *Значение M_0 не зависит от выбора $a<-R$.*

Доказательство. Утверждение стандартным образом выводится из теоремы Коши, поскольку условие $\Delta_{2N}\in\mathbf{D}_m(S)$ гарантирует выполнение равномерных оценок на подынтегральную функцию при $\mathrm{Im}\xi\to\infty$, $\xi\in S$. □

Пусть u — решение уравнения (14) с правой частью $d\in\mathbf{D}_m(\Pi)$, определенной в (13), из основной леммы 3.

Положим

$$g_0(\xi) \overset{def}{=} u(\xi)e^{\lambda(\xi+R)},\ \xi\in\Pi. \tag{15}$$

и продолжим g_0 с полосы Π на полуплоскость $\tilde{S}_l$ исходя из (12) по формуле:

$$g_0(\xi) \overset{def}{=} e^{-\lambda k}g_0(\xi+k)-\sum_{n=0}^{k-1}e^{-\lambda(n+1)}\Delta_0(\xi+n),\ k=[-R-\mathrm{Re}\xi],\ \xi\in S_\xi\backslash\Pi. \tag{16}$$

Предложение 2. *Функция g_0, определяемая формулами (15) и (16), является голоморфным и ограниченным решением уравнения (12) на S_ξ, причем:*

1. *Найдется $c=c(m,\lambda)$ такое что: $\|g_0\|_{\tilde{S}_l}\leqslant\|\Delta_0\|_{S_\xi,m}$;*
2. $|g_0(\xi)\mp M_0e^{\lambda\xi}| = O(|\xi|^{-m+3}),\ \xi\in\tilde{S}_l^\pm,\ |\xi|\to\infty.$

Замечание 1. *Так как M_0, вообще говоря, отлично от нуля, то оценка из утверждения 2 предложения 2 не распространяется на $S_\xi = S_\xi^+\cup S_\xi^-$.*

Доказательство предложения 2. Так как полоса Π ширины больше 1, то для любой точки ξ слева от полосы точка $(\xi+k),\ k=[-R-\mathrm{Re}\xi]$ попадает в полосу Π, поэтому решение g_0, определенное по формуле (16), корректно определено на S_ξ при этом:

— Функция g_0 удовлетворяет уравнению (12) (проверяется прямыми выкладками).

— Функция g_0 является голоморфной как конечная сумма голоморфных функций на каждой полосе $\{\xi:\ \mathrm{Re}\xi\in(-A-1;-A), A\in\mathbb{N}\}$. Заметим, что так как функция g_0, определяемая формулами (15) и (16), удовлетворяет уравнению (12), то все точки прямой $\{\xi\in S_\xi:\mathrm{Re}\xi\in\mathbb{Z}_-\}$ является устранимыми, следовательно, g_0 голоморфна на S_ξ.

— Из леммы 3 следует оценка g_0 на полосе Π:

$$\|g_0\|_\Pi=\left\|u(\xi)e^{\lambda(\xi+R)}\right\|_\Pi\leqslant c(m)\|\Delta_0(\xi)e^{-\lambda(\xi+R+1)}\|_{\Pi,m}\leqslant c(m)\|\Delta_0\|_{\Pi,m}.$$

Оценим норму g_0, продолженного на $S_\xi\backslash\Pi$ (напомним, что $\lambda\in\mathbb{R}_+$, то есть $e^{-\lambda}<1$):

$$\begin{aligned}&\|g_0\|_{S_\xi\backslash\Pi}\leqslant e^{-\lambda(k+1)}\|g_0\|_\Pi+\tfrac{e^{-\lambda}-e^{-\lambda(k+1)}}{1-e^{-\lambda}}\|\Delta_0\|_{S_\xi,m}\leqslant c(m)\|\Delta_0\|_{\Pi,m}+\\&+\tfrac{1}{e^\lambda-1}\|\Delta_0\|_{S_\xi,m}\leqslant\left(c(m)+\tfrac{1}{e^\lambda-1}\right)\|\Delta_0\|_{S_\xi,m}=c(m,\lambda)\|\Delta_0\|_{S_\xi,m}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\|g_0\|_{S_\xi}\leqslant c(m,\lambda)\|\Delta_0\|_{S_\xi,m}.$$

Это доказывает первое утверждение предложения.

— Утверждение 2 леммы 3 доставляет асимптотическую оценку решения в полосе Π (напомним, что $g_0(\xi)=u(\xi)e^{\lambda(\xi+R)}$, $\Delta_0(\xi)=d(\xi)e^{\lambda(\xi+R+1)}$ и $M_0e^{\lambda\xi}=M_0^Re^{\lambda(\xi+R)}$):

$$|g_0(\xi)\mp M_0e^{\lambda\xi}|\leqslant\frac{C(m)\|\Delta_0\|_{\Pi,m}}{|\xi|^{m-3}},\ \pm\mathrm{Im}\xi>|\mathrm{Re}\xi|,\ \xi\in\Pi. \tag{17}$$

Продолжим функцию g_0 с полосы Π на S_ξ по формуле (16) (сохранив для продолженной функции то же обозначение). Тогда для любой точки ξ из области S_ξ: если $|\mathrm{Im}\xi|>|\mathrm{Re}\xi|$, то выполнено:

$$\begin{aligned}&\left|g_0(\xi)\mp M_0e^{\lambda\xi}\right|=\left|e^{-\lambda k}g_0(\xi+k)\mp M_0e^{\lambda(\xi+k)}e^{-\lambda k}-\sum_{n=0}^{k-1}e^{-\lambda(n+1)}\Delta_0(\xi+n)\right|\leqslant\\&\leqslant\left|e^{-\lambda k}\left(g_0(\xi+k)\mp M_0e^{\lambda(\xi+k)}\right)\right|+\left|\sum_{n=0}^{k-1}e^{-\lambda(n+1)}\Delta_0(\xi+n)\right|\end{aligned}.$$

Так как точка $\xi+k$ попадает в полосу Π, то для первого слагаемого выполнено неравенство (17). Оценивая второе слагаемое, в результате получим:

$$\left|g_0(\xi)\mp M_0e^{\lambda\xi}\right|\leqslant\frac{C(m)\|\Delta_0\|_{\Pi,m}}{|\xi+k|^{m-3}e^{\lambda k}}+\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\|\Delta_0\|_{S_\xi,m}}{|\mathrm{Im}\xi|^me^{\lambda n}},\ \pm\mathrm{Im}\xi>|\mathrm{Re}\xi|,\ \xi\in S_\xi.$$

Заметим, что в этом рассматриваемом нами случае достаточно большой по модулю мнимой части ξ выполнено: $|\xi+k|>|\mathrm{Im}\xi|>|\xi|/2$. Отсюда

$$|g_0(\xi)\mp M_0e^{\lambda\xi}|\leqslant\frac{\hat{C}(m,\lambda)\|\Delta_0\|_{S_\xi,m}}{|\xi|^{m-3}},\ \pm\mathrm{Im}\xi>|\mathrm{Re}\xi|,\ \xi\in S_\xi. \tag{18}$$

Если же ξ лежит внутри сектора $|\mathrm{Im}\xi|\leqslant tg\delta|\mathrm{Re}\xi|$, $\mathrm{Re}\xi<-R$, то достаточно показать асимптотику вида $O(|\mathrm{Re}\xi|^{-m+3})$, так как при $|\mathrm{Im}\xi|\leqslant tg\delta|\mathrm{Re}\xi|$, $|\xi|\leqslant(1+tg\delta)|\mathrm{Re}\xi|$, то есть $|\mathrm{Re}\xi|\geq\frac{|\xi|}{1+tg\delta}$.

Построим решение g_0 уравнения (12) в S_ξ по описанной выше схеме: пусть $\xi\in S_\xi$, тогда существует натуральное число $k=[-\mathrm{Re}\xi-R]$ такое, что $\xi+k$ попадает в полосу Π. При этом, так как $\xi + k$ лежит в полосе Π, то $e^{-\lambda(\xi+k)}$ (очевидно) и $g_0(\xi+k)$ (по лемме 3) ограничены, отсюда:

$$|g_0(\xi) \mp M_0 e^{\lambda\xi}| = \left| e^{-\lambda k}\left(g_0(\xi+k) \mp M_0 e^{\lambda(\xi+k)}\right) - \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\lambda(n+1)}\Delta_0(\xi+n)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c\|\Delta_0\|_{\Pi,m}}{e^{\lambda k}} + \sum_{n=0}^{k-1}\frac{2^m\|\Delta_0\|_{S_\xi,m}e^{-\lambda(n+1)}}{(1+|\mathrm{Re}\xi+n|)^m} \leqslant \frac{c\|\Delta_0\|_{\Pi,m}e^{\lambda R}}{e^{\lambda|\mathrm{Re}\xi|}} + \sum_{n=0}^{k-1}\frac{2^m\|\Delta_0\|_{S_\xi,m}e^{-\lambda(n+1)}}{(1+|\mathrm{Re}\xi+n|)^m}.$$

Производная $\frac{\partial}{\partial n}\left(e^{-\lambda(n+1)}(1+|\mathrm{Re}\xi|-n|)^{-m}\right) = 0$ при $n_0 = \frac{-m}{\lambda} + 1 + |\mathrm{Re}\xi|$; при достаточно больших значениях $|\mathrm{Re}\xi|$ значение $n_0 \in \mathbb{R}_+$; $k \leqslant |\mathrm{Re}\xi|$, поэтому:

$$\sum_{n=0}^{k-1} e^{-\lambda(n+1)}(1+|\mathrm{Re}\xi+n|)^{-m} = \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\lambda(n+1)}(1+|\mathrm{Re}\xi|-n)^{-m} \leqslant$$
$$\leqslant |\mathrm{Re}\xi|\cdot(\lambda/m)^m e^{m-2\lambda}e^{-|\mathrm{Re}\xi|}$$

тогда для некоторой константы $\tilde{C}(m,\lambda,\delta)$ выполнено:

$$|g_0(\xi) \mp M_0 e^{\lambda\xi}| \leqslant \frac{\tilde{C}(m,\lambda,\delta)\|\Delta_0\|_{S_\xi,m}}{|\xi|^m},\ |\mathrm{Im}\xi| < tg\delta|\mathrm{Re}\xi|,\ \xi \in S_\xi. \tag{19}$$

из неравенств (18), (19) и ограничения $\delta \in (\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$ следует второе утверждение предложения 2. □

Предложение 3. *Для любого $\delta \in (\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$ такого что $tg\delta > \frac{\lambda}{2\pi}$ голоморфное и ограниченное на S_ξ решение уравнения (12), удовлетворяющее утверждению 2 предложения 2, единственно.*

Доказательство. Пусть $g_1^\pm$ и $g_2^\pm$ являются голоморфными и ограниченными решениями уравнения:

$$g_0(\xi+1) - e^\lambda g_0(\xi) = \Delta_0(\xi),\ \xi \in S_\xi$$

и удовлетворяют утверждению 2 предложения 2 на $S_\xi^\pm$. Положим

$$g^\pm(\xi) \stackrel{def}{=} g_1^\pm(\xi) - g_2^\pm(\xi).$$

Тогда

$$g^\pm(\xi+1) - e^\lambda g^\pm(\xi) = 0,\ \xi \in S_\xi^\pm.$$

Обозначим $u^\pm(\xi) \stackrel{def}{=} g^\pm(\xi)e^{-\lambda\xi}$. Тогда функция $u^\pm$ является голоморфной на S_ξ, а так же 1-периодической.

Рассмотрим область S_ξ^+.

Для любого ξ из S_ξ^+ существует натуральное n такое, что $\tilde{\xi} = \xi + n$ попадает в «ломаную» полосу

$$\Pi^+ = \begin{cases} -R-1 \leqslant \mathrm{Re}\xi \leqslant -R, \text{ если } \mathrm{Im}\xi > -Rtg\delta \\ ctg\delta\mathrm{Im}\xi - 1 \leqslant \mathrm{Re}\xi \leqslant ctg\delta\mathrm{Im}\xi, \text{ если } \mathrm{Im}\xi \leqslant -Rtg\delta \end{cases}$$

В силу 1-периодичности, $u^+(\tilde{\xi}) = u^+(\xi)$. Покажем ограниченность функции u^+ на полосе Π^+. Положим

$$J : \xi \mapsto t = e^{2\pi i\xi}. \tag{20}$$

Заметим, что:

$$J(\Pi^+ \cap \{\mathrm{Im}\xi > -Rtg\delta\}) = \{0 < |t| < e^{2\pi R}\}$$
$$J(\Pi^+ \cap \{\mathrm{Im}\xi \leqslant -Rtg\delta\}) = \{|t| \geq e^{2\pi R}\}.$$

Функция u^+ в координатах (20) имеет вид:

$$\tilde{u}^+(t) \stackrel{def}{=} J^{-1} \circ u^+ \circ J = t^{\frac{-\lambda}{2\pi i}} g^+\left(\frac{1}{2\pi i}\ln t\right).$$

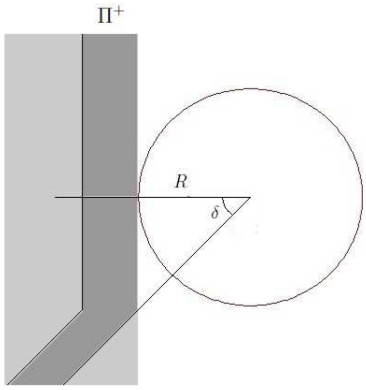

Рис. 2. Полоса Π^+.

В силу 1-периодичности функции u^+, функция $\tilde{u}^+$ определена корректно и голоморфна на $\mathbb{C}_* = J(S_\xi)$. Кроме того:

$$|t| = |e^{2\pi i\xi}| = e^{-2\pi \mathrm{Im}\xi}.$$

В образе $\left\{0 < |t| < e^{2\pi R}\right\}$ верхней части полосы выполнено:

$$\left|t^{\frac{-\lambda}{2\pi i}}\right| = e^{-\lambda \mathrm{Re}\xi} = e^{-\lambda \mathrm{Re}\tilde{\xi}} \leqslant e^{\lambda(R+1)}.$$

$$|\tilde{u}^+(t)| \leqslant \left|g^+\left(\frac{1}{2\pi i}\ln t\right)\right| e^{\lambda(R+1)} \leqslant Const \text{ при } \left\{0 < |t| < e^{2\pi R}\right\}. \tag{21}$$

Тогда в образе нижней части полосы (то есть $\left\{|t| \geq e^{2\pi R}\right\}$) выполнено:

$$|t^{\frac{-\lambda}{2\pi i}}| = e^{-\lambda \mathrm{Re}\xi} = e^{-\lambda \mathrm{Re}\tilde{\xi}} \leqslant e^{-\frac{\lambda \mathrm{Im}\tilde{\xi}}{tg\delta}} e^{\lambda} = e^{-\frac{\lambda \mathrm{Im}\xi}{tg\delta}} e^{\lambda} = e^{\lambda}|t|^{\frac{\lambda}{2\pi tg\delta}}.$$

$$|\tilde{u}^+(t)| \leqslant |t|^{\frac{\lambda}{2\pi tg\delta}} \left|g^+\left(\frac{1}{2\pi i}\ln t\right)\right| \leqslant Const|t|^{\frac{\lambda}{2\pi tg\delta}} \text{ при } \{|t| \geq e^{2\pi R}\}.$$

Так как $tg\delta > \frac{\lambda}{2\pi}$, то из оценок Коши для коэффициентов ряда Тейлора [23] следует, что $t = \infty$ является устранимой особой точкой функции $\tilde{u}^+$, так что $\tilde{u}^+$ ограничена при $\{|t| \geq e^{2\pi R}\}$. А, с учетом (21), $\tilde{u}^+$ ограничена на $\mathbb{C}_*$.

Так как $\tilde{u}^+$ голоморфна на $\mathbb{C}_*$, то из теоремы Римана об устранимой особенности [23] следует, что $\tilde{u}^+$ голоморфна (и ограничена) на $\mathbb{C}$. Из теоремы Лиувилля следует, что $\tilde{u}^+ = const$.

Тогда $g^+(\xi) = const \cdot e^{\lambda\xi}$; в силу асимптотических свойств функций g^+ (утверждение 2 предложения 2), так как лучи $\{\xi :\ \mathrm{Re}\xi = const \leqslant -R,\ \mathrm{Im}\xi \geq 0\}$ принадлежат области S_ξ^+, то $g^+ \equiv 0$.

Аналогично рассмотрим область $S_\xi^- = \{\mathrm{Re}\xi \leqslant -R,\ \mathrm{Im}\xi \leqslant -tg\delta\mathrm{Re}\xi\}$.

Для любого $\xi \in S_\xi^-$ существует натуральное n такое, что $\tilde{\xi} = \xi + n$ попадает в «ломаную» полосу Π^-:

$$\Pi^- = \begin{cases} -R-1 \leqslant \mathrm{Re}\xi \leqslant -R, \text{ если } \mathrm{Im}\xi < Rtg\delta \\ -ctg\delta\mathrm{Im}\xi - 1 \leqslant \mathrm{Re}\xi \leqslant -ctg\delta\mathrm{Im}\xi, \text{ если } \mathrm{Im}\xi \geq Rtg\delta \end{cases}$$

Подействуем отображением (20) ($J : \xi \mapsto (t = e^{2\pi i\xi})$):

$$J(\Pi^- \cap \{\mathrm{Im}\xi < Rtg\delta\}) = \{|t| > e^{-Rtg\delta}\},$$
$$J(\Pi^- \cap \{\mathrm{Im}\xi \geq Rtg\delta\}) = \{0 < |t| \leqslant e^{-Rtg\delta}\},$$

$$\tilde{u}^-(t) \stackrel{def}{=} J^{-1} \circ u^+ \circ J = t^{\frac{-\lambda}{2\pi i}} g^-\left(\frac{1}{2\pi i}\ln t\right).$$

Аналогично предыдущим рассуждениям, в силу 1-периодичности функции u^-, функция $\tilde{u}^-$ определена корректно и голоморфна на $\mathbb{C}_*$. Кроме того, в силу ограниченности g^-:

$$|\tilde{u}^-(t)| \leqslant Const \cdot \begin{cases} e^{\lambda(R+1)}, \text{ если } |t| > e^{-Rtg\delta} \\ e^{\lambda}|t|^{\frac{-\lambda}{2\pi tg\delta}}, \text{ если } 0 < |t| \leqslant e^{-Rtg\delta} \end{cases}$$

Из оценок Коши для коэффициентов ряда Лорана [23] следует, что $t = 0$ является устранимой особой точкой $\tilde{u}^-$, поэтому $\tilde{u}^-$ продолжаема до голоморфной и ограниченной на $\mathbb{C}$ функции. Поэтому $\tilde{u}^- = const$ на $\mathbb{C}$. Отсюда, как и в случае выше, $g^- \equiv 0$. □

Положим $g_0^{\pm}(\xi) \stackrel{def}{=} g_0(\xi) \mp M_0 e^{\lambda\xi}$. Мы построили решение редуцированного второго гомологического уравнения (12) на области S_ξ. Вычтем теперь из второго гомологического уравнения уравнение (12). Получим уравнение

$$r(\xi+1, e^{\lambda}z) - e^{\lambda}r(\xi, z) = \rho_N(\xi, z), \ (\xi, z) \in S, \tag{22}$$

где

$$\rho_N(\xi, z) \stackrel{def}{=} \Delta_{2N}(\xi, z) - \Delta_0(\xi), \ r(\xi, z) \stackrel{def}{=} g(\xi, z) - g_0(\xi).$$

Из леммы Шварца [23] следует, что $\rho_N(\xi, z) = z\tilde{\Delta}_N(\xi, z)$, где $\tilde{\Delta}_N$ класса $\mathbf{D}_m(S)$. Решение уравнения (22) в левой секториальной области S будем искать в виде $r(\xi, z) = z\tilde{g}(\xi, z)$, где $\tilde{g}(\xi, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{g}\left(\xi+1, e^{\lambda}z\right) - \tilde{g}(\xi, z) = e^{-\lambda}\tilde{\Delta}_N(\xi, z), \ (\xi, z) \in S. \tag{23}$$

Так как функция $e^{-\lambda}\tilde{\Delta}_N$ класса $\mathbf{D}_m(S)$, то справедливо следующее предложение (оно является переформулировкой леммы 1):

Предложение 4. *Функция* $\tilde{g}(\xi, z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda}\tilde{\Delta}_N\left(\xi - n, e^{-\lambda n}z\right)$ *является решением уравнения (23) причем* $\tilde{g}$ *голоморфна в* S *и выполнено:*

1. *Для некоторой константы* $c = c(m)$ *верно:* $\|\tilde{g}\|_S \leqslant c\|\tilde{\Delta}_N\|_{S,m}$*;*
2. $\tilde{g}(\xi, z) = O(|\xi|^{-m+1})$ *при* $|\xi| \to \infty$, $(\xi, z) \in S$*;*
3. *Решение уравнения (23) единственно в* S *в классе голоморфных и ограниченных функций, для которых выполнено условие 2.*

Предложения 2–4 доставляют требуемое решение второго гомологического уравнения в области S вида

$$g^{\pm}(\xi, z) = g_0^{\pm}(\xi) + z\tilde{g}(\xi, z), \ (\xi, z) \in S,$$

где $g_0^{\pm}$ из предложений 2-3, $\tilde{g}$ — из предложения 4.

Отметим, что, так как для любых пар (ξ, z) из S выполнено $\mathrm{Re}\xi < -R$, поэтому найдется такая $C(\lambda)$, что:

$$\|M_0 e^{\lambda\xi}\|_S = \sup_S \left| \tfrac{1}{2}\int_L \Delta_0(t) e^{-\lambda(t-\xi)} dt \right| \leqslant C(\lambda)\|\Delta_0\|_{S,m},$$

где $L = \{\mathrm{Re}t = -R - 3/2\}$. Тем самым доказана лемма 2 (ее другие оценки следуют из соответствующих оценок предложений 2-4). □

3.3. Решение функциональных уравнений. Данный раздел посвящен второму шагу доказательства теоремы о секториальной нормализации. Здесь будут построены вспомогательные операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$, а так же доказана сжимаемость оператора $\mathcal{H} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ при подходящем выборе параметров секториальных областей.

Для вектор-функции $d = (d_1, d_2)$, голоморфной на левой секториальной области S, положим

$$\|d\|_{S,m} \stackrel{def}{=} \|d_1\|_{S,m} + \|d_2\|_{S,m}. \tag{24}$$

Обозначим $\mathbf{B}_m(S)$ — нормированное пространство, состоящее из всех вектор-функций $d = (d_1, d_2)$, голоморфных на S с конечной нормой $\|d\|_{S,m} < \infty$, определяемой (24).

Для вектор-функции $f = (h, g)$, голоморфной на левой секториальной области S, положим

$$\|f\|_S \stackrel{def}{=} \|h\|_S + \|g\|_S. \tag{25}$$

Обозначим $\mathbf{A}(S)$ — пространство вектор-функций $f = (h, g)$ голоморфных на S с нормой (25).

Отметим, что пространства $\mathbf{B}_m(S)$ и $\mathbf{A}(S)$ — банаховы.

Оператор решения гомологических уравнений $\mathcal{L}^{\pm}$. Обозначим $\mathcal{L}^{\pm}$ оператор, разрешающий гомологические уравнения (6) и (7) с правой частью d класса $\mathbf{B}_m(S)$ (сопоставляющий вектор-функции d класса $\mathbf{B}_m(S)$ вектор-функцию $f^{\pm}$ класса $\mathbf{A}(S)$):

$$f^{\pm} = \mathcal{L}^{\pm}[d]$$

и действующий согласно леммам 1 и 2. Тогда следующая лемма следует непосредственно из лемм 1 и 2:

Лемма 4. *Для любого $m \in (3; N-2)$ оператор $\mathcal{L}^{\pm}$ является корректно определенным оператором, действующим из $\mathbf{B}_m(S)$ в $\mathbf{A}(S)$, причем для некоторой $\mathfrak{C}(m, \lambda)$ верно:*

$$\forall d \in \mathbf{B}_m(S): \ \|\mathcal{L}^{\pm}[d]\|_S \leqslant \mathfrak{C}(m, \lambda)\|d\|_{S,m}.$$

Оператор подстановки $\mathcal{R}$ Пусть $\delta \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$ такое, что $tg\delta > \frac{\lambda}{2\pi}$. Пусть здесь и всюду далее вектор-функция $\Delta_N = (\Delta_{1N}, \Delta_{2N})$ — фиксированная вектор-функция.

Выберем параметры $R_0 > 1$, $\varepsilon_0 > 0$ и построим $S_{R_0\varepsilon_0}$ так, что Δ_N голоморфна на $S_{R_0\varepsilon_0}$. Тогда из асимптотики (4) следует, что Δ_N класса $\mathbf{B}_{N-2}(S_{R_0\varepsilon_0})$.

Выберем положительное число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0/2$ и $R_1 > \max\{R_0 + 1; 1/\varepsilon_0\}$, тогда для любого $\xi \in \{\mathrm{Re}\xi \leqslant -R_1\}$ прямое произведение единичного диска с центром в точке ξ на круг $|z| < \varepsilon_0$ целиком содержится в $S_{R_0\varepsilon_0}$. Выберем некоторое $R > R_1$, $\varepsilon < \varepsilon_1$ и построим секториальную область $S_{R\varepsilon}$.

Пусть $\omega = \min\{1/2; \varepsilon_0/2\}$. Обозначим

$$\mathbf{M}_\omega(S_{R\varepsilon}) = \{f \in \mathbf{A}(S_{R\varepsilon}): \ \|f\|_{S_{R\varepsilon}} \leqslant \omega\}$$

шар радиуса ω (с центром в нуле) в метрическом пространстве $\mathbf{A}(S_{R\varepsilon})$ с метрикой, определяемой нормой (25).

Обозначим $\mathcal{R}$ оператор, действующий по правилу $\mathcal{R}[(h, g)] = (d_1, d_2)$, где

$$d_1(\xi, z) = \Delta_{1N}(\xi + h(\xi, z), z + g(\xi, z)), \ d_2(\xi, z) = \Delta_{2N}(\xi + h(\xi, z), z + g(\xi, z)).$$

Лемма 5. $\forall m \in (3; N-2)$ *оператор $\mathcal{R}$ является корректно определенным оператором, действующим из $\mathbf{M}_\omega(S_{R\varepsilon})$ в $\mathbf{B}_m(S_{R\varepsilon})$ таким, что:*

1. $\|\mathcal{R}[f]\|_{S_{R\varepsilon},m} \leqslant c_1, \ \forall f \in \mathbf{M}_\omega(S_{R\varepsilon})$, *для некоторой $c_1 = c_1(m, R, \varepsilon_0)$;*
2. *оператор $\mathcal{R}^{\pm}$ — липшицев с постоянной $c_2 = c_2(m, R, \varepsilon_0)$.*

Доказательство. Подробное доказательство этой леммы смотри в работе [20].

□

Предложение 5. *Для любого $m \in (3; N-3)$, для некоторого $c = c(N)$ выполнено:*

$$\mathfrak{c}(R, m) = \max\{c_1, c_2\} \leqslant cR^{-N+3+m}\|\Delta_N\|_{S_{R_0\varepsilon_0},(N-2)}$$

Доказательство. Утверждение следует из оценки m-нормы оператора $\mathcal{R}$ через $(N-2)$-норму. □

Сжимаемость композиции операторов $\mathcal{H}^{\pm} \overset{def}{=} \mathcal{L}^{\pm} \circ \mathcal{R}$. Сначала уточним выбор параметров секториальных областей.

Выберем некоторые $\varepsilon_0 > 0$, $R_0 > 1$, $3 < m < N-3$; построим $S_{R_0\varepsilon_0}$; по ним вычислим $\|\Delta_N\|_{S_{R_0\varepsilon_0},(N-2)}$ и $\mathfrak{C}(m,\lambda)$ (из леммы 4). Положим

$$\omega = \min\{1/2; \varepsilon_0/2\}, \ 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0/2.$$

Пусть $c(N)$ из предложения 5, обозначим

$$R_1 = \max\left\{R_0 + 1; 1/\varepsilon_0; \left(c(N)\omega^{-1}\mathfrak{C}(m,\lambda)\|\Delta_N\|_{S_{R_0\varepsilon_0},(N-2)}\right)^{\frac{1}{N-m-3}}\right\}.$$

Выберем, наконец, $R \geq R_1$ и положительное $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. Построим $\mathbf{A}(S_{R\varepsilon})$, $\mathbf{B}_m(S_{R\varepsilon})$ и $\mathbf{M}_\omega(S_{R\varepsilon})$.

Лемма 6. *Оператор $\mathcal{H}^{\pm}$ при указанном выше выборе параметров действует из $\mathbf{M}_\omega(S_{R\varepsilon})$ в $\mathbf{M}_\omega(S_{R\varepsilon})$ и является сжимающим.*

Доказательство. Из леммы 5 следует, что оператор $\mathcal{R}$ действует из $\mathbf{M}_\omega(S_{R\varepsilon})$ в $\mathbf{B}_m(S_{R\varepsilon})$ с константой c_1 (утверждение 1) и липшицев с константой c_2 (утверждение 2), также выполенено утверждение предложения 5.

Из леммы 4 следует, что линейный оператор $\mathcal{L}^{\pm}$, разрешающий гомологические уравнения, действует из $\mathbf{B}_m(S_{R\varepsilon})$ в $\mathbf{A}(S_{R\varepsilon})$ и ограничен с константой $\mathfrak{C}(m,\lambda)$.

Тогда: так как для любого f из $\mathbf{M}_\omega(S_{R\varepsilon})$, значение оператора $\mathcal{R}[f]$ лежит в $\mathbf{B}_m(S_{R\varepsilon})$, то для оператора $\mathcal{H}^{\pm}$ выполнено:

$$\forall f \in \mathbf{M}_\omega(S_{R\varepsilon}): \ \|\mathcal{H}^{\pm}[f]\|_{S_{R\varepsilon}} \leqslant \|\mathcal{L}^{\pm}\|_{S_{R\varepsilon}} \cdot \|\mathcal{R}[f]\|_{S_{R\varepsilon},m} \leqslant \mathfrak{C}(m,\lambda)\mathfrak{c}(R,m). \tag{26}$$

В силу линейности оператора $\mathcal{L}^{\pm}$ также выполнено:

$$\forall f_{1,2} \in \mathbf{M}_\omega(S_{R\varepsilon}): \ \|\mathcal{H}^{\pm}[f_1] - \mathcal{H}^{\pm}[f_2]\|_{S_{R\varepsilon}} = \\ = \|\mathcal{L}^{\pm}(\mathcal{R}[f_1] - \mathcal{R}[f_2])\|_{S_{R\varepsilon}} \leqslant \mathfrak{C}(m,\lambda)\mathfrak{c}(R,m)\|f_1 - f_2\|_{S_{R\varepsilon}}. \tag{27}$$

В силу выбора R из предложения 5 выполнено соотношение:

$$\mathfrak{c}(R,m)\mathfrak{C}(m,\lambda) \leqslant \omega \leqslant 1/2. \tag{28}$$

Из (26) и (28) следует корректность оператора $\mathcal{H}^{\pm}$, из (27) и (28) — сжимаемость. Лемма доказана. □

Построим области $S^{\pm}_{R\varepsilon}$. Напомним, что $\delta \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $tg\delta > \frac{\lambda}{2\pi}$.

Напомним, что Δ_N — функция из правой части функциональных уравнений (5). Выбор класса $\mathbf{B}_{N-2}$ с параметром $N-2$ обусловлен асимптотикой (4).

Лемма 7. *На секториальной области $S_{R\varepsilon}$:*

1. *Существует голоморфное и ограниченное отображение $\tilde{H}^{\pm}_N$, сопрягающее F_0 с $\tilde{F}_N$ вида:*
$$\tilde{H}^{\pm}_N(\xi,z) = (\xi + h_N(\xi,z), z + g^{\pm}_N(\xi,z))$$
2. *$\tilde{H}^{\pm}_N(\xi,z) = (\xi + o(|\xi|^{-N+6}), z + o(|\xi|^{-N+6}))$ при $|\xi| \to \infty$, $(\xi,z) \in S^{\pm}_{R\varepsilon}$;*
3. *Нормализующее отображение, сопрягающее F_0 с $\tilde{F}_N$ в секториальной области $S^{\pm}_{R\varepsilon}$, единственно в классе голоморфных и ограниченных функций, для которых выполнено утверждение 2.*

Доказательство. Пространство $\mathbf{A}(S_{R\varepsilon})$ с нормой (25) является банаховым, поэтому пространство $\mathbf{M}_\omega(S_{R\varepsilon})$ с индуцированной метрикой — полно. Так как по лемме 6 оператор $\mathcal{H}^{\pm}$ действует из $\mathbf{M}_\omega(S_{R\varepsilon})$ в $\mathbf{M}_\omega(S_{R\varepsilon})$ и является сжимающим, то по теореме о сжимающих отображениях в области $S_{R\varepsilon}$:

$$\exists! \left(h^{\pm}_N, g^{\pm}_N\right): \ \left(h^{\pm}_N, g^{\pm}_N\right) = \mathcal{H}^{\pm}\left(h^{\pm}_N, g^{\pm}_N\right). \tag{29}$$

Отсюда следует, что существует и единственно отображение $\tilde{H}_N^{\pm}(\xi,z) = (\xi + h^{\pm}(\xi,z), z + g_N^{\pm}(\xi,z))$, удовлетворяющее паре функциональных уравнений (5) (т.е. сопрягающее F_0 с $\tilde{F}_N$). Так как $(h_N^{\pm}, g_N^{\pm}) \in \mathbf{M}_\omega(S_{R\varepsilon})$, то $\tilde{H}_N$ голоморфно в $S_{R\varepsilon}$. Первое утверждение доказано (равенство отображений $h_N^+ = h_N^-$ на пересечении $S_{R\varepsilon}^+$ и $S_{R\varepsilon}^-$ может быть показано в точности так же, как утверждение предложения 3.

Так как из леммы 5 следует, что оператор $\mathcal{R}$ действует из $\mathbf{M}_\omega(S_{R\varepsilon})$ в $\mathbf{B}_m(S_{R\varepsilon})$, то из лемм 1 и 2 следует утверждение 2.

Утверждение 3 также может быть показано аналогично утверждению предложения 3. □

3.4. Доказательство теоремы о секториальной нормализации в правой полуокрестности.

Все рассуждения раздела проводятся в предположении выбора параметров для доказательства леммы 7.

Существование решения Лемма 7 доставляет голоморфную нормализующую замену координат $\tilde{H}_N^{\pm}$, сопрягающую нормальную форму F_0 с предварительной нормальной формой $\tilde{F}_N$ на секториальной области $S_{R\varepsilon}$. Тогда $\tilde{H}_N^{\pm} \circ \tilde{\mathtt{H}}_N$ является голоморфным отображением, сопрягающим F_0 с отображением $\tilde{F}$ в $S_{R\varepsilon}$.

Нормированность. Из построения следует, что отображение $\tilde{H}_N^{\pm} \circ \tilde{\mathtt{H}}_N$ является нормированным на $S_{R\varepsilon}^{\pm}$.

Отметим, что из нормированности отображения $\tilde{H}_N^{\pm} \circ \tilde{\mathtt{H}}_N$ в секториальных областях $S_{R\varepsilon}^{\pm}$ следует их обратимость при подходящем выборе достаточно большого параметра R.

Единственность. Пусть существует два голоморфных, ограниченных и нормированных отображения, сопрягающих F_0 с $\tilde{F}$ на области $S_{R\varepsilon}^{\pm}$. Обозначим их $H^{\pm}$ и $G^{\pm}$. Из нормированности следует существование обратного отображения $(G^{\pm})^{-1}$, которое действует из $G^{\pm}(S_{R\varepsilon}^{\pm})$ в $S_{R\varepsilon}^{\pm}$. Отображение $\Phi^{\pm} = H^{\pm} \circ (G^{\pm})^{-1}$ будем называть *функцией перехода.* Из построения функции перехода следует, что она коммутирует с нормальной формой F_0:

$$F_0 \circ \Phi^{\pm} = F_0 \circ H^{\pm} \circ (G^{\pm})^{-1} = H^{\pm} \circ \tilde{F} \circ (G^{\pm})^{-1} = H^{\pm} \circ (G^{\pm})^{-1} \circ F_0 = \Phi^{\pm} \circ F_0.$$

Пусть функция перехода имеет вид $\Phi^{\pm}(\xi,z) = (\xi + h(\xi,z), z + g^{\pm}(\xi,z))$, голоморфна, ограничена и также является нормированной. Из коммутируемости с нормальной формой следует, что:

$$h(\xi,z) = h\left(\xi+1, e^{\lambda}z\right). \tag{30}$$
$$e^{\lambda}g^{\pm}(\xi,z) = g^{\pm}\left(\xi+1, e^{\lambda}z\right)$$

Заметим, что для производной $\frac{\partial g^{\pm}}{\partial z}$ выполнено то же соотношение, что и для функции h:

$$\frac{\partial g^{\pm}}{\partial z}(\xi,z) = \frac{\partial g^{\pm}}{\partial z}\left(\xi+1, e^{\lambda}z\right). \tag{31}$$

Причем из оценок Коши [23] и нормированности следует, что производная $\frac{\partial g^{\pm}}{\partial z}$ также является голоморфной и ограниченной на, быть может, меньшей, секториальной области, с аналогичной асимптотикой.

Заметим, что уравнения (30) и (31) в точности повторяют уравнение (11) из доказательства единственности решения первого гомологического уравнения (лемма 1). Повторяя те же рассуждения, получим

$$h(\xi,z) = \frac{\partial g^{\pm}}{\partial z}(\xi,z) = 0, \ (\xi,z) \in \mathbb{C}^2.$$

Отсюда следует, что $g^{\pm}$ не зависит от z: для $g^{\pm}(\xi,z) = g^{\pm}(\xi)$ и выполнено:

$$e^{\lambda}g^{\pm}(\xi) = g^{\pm}(\xi+1), \ \xi \in S_{\xi}^{\pm}. \tag{32}$$

В точности такое же уравнение и так же в области $S^{\pm}_{\xi}$ уже было рассмотрено в доказательстве единственности редуцированного второго гомологического уравнения (предложение 4). Отсюда $g^{\pm} \equiv 0$ на $S^{\pm}_{\xi}$.

Асимптотика. Пусть $\tilde{H}^{\pm}_N$ и $\tilde{\mathtt{H}}_N$ — построенные выше отображения. Из доказанной выше единственности и единственности аналитического продолжения следует, что $\tilde{H}^{\pm} \stackrel{def}{=} \tilde{H}^{\pm}_N \circ \tilde{\mathtt{H}}_N$ не зависит от N. Отметим, что при построении $\tilde{\mathtt{H}}_N$ и $\tilde{H}_N$ параметр $N > 6$ мог быть выбран произвольно. Тогда, так как

$$\tilde{H}^{\pm}_N = id + \left(O\left(|\xi|^{-N+6}\right), O\left(|\xi|^{-N+6}\right)\right), \ |\xi| \to \infty$$

то:

$$\forall N > 6: \ \tilde{H}^{\pm} = \tilde{\mathtt{H}}_N + O\left(|\xi|^{-N+6}\right), \ |\xi| \to \infty$$

откуда и следует, что $\tilde{\mathtt{H}}$ является асимптотическим рядом для $\tilde{H}^{\pm}$.

Окончание доказательства. Были построены голоморфные секториальные нормализующие отображения $\tilde{H}^{\pm}_N = (\xi + h_N(\xi, z), z + g^{\pm}_N(\xi, z))$ в секториальных областях

$$S^{\pm}_{R\varepsilon} = \left\{\xi : \ \mathrm{Re}\xi < -R < -1; -\delta < \pm(\pi - \arg \xi) < \frac{\pi}{2}\right\} \times \{|z| < \varepsilon\}.$$

Отметим, что функции h_N и $g^{\pm}_N$ удовлетворяют функциональным уравнениям (5).

Продолжим h_N и $g^{\pm}_N$ по функциональным уравнениям на секториальные области

$$\tilde{S}^{\pm}_{R\varepsilon} = \left\{\xi : \ |\xi| > R > 1; -\delta < \pm(\pi - \arg \xi) < \frac{\pi}{2}\right\} \times \{|z| < \varepsilon\}.$$

Обозначим $\xi_j = \xi - j$, $z_j = e^{-\lambda j} z$. Тогда для любого $\xi \in \tilde{S}^{\pm}_{R\varepsilon} \backslash S^{\pm}_{R\varepsilon}$ найдется $k = [\mathrm{Re}\xi - R + 1]$ такое, что $(\xi_k, z_k) \in S^{\pm}_{R\varepsilon}$. Тогда h_N и $g^{\pm}_N$ могут быть корректно продолжены по индукции до голоморфных и ограниченных на $\tilde{S}^{\pm}_{R\varepsilon}$ функций по формулам:

$$h_N(\xi, z) = h_N(\xi_k, z_k) + \sum_{n=1}^{k} \Delta_{1N}(\xi_n + h_N(\xi_n, z_n), z_n + g_N(\xi_n, z_n))$$
$$g_N(\xi, z) = e^{\lambda k} g_N(\xi_k, z_k) + \sum_{n=1}^{k} e^{\lambda(n-1)} \Delta_{1N}(\xi_n + h_N(\xi_n, z_n), z_n + g_N(\xi_n, z_n)).$$

Из оценок $\tilde{H}_N$ на $S_{R\varepsilon}$ и ограниченности k (k превышает R) следует, что продолженное таким образом на $\tilde{S}_{R\varepsilon}$ отображение единственно, голоморфно, ограничено и сохраняет асимптотические свойства на $\tilde{S}^{\pm}_{R\varepsilon}$.

Выбирая параметры областей $\tilde{S}^{\pm}_{R\varepsilon}$ достаточно большими (радиус R и раствор δ) и достаточно малыми (радиус ε), без ограничения общности можем считать, что прообразом левой верхней (левой нижней) секториальной области $\tilde{S}^{+}_{R\varepsilon}$ (соответственно, $\tilde{S}^{-}_{R\varepsilon}$) при отображении $B : (x, y) \mapsto \left(\xi = -\frac{1}{x}, z = y\right)$ является правая верхняя секториальная область Ω^{+} (соответственно Ω^{-}), и построенное отображение $H^{\pm} = B^{-1} \circ \tilde{H}^{\pm} \circ B$ удовлетворяет теореме 1.

Таким образом, теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. Poincare *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle I*// J. Math. Pures et Appl. **7**, 375–422 (1881).
2. H. Poincare *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle II*// J. Math. Pures et Appl. **8**, 251–296 (1882).
3. H. Poincare *Sur les courbes définies par les équations différentielles III*// J. Math. Pures et Appl. **1**, 167–244 (1885).

4. H. Poincare *Sur les courbes définies par les équations différentielles IV*// J. Math. Pures et Appl. **2**, 151–218 (1886).
5. H. Poincare *Sur les problém des trois corps et les équations de la dinamique*// Acta Math. **XIII**, 1–271 (1890).
6. C.L. Siegel *Vorlesungen uber Himmelsmechanik*, Berlin. Springer-Verland. Gottingen and Heidelberg. 1957.
7. Брюно А.Д. *Аналитическая форма дифференциальных уравнений*// Труды ММО., **25**, 119–262 (1971).
8. Брюно А.Д. *Аналитическая форма дифференциальных уравнений* // Труды ММО., **26**, 199–239 (1972).
9. Арнольд В.И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, М.:Наука. 1978.
10. J.C. Yoccoz *Linearisation des germes de diffeomorphismes holomorphes de* (**C**, *0)*// C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **306**:1, 55–58 (1988).
11. Воронин С.М. *Аналитическая классификация ростков конформных отображений* $(\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$ *с тождественной линейной частью*// Функц.анализ. **15**:1, 1–17 (1981).
12. J. Ecalle *Sur les fonctions resurgentes*, Orsay.Publ.Math.d'Orsay. 1981.
13. J. Martinet, J.P. Ramis *Probl'eme de modules pour des 'equations diff'erentielles non lin'eaires du premier ordre*// Inst. Hautes 'Etudes Sci.PublMath. **55**, 63–164 (1982).
14. J. Martinet, J.P. Ramis *Classification analytique des équations différentielles non linéaires resonnantes du premier ordre*// Ann. Sci. École norm. supér. **16**:4, 571–621 (1983).
15. Y.S. Il'yashenko *Nonlinear Stokes phenomena*// Nonlinear Stokes Phenomena. Adv. in Sov.Math. **13**, 1–55 (1992).
16. S.M. Voronin *Darboux-Whitney's Problem and Related Questions*// Nonlinear Stokes Phenomena. Adv. in Sov.Math. **13**, 139–223 (1992).
17. Ильяшенко Ю.С., Яковенко С.Ю. *Аналитическая теория дифференциальных уравнений, том 1*, М.:МЦНМО. 2013.
18. Воронин С.М. *Аналитическая классификация ростков голоморфных отображений с неизолированными неподвижными точками и постоянными мультипликаторами и ее приложения*// Вестник ЧелГУ. **5**, 12–30 (1999).
19. Шайхуллина П.А. *Формальная классификация типичных ростков полугиперболических отображений*// Математические заметки СВФУ. **22**:4, 79–90 (2015).
20. Воронин С.М., Фомина П.А. *Секториальная нормализация ростков полугиперболических отображений*// Вестник ЧелГУ. **16**, 94–113 (2013).
21. T. Ueda *Local structure of analytic transformations of two complex variables, I*// J. Math. Kyoto Univ. **26**:2, 233–261 (1986).
22. T. Ueda *Local structure of analytic transformations of two complex variables, II*// J. Math. Kyoto Univ. **31**:3, 695–711 (1991).
23. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ*, Изд-во: Лань. 1969.
24. Шайхуллина П.А. *О решении простейшего функционального уравнения в области типа «криволинейная полоса»*// Математические заметки СВФУ. **24**:4, 87–95 (2017).

Полина Алексеевна Шайхуллина
Челябинский государственный университет,
ул. Бр. Кашириных, 129,
454001, г. Челябинск, Россия
E-mail: `fominapa@gmail.com`