ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 2 (2020). С. 35-48.

УДК 517.574 : 517.547.22

РОСТ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВДОЛЬ ПРЯМОЙ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИХ МЕР РИССА

А.Е. САЛИМОВА, Б.Н. ХАБИБУЛЛИН

Аннотация. Пусть $u \not\equiv -\infty$ и $M \not\equiv -\infty$ — две субгармонические функции на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с мерами Рисса ν_u и μ_M соответственно, для которых $u(z) \leqslant O(|z|)$ и $M(z) \leqslant O(|z|)$ при $z \to \infty$, q — некоторая положительная непрерывная функция на вещественной оси $\mathbb{R}$, а mes — линейная мера Лебега на $\mathbb{R}$. Предположим, что имеет место ограничение на рост функции u вдоль мнимой оси $i\mathbb{R}$ вида

$$u(iy) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M\bigl(iy + q(y)e^{i\theta}\bigr)\, \mathrm{d}\theta + q(y) \quad \text{для всех } y \in \mathbb{R} \setminus E,$$

где $E \subset \mathbb{R}$ некоторое малое множество, например, $\operatorname{mes}\bigl(E \cap [-r, r]\bigr) \leqslant q(r)$ при $r \geqslant 0$. При таких ограничениях на функцию u естественно ожидать, что мера Рисса ν_u в каком-то смысле тоже мажорируется мерой Рисса μ_M функции M или интегральными характеристиками функции M. Мы даем строгую количественную форму такого доминирования. Необходимость такого рода оценок естественным образом возникает в теории целых функций в связи с ее приложениями к вопросам полноты экспоненциальных систем, аналитического продолжения и пр. Наши результаты формулируются в терминах специальных «логарифмических» характеристик мер ν_u и μ_M, возникших ранее в классических работах П. Мальявена, Л.А. Рубела и др. для последовательностей точек, а также в терминах специальных «логарифмических» характеристик поведения функции M вдоль мнимой оси и функции q вдоль вещественной оси. Полученные результаты являются новыми и для распределения корней целых функций экспоненциального типа при ограничениях на рост таких функций вдоль прямой. Последнее проиллюстрировано новой теоремой единственности для целых функций экспоненциального типа, использующей так называемые логарифмические блок-плотности распределения точек на комплексной плоскости.

Ключевые слова: субгармоническая функция конечного типа, мера Рисса, целая функция экспоненциального типа, распределение нулей, теорема единственности.

Mathematics Subject Classification: 31A05, 30D20, 30D15

1. Введение

1.1. Основная задача. Истоки. Пусть $u \not\equiv -\infty$ и $M \not\equiv -\infty$ — субгармонические функции *конечного типа* (при порядке 1) на *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$, что означает конечность типа

$$\mathsf{type}[u] := \limsup_{z \to \infty} \frac{u(z)}{|z|} \tag{1.1}$$

A.E. Salimova, B.N. Khabibullin, Growth of subharmonic functions along the line and distribution of their Riesz measures.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

Поступила 26 ноября 2019 г.

и типа $\mathsf{type}[M] < +\infty$, с мерами Рисса соответственно $\nu_u := \frac{1}{2\pi}\triangle u$ и $\mu_M := \frac{1}{2\pi}\triangle M$, где $\triangle$ — *оператор Лапласа,* действующий в смысле теории обобщенных функция [1], [2]. Предположим, что рост функции u вдоль некоторой прямой $L \subset \mathbb{C}$ мажорируется функцией M или, более общó, некоторыми усреднениями функции M по окружностям с центрами на L, к тому же с определенными аддитивными добавками к M, а также не всюду на L, а вне некоторого исключительного множества $E \subset L$. В таком случае естественно ожидать, что мера Рисса ν_u тоже должна в каком-то смысле мажорироваться мерой Рисса μ_M в увязке с радиусами усредняющих окружностей, с характеристиками аддитивных добавок и степенью малости исключительного множества E. Наша *основная задача* — дать количественные характеристики такого мажорирования меры ν_u мерой μ_M в терминах специальных «логарифмических» характеристик/плотностей распределения мер ν_u и μ_M. Полученная в этом направлении теорема 1, сформулированная ниже в подразделе 1.3, а также ее вариации (предложение 1, следствие 1, теорема 2 из раздела 3) — результаты новые и при специальном виде $u = \ln|f|$ и $M = \ln|g|$ в случае *целых функций экспоненциального типа* (пишем *ц.ф.э.т.*) $f \neq 0$ и $g \neq 0$ с $\mathsf{type}\bigl[\ln|f|\bigr] < +\infty$ и $\mathsf{type}\bigl[\ln|g|\bigr] < +\infty$, когда в роли мер Рисса ν_u и μ_M выступают *последовательности нулей,* или корней, Zero_f и Zero_g соответственно функций f и g, перенумерованные каким-то образом с учетом кратности. Для ц.ф.э.т. и устанавливается заключительная теорема единственности 3.

В постановке именно для ц.ф.э.т. f и g версия нашей основной задачи рассматривалась в совместной работе П. Мальявена и Л. А. Рубела [3], в которой в качестве прямой L выбиралась *мнимая ось* $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, где $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ — *вещественная ось.* Такого выбора придерживаемся и мы. В [3] для произвольной ц.ф.э.т. g с нулями в *правой полуплоскости* $\mathbb{C}_{\rm rh} := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$, лежащими исключительно на *положительной полуоси* $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \colon x \geqslant 0\}$, было дано законченное описание всех *положительных* последовательностей точек $\mathsf{Z} = \{\mathsf{z}_k\}_{k=1,2,\dots} \subset \mathbb{R}^+$, для каждой из которых найдется своя ц.ф.э.т. $f \neq 0$, обращающаяся в нуль на Z и удовлетворяющая ограничению $\ln|f(iy)| \leqslant \ln|g(iy)|$ при всех $y \in \mathbb{R}$. Этой задаче посвящен один из основных разделов монографии Л. А. Рубела в сотрудничестве с Дж. Э. Коллиандром [4, раздел 22] 1996 г. В серии работ второго из авторов 1988–1991 гг. все эти результаты были перенесены на произвольные *комплексные* последовательности $\mathsf{Z} \subset \mathbb{C}$ с ограничением сверху вида $\ln|f(iy)| \leqslant M(iy)$ для всех $y \in \mathbb{R}$ через *специальную субгармоническую функцию-мажоранту* M вместо $\ln|g|$, а именно: со сколь угодно малым числом $\varepsilon > 0$ для $M(z) = \varepsilon|z|$, $z \in \mathbb{C}$, изначально в статье И. Ф. Красичкова-Терновского [5, теоремы 8.3, 8.5, следствие 5.6] только для последовательностей Z вблизи $i\mathbb{R}$, для любых $\mathsf{Z} \subset \mathbb{C}$ в [6, основная теорема] с дополнением в [7, основная теорема, теорема 1], а также в гораздо более общей форме с мажорантой вида $M(z) = \ln|g(z)| + \varepsilon|z|$, где $g \neq 0$ — ц.ф.э.т., в [8, теорема 1] и в [9, основная теорема], или еще более общó и жестко, — с мажорантами вида $M = \ln|g|$ уже с $\varepsilon = 0$, но для последовательностей $\mathsf{Z} \subset \mathbb{C}$, отделенных какой-нибудь парой вертикальных углов от мнимой оси, — в [10, основная теорема]. Ситуация с субгармонической функцией-мажорантой M конечного типа при порядке 1, гармонической в паре вертикальных углов, содержащих $i\mathbb{R} \setminus \{0\}$, в определенной мере исследована в диссертации второго из соавторов [11, гл. II], но в научных журналах последние результаты с произвольной субгармонической мажорантой M конечного типа не публиковались. Большинство отмеченных выше результатов изложено в монографии-обзоре [12, 3.2] с подробными историческими комментариями.

1.2. Обозначения и определения. В данном подразделе приводится все, что использовано ниже для формулировки основной теоремы 1 нашей статьи. Так, sbh — множество всех *субгармонические функции на* $\mathbb{C}$, $\mathsf{sbh}_* := \{u \in \mathsf{sbh} \colon u \not\equiv -\infty\}$.

Одним и тем же символом 0 обозначаем, по контексту, число нуль, нулевую функцию, нулевую меру и т. п.; $\varnothing$ — *пустое множество. Положительность* всюду понимается как $\geqslant 0$, а *отрицательность* — это $\leqslant 0$.

Meas^+ — класс всех *положительных борелевских мер на* $\mathbb{C}$, mes — *линейная мера Лебега* на $\mathbb{R}$. $C(X)$ — класс *всех непрерывных функций* $f\colon X\to\mathbb{R}$ на топологическом пространстве X. Для mes-*измеримого подмножества* $X\subset\mathbb{R}$ через $L^1_{\rm loc}(X)$ обозначаем класс всех *локально* mes-*интегрируемых функций* со значениями в *расширенной вещественной оси* $\mathbb{R}_{\pm\infty}:=\{-\infty\}\cup\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, где $\mathbb{R}_{\pm\infty}$ наделяется естественным порядком $-\infty\leqslant x\leqslant+\infty$, $x\in\mathbb{R}_{\pm\infty}$, и порядковой топологией, или топологией конечной копактификации $\mathbb{R}$ с двумя концами $\pm\infty$. Аналогично определяется $L^1_{\rm loc}(Y)$ для $Y\subset i\mathbb{R}$.

Пусть $X\subset\mathbb{R}_{\pm\infty}$. Функция $f\colon X\to\mathbb{R}_{\pm\infty}$ *возрастающая*, если для любых $x_1,x_2\in X$ из $x_1\leqslant x_2$ следует $f(x_1)\leqslant f(x_2)$; f *убывающая,* если $-f$ возрастающая.

Интервал — связное подмножество в $\mathbb{R}_{\pm\infty}$. *Интегралы Стилтьеса* по ограниченному в $\mathbb{R}$ интервалу I с концами $a:=\inf I<\sup I=:b$ *по функциям ограниченной вариации* $m\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ на этом интервале I обычно, если не оговорено противное, понимаем как

$$\int_a^b \dots\,{\rm d}m:=\int_{(a,b]}\dots\,{\rm d}m,\quad I=(a,b],\quad -\infty<a<b<+\infty. \tag{1.2}$$

$D(z,r):=\{z'\in\mathbb{C}\colon |z'-z|<r\}$ — *открытый,* $\overline{D}(z,r):=\{z'\in\mathbb{C}\colon |z'-z|\leqslant r\}$ — *замкнутый круги,* $\partial\overline{D}(z,r):=\overline{D}(z,r)\setminus D(z,r)$ — *окружность с центром* $z\in\mathbb{C}$ *радиуса* $r\in\mathbb{R}^+$; $D(r):=D(0,r)$, $\overline{D}(r):=\overline{D}(0,r)$, $\partial\overline{D}(r):=\partial\overline{D}(0,r)$. Определим *интегральные средние по окружности* $\partial\overline{D}(z,r)$ от функции $v\colon\partial\overline{D}(z,r)\to\mathbb{R}_{\pm\infty}$:

$$\mathsf{C}_v(z,r):=:C(z,r;v):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(z+re^{i\theta})\,{\rm d}\theta,\quad \mathsf{C}_v(r):=\mathsf{C}_v(0,r), \tag{1.3C}$$

по кругу $D(z,r)$ от фукции $v\colon D(z,r)\to\mathbb{R}_{\pm\infty}$:

$$\mathsf{B}_v(z,r):=:B(z,r;v):=\frac{2}{r^2}\int_0^{r}\mathsf{C}_v(z,t)t\,{\rm d}t,\quad \mathsf{B}_v(r):=\mathsf{B}_v(0,r), \tag{1.3B}$$

а также верхнюю грань функции $v\colon\partial\overline{D}(z,r)\to\mathbb{R}_{\pm\infty}$ на окружности $\partial\overline{D}(z,r)$:

$$\mathsf{M}_v(z,r):=:M(z,r;v):=\sup_{z'\in\partial\overline{D}(z,r)}v(z'),\quad \mathsf{M}_v(r):=\mathsf{M}_v(0,r), \tag{1.3M}$$

что при $v\in\mathsf{sbh}$ совпадает с $\sup_{\overline{D}(z,r)}v$. Конечно же, в (1.3) для (1.3C) и (1.3B) подразумевается существование интегралов, что всегда имеет место для функций $v\in\mathsf{sbh}_*$ [2, определение 2.6.7, теорема 2.6.8], [1, 2.7], для которых

$$\mathsf{B}_v(z,r)\leqslant\mathsf{C}_v(z,r)\leqslant\mathsf{M}_v(z,r)\quad\text{при любых } z\in\mathbb{C} \text{ и } r\in\mathbb{R}^+. \tag{1.4}$$

Во всех упомянутых выше в подразделе 1.1 результатах из [3]–[12] ключевую роль играли два объекта. Во-первых, это специальные интегралы по интервалам на вещественной или мнимой оси, часто называемые логарифмическими интегралами.

Определение 1. Для функции $v\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R})$ полагаем

$$J_{\mathbb{R}}(r,R;v):=\frac{1}{2\pi}\int_r^R\frac{v(x)+v(-x)}{x^2}\,{\rm d}x,\quad 0<r<R<+\infty, \tag{1.5r}$$

а для функции $v\in L^1_{\rm loc}(i\mathbb{R})$ —

$$J_{i\mathbb{R}}(r,R;v):=\frac{1}{2\pi}\int_r^R\frac{v(-iy)+v(iy)}{y^2}\,{\rm d}y,\quad 0<r<R<+\infty. \tag{1.5i}$$

Второй объект — это *логарифмические меры интервалов для последовательностей точек* $\mathsf{Z} = \{\mathsf{z}_k\}_{k=1,2,\dots} \subset \mathbb{C}$. Мы отождествляем каждую последовательность Z со *считающей мерой* $n_{\mathsf{Z}} \in \mathsf{Meas}^+$, определяемой по правилу

$$n_{\mathsf{Z}}(S) := \sum_{\mathsf{z}_k \in S} 1 \quad \text{для всех } S \subset \mathbb{C}, \tag{1.6}$$

и определим эти логарифмические меры сразу для произвольных мер из Meas^+.

Определение 2. Для меры $\mu \in \mathsf{Meas}^+$

$$l_\mu^{\rm rh}(r,R) := \int_{\substack{r<|z|\leqslant R\\ \operatorname{Re} z>0}} \operatorname{Re}\frac{1}{z}\, \mathrm{d}\mu(z), \quad 0<r<R<+\infty, \tag{1.7r}$$

$$l_\mu^{\rm lh}(r,R) := \int_{\substack{r<|z|\leqslant R\\ \operatorname{Re} z<0}} \operatorname{Re}\Bigl(-\frac{1}{z}\Bigr)\, \mathrm{d}\mu(z), \quad 0<r<R<+\infty, \tag{1.7l}$$

— *правая* и *левая логарифмические меры интервалов* $(r,R] \subset \mathbb{R}^+$ для меры μ соответственно. Они порождают *логарифмическую субмеру интервалов*

$$l_\mu(r,R) := \max\bigl\{l_\mu^{\rm lh}(r,R), l_\mu^{\rm rh}(r,R)\bigr\}, \quad 0<r<R<+\infty. \tag{1.7m}$$

1.3. Основной результат.

Теорема 1. *Пусть для функций*

$$M \in \mathsf{sbh}_*, \quad \mathsf{type}[M] \overset{(1.1)}{<} +\infty, \quad \mu := \mu_M := \frac{1}{2\pi}\,\triangle M \in \mathsf{Meas}^+, \tag{1.8M}$$

$$u \in \mathsf{sbh}_*, \quad \mathsf{type}[u] < +\infty, \quad \nu := \nu_u := \frac{1}{2\pi}\,\triangle u \in \mathsf{Meas}^+, \tag{1.8u}$$

$$q_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \quad q_0 \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}), \tag{1.8$_0$}$$

$$q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad q \in C(\mathbb{R}), \quad \limsup_{|y|\to+\infty} \frac{q(y)}{|y|} < 1, \tag{1.8q}$$

и некоторого mes*-измеримого подмножества* $E \subset \mathbb{R}^+$ *с*

$$E^r := E \cap [0,r], \quad q_E(r) := \mathrm{mes}(E^r) \ln \frac{er}{\mathrm{mes}(E^r)} =: q_E(-r), \tag{1.9E}$$

имеют место неравенства

$$\begin{split} u(iy) + u(-iy) \leqslant \mathsf{C}_M\bigl(iy, q(y)\bigr) + \mathsf{C}_M\bigl(-iy, q(-y)\bigr) \\ + q_0(y) + q_0(-y) \quad \text{для каждого числа } y \in \mathbb{R}^+ \setminus E. \end{split} \tag{1.9C}$$

Тогда для любых чисел $r_0 > 0$ *и* $N \in \mathbb{R}^+$ *найдется число* $C \in \mathbb{R}^+$*, для которого*

$$\begin{split} \max\bigl\{l_\nu(r,R), J_{i\mathbb{R}}(r,R;u)\bigr\} \leqslant \min\bigl\{l_\mu^{\rm rh}(r,R), l_\mu^{\rm lh}(r,R), J_{i\mathbb{R}}(r,R;M)\bigr\} \\ +C J_{\mathbb{R}}(r,R;q_0+q_E) + C I_N(r,R;q) + C \quad \text{при всех } r_0 \leqslant r < R < +\infty, \end{split} \tag{1.10}$$

где

$$I_N(r,R;q) := \int_r^R t^N \sup_{s\geqslant t} \frac{q(s)+q(-s)}{s^{2+N}}\, \mathrm{d}t. \tag{1.11}$$

Замечание 1. Для функций из (1.8M) и (1.8u) их меры Рисса μ и ν *конечного типа*, или *конечной верхней плотности*, при порядке 1, что означает

$$\mathsf{type}[\mu] := \limsup_{r\to+\infty} \frac{\mu^{\rm rad}(r)}{r} < +\infty, \quad \mu^{\rm rad}(r) := \mu(D(0,r)), \quad \mathsf{type}[\nu] < +\infty. \tag{1.12}$$

Замечание 2. В силу неравенств (1.4) в правой части условия-неравенства (1.9C) средние по окружностям C_M из (1.3C) можно заменить на средние по кругам B_M из (1.3B), но нельзя заменить на верхние грани по окружностям или кругам M_M из (1.3M).

2. Доказательство теоремы 1

При доказательстве теоремы 1 можно рассматривать любое, но фиксированное значение $r_0 > 0$, поскольку по определению 2 логарифмических мер интервалов (1.7r), (1.7l), (1.7m) и определению 1 интегралов (1.5i), (1.5r) при изменении $r_0 > 0$ в заключении (1.10) теоремы 1 может разве что увеличиться постоянная $C \in \mathbb{R}^+$. Поэтому при доказательстве теоремы 1 при необходимости увеличиваем значение r_0, не оговаривая это специально.

Если в условии (1.8q) рассматривать вместо функции q функцию $q+1$, то ее свойство из (1.8q) не изменится, условие-неравенство (1.9C) сохранится, а на заключение (1.10) это не повлияет. Поэтому можем считать, что $q \geqslant 1$ на $\mathbb{R}$. Рассмотрим регулярную для задачи Дирихле [1, теорема 2.11] область

$$D := D_q := \bigl\{z \in \mathbb{C} \colon -q(\operatorname{Im} z) < \operatorname{Re} z < q(\operatorname{Im} z)\bigr\}. \tag{2.1}$$

Для $b \in \mathbb{R}^+$ используем обозначение

$$\mathsf{str}_b := \bigl\{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Im} z| < b\bigr\}, \quad \overline{\mathsf{str}}_b := \bigl\{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Im} z| \leqslant b\bigr\} \tag{2.2}$$

для соответственно *открытой* и *замкнутой полос ширины* $2b$ *со средней линией* $\mathbb{R}$. По предельному условию из (1.8q) при достаточно большом $b > 0$ часть $D \setminus \overline{\mathsf{str}}_b$ области D состоит из двух односвязных областей, содержащихся внутри некоторой пары открытых вертикальных углов раствора не более чем π вида

$$\angle(\alpha, \pi-\alpha) := \{z \in \mathbb{C} \colon \alpha < \arg z < \pi - \alpha\},\ \angle(-\pi+\alpha, -\alpha) \text{ с } \alpha \in (0, \pi/2). \tag{2.3}$$

Можно произвести классическое выметание функции $M \in \mathsf{sbh}_*$ из области D в два этапа. Сначала произведем выметание из этой пары односвязных областей, и выметенная функция останется субгармонической функцией конечного типа, поскольку она не превышает классического выметания рода 0 функции M из пары вертикальных углов (2.3) [13, 6.2, теоремы 7, 8]. На втором этапе осуществим классическое выметание из D логарифмического потенциала рода 0 появившейся меры с компактным носителем в замыкании $D \cap \overline{\mathsf{str}}_b$ [14, гл. IV, § 1], [15, теорема 2.5.3.1], что может увеличить рост этого логарифмического потенциала разве что на величину порядка $O\bigl(\ln|z|\bigr)$, $z \to \infty$. Таким образом, такая конструкция дает *субгармоническую функцию*

$$M^D = \begin{cases} M & \text{на дополнении } \mathbb{C} \setminus D, \\ \text{гармоническое продолжение } M \text{ внутрь } D & \text{на } D \end{cases} \tag{2.4}$$

конечного типа, т. е. с $\mathsf{type}[M^D] < +\infty$. При этом по принципу максимума

$$\mathsf{C}_M\bigl(iy, q(y)\bigr) \leqslant M^D(iy) \quad \text{для всех } y \in \mathbb{R}, \quad M \leqslant M^D \text{на } \mathbb{C},$$

а из условий-неравенств (1.9C) следует

$$u(iy) + u(-iy) \leqslant M^D(iy) + M^D(-iy) + q_0(y) + q_0(-y) \text{ для всех } y \in \mathbb{R} \setminus E. \tag{2.5}$$

Для меры $\nu \in \mathsf{Meas}^+$ *сужение меры* ν *на* $S \subset \mathbb{C}$ обозначаем как $\nu\bigl|_S$.

Мера Рисса $\frac{1}{2\pi} \triangle M^D$ функции M^D — это сумма ее сужений

$$\mu_\infty := \frac{1}{2\pi} \triangle M^D \bigl|_{\mathbb{C} \setminus \operatorname{clos} D} = \mu \bigl|_{\mathbb{C} \setminus \operatorname{clos} D} \leqslant \mu, \quad \mu_0 := \frac{1}{2\pi} \triangle M^D \bigl|_{\partial D}, \tag{2.6}$$

где $\operatorname{clos} D$ и ∂D — соответственно *замыкание* и *граница* D. Интегрирование неравенства (2.5) с множителем $\frac{1}{2\pi}$ в обозначении

$$E_r^R := E^R \setminus E^r = E \cap (r, R] \tag{2.7}$$

дает при всех значениях $r_0 \leqslant r < R < +\infty$ неравенства

$$J_{i\mathbb{R}}(r,R;u) \leqslant J_{i\mathbb{R}}(r,R;M^D) + \frac{1}{2\pi}\int_{E_r^R} \frac{u(iy)+u(-iy)-M^D(iy)-M^D(-iy)}{y^2}\,\mathrm{d}y + J_{\mathbb{R}}(r,R;q_0). \quad (2.8)$$

Лемма 1. *Пусть $r_0 > 0$. Для любой функции u из* (1.8u) *существует такое число $c_u \in \mathbb{R}^+$, что для любого* mes*-измеримого подмножества $E \subset \mathbb{R}^+$ в обозначениях* (1.9E) *и* (2.7) *имеет место неравенство*

$$\int_{E_r^R} \frac{|u|(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant c_u \int_r^R \frac{q_E(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + c_u \quad \text{для всех } r_0 \leqslant r < R < +\infty, \quad (2.9)$$

где функция q_E возрастающая и $q_E(r) \leqslant r$ при $r \in \mathbb{R}^+_*$.

Доказательство. Функция

$$(x,y) \longmapsto x \ln\frac{ey}{x}, \quad (x,y) \in (0,y] \times \mathbb{R}^+,$$

доопределенная нулем при $x = 0$, возрастает по переменной $y \in \mathbb{R}^+_*$, а также по $x \in (0,y]$, достигая наибольшего значения при $x = y$, что дает свойства функции q_E. Далее $\mathbf{1}_E$ — *характеристическая функция подмножества E.*

Согласно [16, теорема 8] существуют постоянные $c', c \in \mathbb{R}^+$, для которых

$$\int_{r_0}^x \mathbf{1}_E(t)|u|(t)\,\mathrm{d}t \leqslant c' x \operatorname{mes}(E^x) \ln\frac{4x}{\operatorname{mes}(E^x)} \overset{(1.9\mathrm{E})}{\leqslant} c q_E(x) x \quad (2.10)$$

для всех $x \geqslant r_0$. Для левой части из (2.9) имеем

$$\begin{aligned}\int_{E_r^R} \frac{|u|(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_r^R \mathbf{1}_E(x)\frac{|u|(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_r^R \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\int_r^x \mathbf{1}_E(t)|u|(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{R^2}\int_r^R \mathbf{1}_E(t)|u|(t)\,\mathrm{d}t + \int_r^R\int_r^x \mathbf{1}_E(t)|u|(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\Bigl(-\frac{1}{x^2}\Bigr) \\ &\overset{(2.10)}{\leqslant} c\frac{q_E(R)}{R} + 2c\int_r^R \frac{q_E(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant c + 2c\int_r^R \frac{q_E(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

поскольку справедливо неравенство $q_E(R) \leqslant R$. Лемма 1 доказана. □

Четырежды применяя лемму 1 к интегралу по множеству E_r^R из правой части (2.8), для некоторого числа $c_1 \in \mathbb{R}^+$ для всех $r_0 \leqslant r < R < +\infty$ получаем

$$J_{i\mathbb{R}}(r,R;u) \leqslant J_{i\mathbb{R}}(r,R;M^D) + c_1 J_{\mathbb{R}}(r,R;q_E+q_0) + c_1. \quad (2.11)$$

Лемма 2 ([17, предложение 4.1, (4.19)]). *Пусть $r_0 > 0$. Для любой функции u из* (1.8u) *существует число $c_u \in \mathbb{R}^+$, для которого при всех $r_0 \leqslant r < R < +\infty$*

$$\max\Bigl\{\bigl|J_{i\mathbb{R}}(r,R;u) - l_\nu^{\mathrm{rh}}(r,R)\bigr|, \bigl|J_{i\mathbb{R}}(r,R;u) - l_\nu^{\mathrm{lh}}(r,R)\bigr|\Bigr\} \leqslant c_u. \quad (2.12)$$

Дважды применяя лемму 2 к функциям u и M^D в (2.11), для некоторого числа $c_2 \in \mathbb{R}^+$ при всех $r_0 \leqslant r < R < +\infty$ имеем неравенства

$$\begin{aligned}l_\nu^{\mathrm{rh}}(r,R) &\overset{(2.6)}{\leqslant} l^{\mathrm{rh}}_{\mu_\infty+\mu_0}(r,R) + c_1 J_{\mathbb{R}}(r,R;q_E+q) + c_2 \\ &\overset{(2.6)}{\leqslant} l_\mu^{\mathrm{rh}}(r,R) + l_{\mu_0}^{\mathrm{rh}}(r,R) + c_1 J_{\mathbb{R}}(r,R;q_E+q_0) + c_2. \quad (2.13)\end{aligned}$$

Пусть выбраны углы и зафиксировано число $b>0$ как в (2.1)–(2.3). Сужение меры μ_0 на замкнутую полосу $\overline{\mathsf{str}}_b$ — мера с компактным носителем, и для этого сужения логарифмические меры и субмера интервалов из (1.7) равномерно ограничены при всех $r_0\leqslant r<R<+\infty$. Следовательно, не умаляя общности, можем считать, что носитель меры μ_0 содержится в паре углов (2.3) и не пересекается с открытой полосой str_b. Обозначим μ_0-меру замкнутой полосы $\overline{\mathsf{str}}_y$ ширины $2y\in\mathbb{R}^+$ через

$$\mu_0^i(y):=\mu_0(\overline{\mathsf{str}}_y),\ \text{где } \mu_0^i(y)\leqslant Cy \quad \text{при всех } y\in\mathbb{R}^+ \tag{2.14}$$

для некоторой постоянной C, не зависящей от y, а также $\mu_0^i(y)=0$ при $y\in[0,b)$.

Лемма 3. *Пусть $r_0>0$ и $\mu_0\in\mathsf{Meas}^+$ — мера с носителем $\operatorname{supp}\mu_0$ в замыкании $D\overset{(2.1)}{:=}D_q$, где функция q из* (1.8q)*, с функцией $\mu_0^i\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ из* (2.14)*. Тогда для некоторого числа $C_0\in\mathbb{R}^+$ справедливы неравенства*

$$l_{\mu_0}^{\mathrm{rh}}(r,R)\leqslant\int_r^R\frac{Q(y)}{y^2}\,\mathrm{d}\mu_0^i(y)+C_0 \quad \textit{при всех } r_0\leqslant r<R<+\infty, \tag{2.15}$$

где

$$Q(y):=q(y)+q(-y),\quad y\in\mathbb{R}^+. \tag{2.16}$$

Доказательство. Для всех $b\leqslant r<R<+\infty$ имеем

$$\begin{aligned}
l_{\mu_0}^{\mathrm{rh}}(r,R)&\overset{(1.7\mathrm{r})}{=}\int_{\substack{r<|z|\leqslant R\\ \operatorname{Re}z>0}}\frac{\operatorname{Re}z}{|z|^2}\,\mathrm{d}\mu_0(z)\overset{(2.1)}{\leqslant}\int_{\substack{r<|z|\leqslant R\\ \operatorname{Re}z>0}}\frac{q(\operatorname{Im}z)}{|\operatorname{Im}z|^2}\,\mathrm{d}\mu_0(z)\\
&\overset{(2.14)}{\leqslant}\int_{r\sin\alpha}^R\frac{q(y)+q(-y)}{y^2}\,\mathrm{d}\mu_0^i(y)\overset{(3.1)}{\leqslant}\left(\int_{r\sin\alpha}^r+\int_r^R\right)\frac{Q(y)}{y^2}\,\mathrm{d}\mu_0^i(y)\\
&\overset{(2.14)}{\leqslant}C\frac{Q(r)}{r\sin^2\alpha}+\int_r^R\frac{Q(y)}{y^2}\,\mathrm{d}\mu_0^i(y)\overset{(1.8\mathrm{q})}{\leqslant}C_0+\int_r^R\frac{Q(y)}{y^2}\,\mathrm{d}\mu_0^i(y),
\end{aligned} \tag{2.17}$$

где $C_0\in\mathbb{R}^+$ не зависит от $b\leqslant r<R<+\infty$. □

По лемме 3 из неравенства (2.13) с постоянной $C_1\in\mathbb{R}^+$ получаем

$$l_\nu^{\mathrm{rh}}(r,R)\overset{(2.6)}{\leqslant}l_\mu^{\mathrm{rh}}(r,R)+\int_r^R\frac{Q(y)}{y^2}\,\mathrm{d}m(y)+c_1J_{\mathbb{R}}(r,R;q_E+q_0)+C_1, \tag{2.18}$$

где положено $m(t):=\mu_0^i(t)$. По построению m найдется некоторая постоянная $C\in\mathbb{R}^+$, с которой имеют место неравенства

$$m(t)\overset{(2.14)}{\leqslant}Ct,\quad \text{при всех } t\in\mathbb{R}^+,\quad m(t)=0 \text{ при } t\in[0,b)\neq\varnothing. \tag{2.19}$$

Лемма 4. *Пусть возрастающая функция $m\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ удовлетворяет условиям* (2.19)*, а непрерывная функция*

$$Q\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+ \quad \textit{такова, что } Q(t)=O(t) \textit{ при } t\to+\infty. \tag{2.20}$$

Тогда для любого числа $N\in\mathbb{R}^+$ найдется число $C_2\in\mathbb{R}^+$, для которого

$$\int_r^R\frac{Q(t)}{t^2}\,\mathrm{d}m(t)\leqslant C_2\int_r^R t^N\sup_{s\geqslant t}\frac{Q(s)}{s^{2+N}}\,\mathrm{d}t+C_2 \tag{2.21}$$

при всех $b\leqslant r<R<+\infty$,

Доказательство. Для интеграла из левой части (2.21) имеем

$$I:=\int_r^R\frac{Q(t)}{t^2}\,\mathrm{d}m(t)=\int_r^R\frac{Q(t)}{t^2t^N}\,\mathrm{d}\int_r^t s^N\,\mathrm{d}m(s)\leqslant\int_r^R\sup_{s\geqslant t}\frac{Q(s)}{s^{2+N}}\,\mathrm{d}\int_r^t s^N\,\mathrm{d}m(s).$$

Для подынтегрального выражения в последнем интеграле, являющегося *убывающей* функцией, ввиду (2.20) существует число C_3, для которого

$$T_N(t) := \sup_{s\geqslant t} \frac{Q(s)}{s^{2+N}} \leqslant C_3 \sup_{s\geqslant t} \frac{s}{s^{2+N}} = C_3 t^{-N-1} \text{ при всех } t \in [b, +\infty). \tag{2.22}$$

Интегрируя этот последний интеграл по частям, получаем

$$I \leqslant T_N(R) \int_r^R s^N \,\mathrm{d}m(s) + \int_r^R \int_r^t s^N \,\mathrm{d}m(s)\,\mathrm{d}\big(-T_N(t)\big). \tag{2.23}$$

С учетом (2.19) оцениваем интеграл

$$\int_r^t s^N \,\mathrm{d}m(s) \leqslant m(t)t^N \leqslant Ct^{N+1},$$

что для правой части (2.23) с учетом (2.22) дает

$$I \leqslant CC_3 + C\int_r^R t^{N+1}\,\mathrm{d}(-T_N(t)) \leqslant CC_3 + CC_3 + C(N+1)\int_r^R T_N(t)t^N \,\mathrm{d}t,$$

откуда при $C_2 := \max\{2CC_3, C(N+1)\}$ получаем в точности (2.21). □

Из (2.18) по неравенству (2.21) леммы 4 для некоторой постоянной $C_4 \in \mathbb{R}^+$

$$l_\nu^{\mathrm{rh}}(r,R) \overset{(2.6)}{\leqslant} l_\mu^{\mathrm{rh}}(r,R) + C_4 \int_r^R t^N \sup_{s\geqslant t}\frac{Q(s)}{s^{2+N}}\,\mathrm{d}t + c_1 J_{\mathbb{R}}(r,R;q_E+q_0) + C_1 \tag{2.24}$$

при всех $+\infty > R > r \geqslant \max\{r_0, b\}$, где величину $\max\{r_0, b\}$ можно заменить на r_0, увеличивая при необходимости постоянную C_1, а Q — функция из (2.16).

Лемма 5. *Пусть $r_0 > 0$. Для любой функции u из* (1.8u) *существует $C_u \in \mathbb{R}^+$, для которого при всех $r_0 \leqslant r < R < +\infty$ имеем неравенство*

$$\max\big\{l_\nu(r,R), J_{i\mathbb{R}}(r,R;u)\big\} \leqslant \min\big\{l_\nu^{\mathrm{rh}}(r,R), l_\nu^{\mathrm{lh}}(r,R), J_{i\mathbb{R}}(r,R;u)\big\} + C_u.$$

Доказательство леммы 5 сразу следует из леммы 2.

Применяя лемму 5 к функциям u и M с мерами Рисса соответственно ν и μ, из (2.24) получаем (1.10), что завершает доказательство теоремы 1.

3. Вариации заключения (1.10) теоремы 1

3.1. Некоторые упрощения. Несколько громоздко выглядящие интегралы (1.11), участвующие в правой части заключительной оценки (1.10) теоремы 1, при очень незначительных дополнительных ограничениях на функцию

$$Q_N(s) := \frac{Q(s)}{s^{2+N}}, \quad \text{где } Q(s) \overset{(2.16)}{:=} q(s) + q(-s), \quad s \in \mathbb{R}^+, \tag{3.1}$$

можно включить в наш стандартный логарифмический интеграл $J_{\mathbb{R}}$ вида (1.5r), уже участвующий в правой части оценки (1.10).

Предложение 1. *Пусть существует некоторый интервал $(A, +\infty) \neq \varnothing$, на котором выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:*

(i) *функция Q_N из* (3.1) *убывающая на $(A, +\infty)$;*
(ii) *функция Q из* (2.16) *непрерывно дифференцируема на $(A, +\infty)$ со свойством*

$$\limsup_{y\to+\infty} \frac{yQ'(y)}{Q(y)} < +\infty. \tag{3.2}$$

Тогда найдутся числа $r_0 > 0$, $N \in \mathbb{R}^+$ *и* $C \in \mathbb{R}^+$, *для которых*

$$I_N(r, R; q) \overset{(1.11)}{:=} \int_r^R t^N \sup_{s \geqslant t} Q_N(s)\, \mathrm{d}t \leqslant C \int_r^R \frac{Q(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t \overset{(1.5\mathrm{r})}{=} C J_{\mathbb{R}}(r, R; q). \tag{3.3}$$

В частности, последний интеграл в (1.10) *можно заменить на* $J_{\mathbb{R}}(r, R; q)$, *а заключительную оценку* (1.10) *в теореме* 1 *можно записать как*

$$\max\{l_\nu(r, R), J_{i\mathbb{R}}(r, R; u)\} \leqslant \min\{l_\mu^{\mathrm{rh}}(r, R), l_\mu^{\mathrm{lh}}(r, R), J_{i\mathbb{R}}(r, R; M)\} \\ + C J_{\mathbb{R}}(r, R; q_0 + q_E + q) + C \quad \textit{при всех } r_0 \leqslant r < R < +\infty, \tag{3.4}$$

Доказательство. Если функция (3.1) убывающая на $(A, +\infty)$, то, очевидно,

$$t^N \sup_{s \geqslant t} Q_N(s) \overset{(3.1)}{=} t^N \frac{Q(t)}{t^{2+N}} = \frac{Q(t)}{t^2}$$

при всех $t > A$ и при выборе $r_0 > A$ получаем в точности (3.3).

Для непрерывно дифференцируемой функции Q, удовлетворяющей условию (3.2), найдется такое $C_4 \in \mathbb{R}^+$, что $sQ'(s) \leqslant C_5 Q(s)$ при всех $s \geqslant b$. Производная функции из (3.1)

$$Q_N'(s) = \frac{Q'(s)s - (2+N)Q(s)}{s^{3+N}} \leqslant \frac{C_5 Q(s) - (2+N)Q(s)}{s^{3+N}},$$

при выборе $N \geqslant C_5 - 2$ отрицательна, и функция Q_N из (3.1) убывающая. □

Из предложения 1 сразу получаем следующее очевидное

Следствие 1. *Если в условиях* (i) *или* (ii) *предложения* 1 *для некоторого числа* $r_0 > 0$ *имеет место соотношение*

$$\sup_{r_0 \leqslant r < R < +\infty} J_{\mathbb{R}}(r, R; q_0 + q_E + q) < +\infty,$$

то заключительную оценку (1.10) *в теореме* 1 *можно записать как*

$$\max\{l_\nu(r, R), J_{i\mathbb{R}}(r, R; u)\} \overset{(3.4)}{\leqslant} \min\{l_\mu^{\mathrm{rh}}(r, R), l_\mu^{\mathrm{lh}}(r, R), J_{i\mathbb{R}}(r, R; M)\} + C$$

при всех $r_0 \leqslant r < R < +\infty$.

При известной асимптотике функций q_0, q_E, q при приближении к $\pm\infty$ также можно упростить заключительную оценку (1.10) теоремы 1. Вариант —

Предложение 2. *Пусть для функции* $P\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, *ограниченной и интегрируемой по Риману на каждом ограниченном интервале* $I \subset \mathbb{R}^+$, *выполнено условие*

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{P(t)}{t} = 0. \tag{3.5}$$

Тогда для любого числа $r_0 > 0$ *найдется убывающая функция* $d\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, *для которой*

$$\lim_{R \to +\infty} d(R) = 0, \qquad \int_r^R \frac{P(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t \leqslant d(R) \ln \frac{R}{r} \quad \textit{при всех } r_0 \leqslant r < R < +\infty. \tag{3.6}$$

В частности, если для функций q_0, q, q_E *из* (1.8_0), (1.8q), (1.9E) *выполнены условия*

$$\limsup_{|y| \to +\infty} \frac{q_0(y) + q(y) + q_E(y)}{|y|} = 0, \qquad \sup_{[-R,R]} q_0 < +\infty \qquad \textit{для любого } R \in \mathbb{R}^+,$$

а также функция q_0 локально интегрируема по Риману, то заключительную оценку (1.10) *в теореме* 1 *можно записать как*

$$\max\bigl\{l_\nu(r,R), J_{i\mathbb{R}}(r,R;u)\bigr\} \overset{(3.4)}{\leqslant} \min\bigl\{l^{\mathrm{rh}}_\mu(r,R), l^{\mathrm{lh}}_\mu(r,R), J_{i\mathbb{R}}(r,R;M)\bigr\} + d(R)\ln\frac{R}{r} + C \quad \textit{при всех } r_0 \leqslant r < R < +\infty.,$$

где d — убывающая функция, для которой $d(R) = o(1)$ при $R \to +\infty$.

Доказательство. Сначала перейдем к *убывающей* к нулю ввиду (3.5) функции

$$p(t) := \sup_{s\geqslant t} \frac{P(s)}{s} \geqslant \frac{P(t)}{t},\ t \in \mathbb{R}^+; \quad \int_r^R \frac{p(t)}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_r^R \frac{P(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t. \tag{3.7}$$

При каждом фиксированном числе $R > 0$ положим

$$d(R) := \sup_{r_0\leqslant r<R} \frac{1}{\ln(R/r)}\int_r^R \frac{p(t)}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{\ln(R/r)}\int_r^R \frac{p(t)}{t}\,\mathrm{d}t \overset{(3.7)}{\geqslant} \frac{1}{\ln(R/r)}\int_r^R \frac{P(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{при всех значениях } r_0 \leqslant r < R < +\infty, \tag{3.8}$$

что дает последнее соотношение-неравенство из (3.6).

Точная верхняя грань в (3.8) берется от функции с частными производными

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\ln(R/r)}\int_r^R \frac{p(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{r\ln^2(R/r)}\int_r^R \frac{p(t)-p(r)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant 0 \quad \text{при } r_0 \leqslant r < R,$$
$$\frac{\partial}{\partial R}\frac{1}{\ln(R/r)}\int_r^R \frac{p(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{R\ln^2(R/r)}\int_r^R \frac{p(R)-p(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant 0 \quad \text{при } r_0 \leqslant r < R,$$

откуда эта функция убывает по $r < R$ и по $R > r$. Следовательно,

$$d(R) \equiv \frac{1}{\ln(R/r_0)}\int_{r_0}^R \frac{p(t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{— убывающая функция на } [r_0, +\infty). \tag{3.9}$$

Пусть выбрано число $a > 0$ и $p(t) \leqslant a$ при $t \geqslant R_a$. Тогда из (3.9) при $R > R_a \geqslant r_0$ имеем

$$d(R) = \frac{1}{\ln(R/r_0)}\left(\int_{r_0}^{R_a} + \int_{R_a}^R\right)\frac{p(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\bigl(\sup_{[r_0,R_a]} p\bigr)\ln(R_a/r_0)}{\ln(R/r_0)} + a\frac{\ln(R/R_a)}{\ln(R/r_0)}.$$

Отсюда $\limsup_{R\to+\infty} d(R) \leqslant a$, что в силу произвола в выборе числа $a > 0$ дает соотношение $d(R) = o(1)$ при $R \to +\infty$. □

3.2. Логарифмические меры и субмеры интервалов. Понятиям логарифмических мер интервалов (1.7r), (1.7l) и логарифмической субмеры интервалов (1.7m) из определения 2 можно придать и иную форму.

Определение 3. Пусть $\mu \in \mathsf{Meas}^+$. Введем в рассмотрение *считающую функцию меры μ с 2π-периодической борелевской положительной функцией-весом $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$:*

$$\mu(r;k) := \int_{\overline{D}(r)} k(\arg z)\,\mathrm{d}\mu(z), \tag{3.10}$$

При $k \equiv 1$, очевидно, $\mu(r;1) \overset{(1.12)}{\equiv} \mu^{\mathrm{rad}}(r)$ для $r \in \mathbb{R}^+$.

В частных случаях $k = \cos^{\pm}$, т. е.

$$k(\theta) := \cos^+\theta := \max\{0, \cos\theta\},\ k(\theta) := \cos^-\theta := \max\{0, -\cos\theta\}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{3.11}$$

из определений (1.7) в обозначениях (3.10)–(3.11) при $0 < r < R < +\infty$ интегрированием по частям получаем

$$l_\mu^{\rm rh}(r,R) \overset{(1.7r)}{=} \int_r^R \frac{{\rm d}\mu(t;\cos^+)}{t} \tag{3.12r}$$

$$= \frac{\mu(R;\cos^+)}{R} - \frac{\mu(r;\cos^+)}{r} + \int_r^R \frac{\mu(t;\cos^+)}{t^2}\,{\rm d}t,$$

$$l_\mu^{\rm lh}(r,R) \overset{(1.7l)}{=} \int_r^R \frac{1}{t}\,{\rm d}\mu(t;\cos^-) \tag{3.12l}$$

$$= \frac{\mu(R;\cos^-)}{R} - \frac{\mu(r;\cos^-)}{r} + \int_r^R \frac{\mu(t;\cos^-)}{t^2}\,{\rm d}t.$$

Положим

$$\breve{l}_\mu^{\rm rh}(r,R) \overset{(3.12r)}{:=} \int_r^R \frac{\mu(t;\cos^+)}{t^2}\,{\rm d}t, \quad 0 < r < R < +\infty, \tag{3.13r}$$

$$\breve{l}_\mu^{\rm lh}(r,R) \overset{(3.12l)}{:=} \int_r^R \frac{\mu(t;\cos^-)}{t^2}\,{\rm d}t, \quad 0 < r < R < +\infty, \tag{3.13l}$$

$$\breve{l}_\mu(r,R) \overset{(1.7m)}{:=} \max\{\breve{l}_\mu^{\rm lh}(r,R), \breve{l}_\mu^{\rm rh}(r,R)\}, \quad 0 < r < R < +\infty. \tag{3.13m}$$

Предложение 3. *Пусть $\mu \in \mathsf{Meas}^+$ — мера конечной верхней плотности, или конечного типа $\mathsf{type}[\mu] \overset{(1.12)}{<} +\infty$, число $r_0 > 0$. Тогда*

$$\begin{cases} \bigl|\breve{l}_\mu^{\rm rh}(r,R) - l_\mu^{\rm rh}(r,R)\bigr| = O(1) \\ \bigl|\breve{l}_\mu^{\rm lh}(r,R) - l_\mu^{\rm lh}(r,R)\bigr| = O(1) \\ \bigl|\breve{l}_\mu(r,R) - l_\mu(r,R)\bigr| = O(1) \end{cases} \quad \text{для всех } r_0 \leqslant r < R < +\infty. \tag{3.14}$$

Кроме того, для любых фиксированных чисел $a \in (0,1]$, $b \in [1,+\infty)$

$$\begin{cases} \bigl|l_\mu^{\rm rh}(r,R) - l_\mu^{\rm rh}(ar,bR)\bigr| = O(1) \\ \bigl|l_\mu^{\rm lh}(r,R) - l_\mu^{\rm lh}(ar,bR)\bigr| = O(1) \\ \bigl|l_\mu(r,R) - l_\mu(ar,bR)\bigr| = O(1) \end{cases} \quad \text{для всех } r_0 \leqslant r < R < +\infty. \tag{3.15}$$

Доказательство. Соотношения (3.14) следуют из (3.12), так как для $r_0 > 0$ и меры μ конечной верхней плотности имеют место соотношения

$$\left|\frac{\mu(R;\cos^\pm)}{R} - \frac{\mu(r;\cos^\pm)}{r}\right| \leqslant \frac{|\mu|^{\rm rad}(R)}{R} + \frac{|\mu|^{\rm rad}(r)}{r} = O(1) \quad \text{при } r_0 \leqslant r < R < +\infty.$$

Соотношения (3.15) следуют из (3.14) и из неравенства

$$\bigl|\breve{l}_\mu^{\rm rh}(ar,bR) - \breve{l}_\mu^{\rm rh}(r,R)\bigr| \leqslant \sup_{ar<t\leqslant r} \frac{|\mu|^{\rm rad}(t)}{t} \ln\frac{1}{a} + \sup_{R<t\leqslant bR} \frac{|\mu|^{\rm rad}(t)}{t} \ln b,$$

где в левой части $\breve{l}^{\rm rh}$ можно заменить на $\breve{l}^{\rm lh}$. □

Замечание 3. По предложению 3 согласно соотношениям (3.14) и замечанию 1 различные логарифмические меры и субмеры интервалов (1.7r), (1.7l), (1.7m) из определения 2, начинающиеся с l, в заключении (1.10) теоремы 1 можно заменить на соответствующие им по (3.14) *функции интервалов* (3.13r), (3.13l), (3.13m), начинающиеся с $\breve{l}$, для которых используем ту же терминологию. Далее эти две эквивалентные с точностью до аддитивной постоянной формы логарифмических мер и субмер интервалов для мер конечной верхней плотности можем не различать и обозначать как в определении 1.7 без верхнего математического акцента $\breve{}$ над l.

Определение 4 ([18], развитие [3, определения 3.4, 3.5])**.** Пусть $0 < r_0 \in \mathbb{R}^+$, l — функция интервалов $(r, R] \subset r_0 + \mathbb{R}^+$ со значениями в $\mathbb{R}_{\pm\infty}$, $l(r, R) := l\bigl((r, R]\bigr)$. Определим для l четыре *логарифмические блок-плотности:*

$$\text{ln-}\overline{\text{dens}}(l) := \limsup_{a\to+\infty} \frac{1}{\ln a} \limsup_{r\to+\infty} l(r, ar); \tag{3.16$^-$}$$

$$\text{ln-}\underline{\text{dens}}(l) := \liminf_{a\to+\infty} \frac{1}{\ln a} \limsup_{r\to+\infty} l(r, ar); \tag{3.16$_-$}$$

$$\text{ln-dens}_{\inf}(l) := \inf_{a>1} \frac{1}{\ln a} \limsup_{r\to+\infty} l(r, ar); \tag{3.16i}$$

$$\text{ln-dens}_{\text{b}}(l) := \inf\left\{ b \in \mathbb{R}^+ \colon \sup_{r_0\leqslant r<R<+\infty} \left(l(r, R) - b \ln \frac{R}{r} \right) < +\infty \right\}. \tag{3.16b}$$

Функцию интервалов $l \geqslant 0$ называем *логарифмической субмерой интервалов* (вблизи $+\infty$), если для некоторого числа $r_0 > 0$ выполнены два условия:

[l1] $\sup_{r\geqslant r_0} l(r, 2r) < +\infty$ *(логарифмический рост)*;

[l2] $l(r_1, r_3) \leqslant l(r_1, r_2) + l(r_2, r_3)$ для всех $r_0 \leqslant r_1 < r_2 < r_3 < +\infty$ *(субаддитивность)*.

Если в первом неравенстве из [l2] для некоторого числа $r_0 > 0$ знак $\leqslant$ можно заменить на знак $=$ для любых $r_0 \leqslant r_1 < r_2 < r_3 < +\infty$ *(аддитивность)*, то функцию интервалов l называем *логарифмической мерой интервалов* (вблизи $+\infty$).

Из определения 4 легко следуют

Предложение 4. *Если $c \in \mathbb{R}^+$, а l_1 и l_2 — логарифмические субмеры интервалов, то cl_1, $l_1 + l_2$ и $\max\{l_1, l_2\}$ — логарифмические субмеры интервалов.*

Предложение 5. *Для функций q_0 из* (1.8$_0$) *при условии*

$$\limsup_{|y|\to+\infty} \frac{q_0(y)}{|y|} < +\infty, \tag{3.17}$$

а также функций q из (1.8q) *и q_E из* (1.9E) *интегралы $J_{\mathbb{R}}(r, R; q_0)$, $J_{\mathbb{R}}(r, R; q)$, $J_{\mathbb{R}}(r, R; q_E)$ — логарифмические меры интервалов $(r, R] \subset \mathbb{R}^+$. Если $\mu \in \mathsf{Meas}^+$ — мера конечной верхней плотности, то l_μ^{rh} и l_μ^{lh} из* (1.7r) *и* (1.7l)*, а также $\breve{l}_\mu^{\text{rh}}$ и $\breve{l}_\mu^{\text{lh}}$ из* (3.13r) *и* (3.13l) *— логарифмические меры интервалов, а l_μ из* (1.7m) *и $\breve{l}_\mu$ из* (3.13m) *— логарифмические субмеры интервалов.*

Предложение 6 ([18, теорема 1])**.** *Для логарифмической субмеры интервалов $l \geqslant 0$ все четыре логарифмические блок-плотности из* (3.16) *конечны и совпадают, а верхний предел $\limsup\limits_{a\to+\infty}$ в* (3.16$^-$) *и нижний предел $\liminf\limits_{a\to+\infty}$ в* (3.16$_-$) *можно заменить на обычный предел $\lim\limits_{a\to+\infty}$. Далее для логарифмической субмеры интервалов $l \geqslant 0$ все четыре логарифмические блок-плотности из* (3.16) *обозначаем единообразно как* ln-dens(l).

В терминах логарифмической блок-плотности ln-dens имеет место

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1.8) *и* (1.9) *теоремы* 1*, а также условие* (3.17)*. Кроме того, пусть для функции $Q(y) := q(y) + q(-y)$ из* (2.16)*, или из* (3.1)*, выполнено одно из условий* (i) *или* (ii) *со свойством* (3.2) *предложения* 1*, а также*

$$\text{ln-dens}\bigl(J_{\mathbb{R}}\bigl(\cdot, \cdot, q_0 + q + q_E\bigr)\bigr) = 0. \tag{3.18}$$

Тогда

$$\text{ln-dens}(l_\nu) \leqslant \min\bigl\{\text{ln-dens}(l_\mu^{\mathrm{rh}}), \text{ln-dens}(l_\mu^{\mathrm{lh}})\bigr\} \leqslant \text{ln-dens}(l_\mu). \tag{3.19}$$

Доказательство. Заключение (1.10) теоремы 1 при дополнительных условиях (i) или (ii) со свойством (3.2) из предложения 1 переходит в заключение (3.4) предложения 1, которое, в частности, для любого $a > 1$ можно записать как

$$l_\nu(r, ar) \leqslant \min\bigl\{l_\mu^{\mathrm{rh}}(r, ar), l_\mu^{\mathrm{lh}}(r, ar)\bigr\} + CJ_{\mathbb{R}}(r, ar; q_0 + q_E + q) + C \quad \text{при всех } r \geqslant r_0.$$

Отсюда, устремив r к $+\infty$, получаем

$$\limsup_{r\to+\infty} l_\nu(r, ar) \leqslant \min\Bigl\{\limsup_{r\to+\infty} l_\mu^{\mathrm{rh}}(r, ar), \limsup_{r\to+\infty} l_\mu^{\mathrm{lh}}(r, ar)\Bigr\} \\ + C \limsup_{r\to+\infty} CJ_{\mathbb{R}}(r, ar; q_0 + q_E + q) + C,$$

Поделив обе части последнего неравенства на $\ln a$ и устремив a к $+\infty$, в обозначениях определения (3.16^-) получаем цепочку (не)равенств

$$\text{ln-}\overline{\text{dens}}(l_\nu) \leqslant \min\bigl\{\text{ln-}\overline{\text{dens}}(l_\mu^{\mathrm{rh}}), \text{ln-}\overline{\text{dens}}(l_\mu^{\mathrm{lh}})\bigr\} + C\,\text{ln-}\overline{\text{dens}} J_{\mathbb{R}}(\cdot, \cdot; q_0 + q_E + q) \\ \overset{(3.18)}{=} \min\bigl\{\text{ln-}\overline{\text{dens}}(l_\mu^{\mathrm{rh}}), \text{ln-}\overline{\text{dens}}(l_\mu^{\mathrm{lh}})\bigr\} \overset{(1.7\mathrm{m})}{\leqslant} \text{ln-}\overline{\text{dens}}(l_\mu),$$

что по предложению 6 о совпадении всех четырех логарифмических блок-плотностей из определений (3.16) дает в точности (3.19). □

Для *нулевой ц.ф.э.т.* 0 по определению множество ее нулей $\mathsf{Zero}_0 = \mathbb{C}$, а считающая мера $n_{\mathsf{Zero}_0}(S) \overset{(1.6)}{=} +\infty$ для каждого $S \subset \mathbb{C}$. В частности, $\text{ln-dens}(l_{\mathsf{Zero}_0}) = +\infty$.

Отметим вытекающую из теоремы 1 теорему единственности для ц.ф.э.т.:

Теорема 3. *Пусть* $\mathsf{Z} = \{\mathsf{z}_k\}_{k=1,2,\dots} \subset \mathbb{C}$ — *последовательность комплексных точек конечной верхней плотности в смысле* (1.12), *т. е.*

$$n_{\mathsf{Z}}^{\mathrm{rad}}(r) \overset{(1.6)}{:=} n_{\mathsf{Z}}\bigl(D(r)\bigr) = O(r) \quad \text{при } r \to +\infty,$$

с логарифмической субмерой интервалов

$$l_{\mathsf{Z}}(r, R) := \max\left\{\sum_{\substack{r<|\mathsf{z}_k|\leqslant R\\ \operatorname{Re}\mathsf{z}_k>0}} \operatorname{Re}\frac{1}{\mathsf{z}_k}, \sum_{\substack{r<|\mathsf{z}_k|\leqslant R\\ \operatorname{Re}\mathsf{z}_k<0}} \operatorname{Re}\Bigl(-\frac{1}{\mathsf{z}_k}\Bigr)\right\} \overset{(1.7)}{=} l_{n_{\mathsf{Z}}}(r, R).$$

Пусть выполнены условия (1.8M), (1.8_0), (1.8q), (1.9E), (3.17), *а ц.ф.э.т.* f *обращается в нуль на* Z *в том смысле, что* $n_{\mathsf{Zero}_f} \geqslant n_{\mathsf{Z}}$, *и для каждого* $y \in \mathbb{R}^+ \setminus E$ *выполнено неравенство*

$$\ln\bigl|f(iy)f(-iy)\bigr| \leqslant \mathsf{C}_M\bigl(iy, q(y)\bigr) + \mathsf{C}_M\bigl(-iy, q(-y)\bigr) + q_0(y) + q_0(-y). \tag{3.20}$$

Если выполнено (3.18) *и при этом* $\text{ln-dens}(l_{\mathsf{Z}}) > \text{ln-dens}\bigl(J_{i\mathbb{R}}(\cdot, \cdot; M)\bigr)$, *то* $f = 0$.

Доказательство. Предположим, что $f \neq 0$, и положим $u := \ln|f|$. Тогда имеет место (1.8u) с $\nu := n_{\mathsf{Z}}$. Из (3.20) по предложению 1 при $a > 1$ из (3.4) имеем

$$l_{\mathsf{Z}}(r, ar) = l_{n_{\mathsf{Z}}}(r, ar) \leqslant J_{i\mathbb{R}}(r, ar; M) + CJ_{\mathbb{R}}(r, ar; q_0 + q_E + q) + C \quad \text{при } r \geqslant r_0.$$

Устремляя здесь r к $+\infty$, затем, после деления на $\ln a$, устремляя a к $+\infty$, по предложению 5 и определению (3.16) ввиду (3.18) получаем

$$\text{ln-dens}(l_{\mathsf{Z}}) = \text{ln-}\overline{\text{dens}}(l_{\mathsf{Z}}) \leqslant \text{ln-}\overline{\text{dens}}\bigl(J_{i\mathbb{R}}(\cdot, \cdot; M)\bigr) = \text{ln-dens}\bigl(J_{i\mathbb{R}}(\cdot, \cdot; M)\bigr),$$

что по предложению 6 противоречит условию $\text{ln-dens}(l_{\mathsf{Z}}) > \text{ln-dens}\bigl(J_{i\mathbb{R}}(\cdot, \cdot; M)\bigr)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейман У., Кеннеди П. *Субгармонические функции.* М.: Мир. 1980.
2. Th. Ransford *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
3. P. Malliavin, L.A. Rubel *On small entire functions of exponential type with given zeros* // Bull. Soc. Math. France. **89**:2, 175–201 (1961).
4. L.A. Rubel (with J.E. Colliander) *Entire and Meromorphic Functions*, Springer-Verlag, New York (1996).
5. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Матем. сб. **88(130)**:1(5), 3–30, (1972).
6. Хабибуллин Б.Н. *О малости роста на мнимой оси целых функций экспоненциального типа с заданными нулями* // Матем. заметки. **43**:5, 644–650 (1988).
7. Хабибуллин Б.Н. *О росте целых функций экспоненциального типа с нулями вблизи прямой* // Матем. заметки. **70**:4, 621–635 (2001).
8. Хабибуллин Б.Н. *О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси* // Докл. Акад. Наук СССР. **302**:2, 270–273 (1988).
9. Хабибуллин Б.Н. *О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси* // Матем. сб. **180**:5, 706–719 (1989).
10. Хабибуллин Б.Н. *О росте вдоль прямой целых функций экспоненциального типа с заданными нулями* // Analysis Math. **17**:3, 239–256 (1991).
11. Хабибуллин Б.Н. *Распределение нулей целых функций и выметание.* Дисс. ... доктора физ.-матем. наук (Украина, Харьков, ФТИНТ, 1993; РФ, Санкт-Петербург, ПОМИ РАН, 1994). Уфа. 300 стр. 1992. https://www.researchgate.net/publication/265455939
12. Хабибуллин Б.Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности*, изд. 4-ое доп., Уфа: РИЦ БашГУ. 2012. https://www.researchgate.net/publication/271841461
13. Хабибуллин Б.Н. , Шмелева А.В. *Выметание мер и субгармонических функций на систему лучей. I. Классический случай* // Алгебра и анализ. **31**:1, 156–210 (2019).
14. Ландкоф Н.С. *Основы современной теории потенциала.* М.: Наука. 1966.
15. V.S. Azarin *Growth Theory of Subharmonic Functions*, Birkhäser: Basel–Boston–Berlin (2009).
16. Гришин А.Ф., Малютина Т.И. *Новые формулы для индикаторов субгармонических функций* // Матем. физ., анал., геом. **12**:1, 25–72 (2005).
17. Хабибуллин Б.Н., Шмелева А.В., Абдуллина З.Ф. *Выметание мер и субгармонических функций на систему лучей. II. Выметания конечного рода и регулярность роста на одном луче* // Алгебра и анализ. **32**:1, 208–243 (2020).
18. Каримов М.Р., Хабибуллин Б.Н. *Совпадение некоторых плотностей распределения множеств и полнота систем целых функций* // Труды международной конференции «Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы». III. Анализ и дифференциальные уравнения. **III**. Ред. С.Г. Мерзляков. Институт математики с вц УНЦ РАН. Уфа. 29–34. 2000. https://www.researchgate.net/publication/291829910

Анна Евгениевна Салимова,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: anegorova94@bk.ru

Булат Нурмиевич Хабибуллин,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: khabib-bulat@mail.ru