ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 2 (2020). С. 28-34.

УДК 512.5

О СЕМЕЙСТВАХ ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

О.Э. МИРЗАЕВ, А.Б. ХАСАНОВ

Аннотация. Работа посвящена обратной спектральной задаче об описании всех краевых задач Штурма-Лиувилля на конечном отрезке с одним и тем же спектром. Такие краевые задачи называются изоспектральными и были изучены в работах E.L. Isaacson, H.P. McKean, B.E. Dahlberg, E. Trubowitz, M. Jodeit, B.M. Levitan, Y.A. Ashrafyan, T.N. Harutyunyan. В настоящее время имеются разные методы решения обратных спектральных задач: метод оператора преобразования, т.е. метод Гельфанда-Левитана, метод спектральных отображений, метод эталонных моделей и другие. В.А. Марченко показал, что оператор Штурма-Лиувилля на конечном отрезке определяется однозначно по его собственным значениям и последовательности нормирующих констант, т.е. по спектральной функции. И.М. Гельфандом и Б.М. Левитаном были найдены необходимые и достаточные условия восстановления краевых задач Штурма-Лиувилля по их спектральным функциям. Этот метод основан на восстановлении потенциала и краевых условий по спектральным данным с помощью интегрального уравнения Фредгольма второго рода с параметрами. При построении изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля с заданным спектром $n^2, n \geq 0$, нами использован метод Гельфанда-Левитана. Основным результатом работы является алгоритм, восстановления семейства краевых задач $L = L(q(x), h, H)$ Штурма-Лиувилля, спектры которых удовлетворяют условию $\sigma(L) = \{n^2, n \geq o\}$. При этом найденные коэффициенты $q = q(x, \gamma_1, \gamma_2, \ldots), h = h(\gamma_1, \gamma_2, \ldots), H = H(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ зависят от бесконечного числа параметров $\gamma_j, j = \overline{1, \infty}$.

Ключевые слова: Задача Штурма-Лиувилля, собственные значения, нормирующие константы, спектральные данные, обратная спектральная задача, интегральное уравнение, изоспектраьные операторы.

Mathematics Subject Classification: 34A55, 34K10, 34K29, 47E05, 34B10, 34L40

1. Введение

Определение 1.1. *Краевые задачи Штурма-Лиувилля*

$$L^0 y \equiv -y'' = \lambda y, (0 < x < \pi)$$

$$y'(0) = 0, y'(\pi) = 0 \tag{1.1}$$

и

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, (0 < x < \pi)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \tag{1.2}$$

O.E. Mirzaev, A.B. Khasanov, On families of isospectral Sturm-Liouville boundary value problems.

Работа выполнена при финансовой поддержке фундаментального проекта OT-F4 -04(05)Министерство Инновационного развития Республики Узбекистан.

Поступила 24 октября 2019 г.

называются изоспектральными, если они имеют одинаковые собственные значения, т.е. $\sigma(L) = \sigma(L^0) = \{n^2,\ n \geq 0\}$.

Здесь $q(x) \in C[0,\,\pi]$ – действительная непрерывная функция на отрезке $[0,\,\pi]$, h и H конечные действительные числа.

В данной работе восстанавливается семейство краевых задач $L = L(q(x),\,h,\,H)$ Штурма-Лиувилля с граничными условиями (1.2), спектры которых удовлетворяют условию $\sigma(L) = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} = \{n^2, n \geq 0\}$.

2. Некоторые сведения об обратной спектральной задаче

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$L(q(x), h, H) \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, (0 < x < \pi), \tag{2.1}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \tag{2.2}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{2.3}$$

где $q(x) \in C[0,\pi]$, λ – спектральный параметр.

Обозначим через $\phi(x,\lambda)$ решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\phi(0,\lambda) = 1, \phi'(0,\lambda) = h. \tag{2.4}$$

Хорошо известно [3], что решение $\phi(x,\lambda)$ задачи (2.1), (2.4) существует, единственно и для каждого фиксированного $x \in [0,\pi]$ является целой функцией по λ. Кроме того, имеет место интегральное представление

$$\phi(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^x K(x,t)\cos\sqrt{\lambda}t dt, \tag{2.5}$$

$$K(x,x) = h + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt. \tag{2.6}$$

Очевидно, что $\phi(x,\lambda)$ при любом λ удовлетворяет граничному условию (2.2). Поэтому собственные значения λ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ задачи (2.1)–(2.3) суть корни уравнения

$$\Delta(\lambda) = \phi'(\pi,\lambda) + H\phi(\pi,\lambda) = 0, \tag{2.7}$$

а соответствующая собственная функция $\phi(x,\lambda_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Положим

$$\alpha_n = \int_0^\pi \phi^2(x,\lambda_n)dx. \tag{2.8}$$

Числа α_n называются нормировочными числами краевой задачи (2.1)–(2.3). Набор чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ будем называть в дальнейшем спектральными данными задачи (2.1)–(2.3).

Теорема 2.1. *([3],[9]). Для спектральных данных* $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ *задачи* (2.1)–(2.3) *справедливы равенства*

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{c}{n\pi} + \frac{\gamma_n}{n},\ \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta_n}{n};\ \{\gamma_n\}, \{\beta_n\} \in l_2, \tag{2.9}$$

$$c = h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt, \tag{2.10}$$

$$\phi(x,\lambda_n) = \cos nx + \frac{\xi_n(x)}{n}, |\xi_n| \leq M. \tag{2.11}$$

Хорошо известно, что собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны и для произвольных функций $f(x) \in L^2(0,\pi)$ имеет место

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^{\pi} f(t)\phi(t,\lambda_n)dt\right)\phi(x,\lambda_n). \tag{2.12}$$

Отсюда получим символическое равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi(t,\lambda_n)\phi(x,\lambda_n)}{\alpha_n}=\delta(t-x), \tag{2.13}$$

где $\delta(x)$ – дельта функция Дирака. В частности, при $q(x)\equiv 0$, $h=0$, $H=0$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx\cos nt}{\alpha_n^0}=\delta(t-x), \tag{2.14}$$

где

$$\alpha_n^0=\begin{cases}\pi, n=0\\ \frac{\pi}{2}, n\geq 1.\end{cases} \tag{2.15}$$

Теорема 2.2. *(В.А. Марченко [1]). Потенциал $q(x)$ и коэффициенты h, H краевой задачи* (2.1)–(2.3) *определяются однозначно по спектральным данным $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$.*

Лемма 2.1. *([2]). Имеет место тождество*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi(x,\lambda_n)\cos\sqrt{\lambda_n}t}{\alpha_n}=0, 0<t<x. \tag{2.16}$$

Теорема 2.3. *(И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан [2]). Ядро $K(x,t)$ оператора преобразования* (2.5) *удовлетворяет интегральному уравнению*

$$K(x,t)+F(x,t)+\int_0^x K(x,s)F(s,t)ds=0,\ (0<t<x), \tag{2.17}$$

где

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x\ cos\sqrt{\lambda_n}t-\frac{1}{\alpha_n^0}\cos nx\cos nt\right\}. \tag{2.18}$$

Теорема 2.4. *(И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан [2],[9]). Для того чтобы последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ была спектральным данным некоторой краевой задачи вида* (2.1)–(2.3) *с потенциалом $q(x)\in L^2(0,\pi)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (2.9).

Пусть $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют условия (2.9). Построим функцию $F(x,t)$ по формуле (2.18) и рассмотрим семейство интегральных уравнений (2.17) относительно $K(x,t)$.

Теорема 2.5. *([2]). При каждом фиксированном $x\in(0,\pi)$ интегральное уравнение* (2.17) *имеет единственное решение $K(x,t)\equiv K_x(t)$.*

Решая уравнение (2.17), находим $K(x,t)$. Далее определим функцию $\phi(x,\lambda)$ по формуле (2.5). Тогда функция $\phi(x,\lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\phi''+q(x)\phi=\lambda\phi,(0<x<\pi), \tag{2.19}$$

и начальным условиям

$$\phi(0,\lambda)=1,\phi'(0,\lambda)=K(0,0)=-F(0,0)=h, \tag{2.20}$$

где

$$q(x)=2\frac{d}{dx}K(x,x). \tag{2.21}$$

$$H = c - h - \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt. \tag{2.22}$$

3. Алгоритм восстановления изоспектральных краевых задач

1) Пусть

$$\lambda_n = n^2, n \geq 0; \alpha_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, n \geq k \\ a_{k-1}, n = k-1, \\ \dots \\ a_1, n = 1, \\ a_0, n = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

где $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ — заданные положительные числа.

Легко заметить, что последовательность $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, определенная равенствами (3.1), удовлетворяет условиям теоремы 2.4. Поэтому существует единственная краевая задача $L(q(x), h, H) = L(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$ вида (2.1)–(2.3) с коэффициентами

$$\begin{aligned} &q(x) = q(x, a_0, a_1, \dots, a_{k-1}) \in L^2(0,\pi), \\ &h = h\left(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\right), H = H\left(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

В этом случае спектр семейства граничных задач $L(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$ удовлетворяет равенству $\sigma(L(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})) = \{n^2, n \geq 0\}$. Далее находим коэффициенты (3.2) краевых задач

$$L(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})y = -y'' + q(x, a_0, a_1, \dots, a_{k-1})y = \lambda y, \tag{3.3}$$

$$y'(0) - h\left(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\right) y(0) = 0,\ y'(\pi) + H(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}) y(\pi) = 0. \tag{3.4}$$

Сначала определим $F(x,t)$ по формулам (2.18) и (3.1)

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{k-1} b_n \cos nx \cos nt, \tag{3.5}$$

где

$$b_n = \frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_n^0}, \alpha_n^0 = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, n \geq 1, \\ \pi, n = 0. \end{cases}$$

Затем, подставляя (3.5) в интегральное уравнение (2.17), получим

$$K(x,t) = -F(x,t) - \int_0^x K(x,s)F(s,t)ds = -\sum_{n=0}^{k-1} b_n \cos nt \phi(x, \lambda_n), \tag{3.6}$$

где

$$\phi\left(x, \lambda_n\right) = \cos nx + \int_0^x K\left(x, s\right) \cos nsds. \tag{3.7}$$

Далее, учитывая формулы (2.20) и (2.21), находим

$$h = h(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}) = -F\left(0, 0\right) = -\sum_{n=0}^{k-1} b_n, \tag{3.8}$$

$$q(x) = q(x, a_0, a_1, \dots, a_{k-1}) = -2\sum_{n=0}^{k-1} b_n \{\cos nx \varphi(x, \lambda_n)\}'. \tag{3.9}$$

Подставляя выражение (3.6) в формулу (3.7), имеем

$$\phi\left(x, \lambda_n\right) = \cos nx - \sum_{p=0}^{k-1} b_p \phi\left(x, \lambda_p\right) \left\{\int_0^x \cos nt \cos ptdt\right\}, 0 \leq n \leq k-1 \tag{3.10}$$

Отсюда, дифференцируя по x, получим

$$\begin{gathered}\phi'\left(x,\lambda_n\right)=-n\sin nx-\sum_{p=0}^{k-1}b_p\phi'(x,\lambda_p)\left\{\int_0^x\cos nt\cos ptdt\right\}-\\-\sum_{p=0}^{k-1}b_p\phi(x,\lambda_p)\cos px\cos nx.\end{gathered}\tag{3.11}$$

Наконец, в вышеуказанных формулах (3.10) и (3.11), полагая $x=\pi$, сначала получим

$$\phi\left(\pi,\lambda_n\right)=\left(-1\right)^n-b_n\phi\left(\pi,\lambda_n\right)\alpha_n^0,$$

$$\phi\left(\pi,\lambda_n\right)=\frac{\left(-1\right)^n}{1+b_n\alpha_n^0}.\tag{3.12}$$

Затем имеем

$$\phi'\left(\pi,\lambda_n\right)=-b_n\alpha_n^0\phi'\left(\pi,\lambda_n\right)-\left(-1\right)^n\sum_{p=0}^{k-1}(-1)^pb_p\phi(\pi,\lambda_p),$$

$$\phi'\left(\pi,\lambda_n\right)=\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{1+b_n\alpha_n^0}\sum_{p=0}^{k-1}\left(-1\right)^pb_p\varphi\left(\pi,\lambda_p\right).\tag{3.13}$$

Подставляя (3.12) в правую часть (3.13), получим

$$\phi'\left(\pi,\lambda_n\right)=\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{1+b_n\alpha_n^0}\sum_{p=0}^{k-1}\frac{b_p}{1+b_p\alpha_p^0}.\tag{3.14}$$

Из второго граничного условия (3.4) находим

$$H\equiv H(a_0,a_1,\ldots,a_{k-1})=\sum_{p=0}^{k-1}\frac{b_p}{1+b_p\alpha_p^0}.\tag{3.15}$$

2) Пусть последовательности чисел $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ определены соотношениями

$$\lambda_n=n^2,n\geq 0,\frac{1}{\alpha_n}=\frac{1}{\alpha_n^0}+\frac{\gamma_n}{n+1},\tag{3.16}$$

где γ_n удовлетворяет условию

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma_n}{n+1}<\infty\tag{3.17}$$

и α_n^0 определена по формуле (2.15).

Легко заметить, что данная последовательность $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.4. Поэтому существует единственная краевая задача $L(q(x),h,H)\equiv L(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\ldots)$ вида (2.1)–(2.3) с коэффициентами

$$q\left(x\right)=q\left(x,\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\ldots\right),h=h\left(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\ldots\right),H\equiv H(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\ldots),\tag{3.18}$$

собственные значения которых равны $n^2,n\geq 0$, т.е.

$$\sigma\left(L(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\ldots)\right)=\left\{n^2,n\geq 0\right\}.$$

Теперь находим коэффициенты (3.18) краевых задач

$$L(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\ldots)y\equiv -y''+q(x,\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\ldots)y=\lambda y,\ 0<x<\pi,\tag{3.19}$$

$$y'\left(0\right)-h\left(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\ldots\right)y(0)=0,y'(\pi)+H(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\ldots)y(\pi)=0.\tag{3.20}$$

Для этого определим $F(x,t)$ по формулам (2.18) и (3.16)

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma_n}{n+1}\cos nx\cos nt. \tag{3.21}$$

Отсюда находим

$$h(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\ldots)=-F(0,0)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma_n}{n+1}. \tag{3.22}$$

Подставляя (3.21) в интегральное уравнение Гельфанда-Левитана (2.17), получим

$$K(x,t)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma_n}{n+1}\cos nt\ \phi(x,\lambda_n), \tag{3.23}$$

где

$$\phi(x,\lambda_n)=\cos nx+\int_0^x K(x,s)\cos nsds. \tag{3.24}$$

Известно, что функция $\phi(x,\lambda)$, определенная по формуле (2.5), удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\phi''+q(x,\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\ldots)\phi=\lambda\phi \tag{3.25}$$

и начальным условиям

$$\phi(0,\lambda)=1,\phi'(0,\lambda)=h(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\ldots),$$

где коэффициент $q(x,\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\ldots)$ определяется по формуле

$$q(x,\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\ldots)=2\frac{d}{dx}\left(K(x,x)\right). \tag{3.26}$$

Теперь, подставляя выражение (3.23) в (3.24), имеем

$$\phi(x,\lambda_n)=\cos nx-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k}{k+1}\phi(x,\lambda_k)\left\{\int_0^x\cos kt\cos ntdt\right\}. \tag{3.27}$$

Дифференцируя обе части этого равенство по x, получим

$$\begin{aligned}\phi'(x,\lambda_n)&=-n\sin nx-\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k}{k+1}\phi'(x,\lambda_k)\left\{\int_0^x\cos kt\cos ntdt\right\}-\\&-\left[\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k}{k+1}\phi(x,\lambda_k)\cos kx\right]\cos nx.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Подставляя $x=\pi$ в равенства (3.27) и (3.28), имеем

$$\phi(\pi,\lambda_n)=\frac{(-1)^n}{1+\frac{\gamma_n}{n+1}\alpha_n^0},$$

$$\phi'(\pi,\lambda_n)=\frac{(-1)^{n+1}}{1+\frac{\gamma_n}{n+1}\alpha_n^0}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k}{k+1+\gamma_k\alpha_k^0}.$$

Из второго граничного условия (3.20) находим

$$H(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\ldots)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k}{k+1+\gamma_k\alpha_k^0}.$$

Далее, из (3.23) и (3.26), получим

$$q(x, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n+1} \left[\cos nx \phi(x, \lambda_n) \right]',$$

где функция $\phi(x, \lambda_n)$, $n \geq 0$ определена по формуле (3.27).

Таким образом, мы построили семейство граничных задач Штурма-Лиувилля, собственные значения которых совпадают с заданными числами $\lambda_n = n^2, \ n \geq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченко В.А. *Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка*//Труды Москва. Матем. Об. **1**, 327–420 (1952).
2. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. *Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции*// Изв. АН СССР, сер. матем. Москва. **15**:4, 309–360 (1951).
3. Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака.* М.: Наука. 1988.
4. E.L. Isaacson, E. Trubowitz *The inverse Sturm- Liouville problem I*// Comm. Pure Appl. Math. **36**:6, 767–783 (1983).
5. E.L. Isaacson, H.P. McKean, E. Trubowitz *The inverse Sturm-Liouville problem II*// Comm. Pure Appl. Math.**37**:1, 1–11 (1984).
6. B.E. Dahlberg, E. Trubowitz *The inverse Sturm-Liouville problem III*// Comm. Pure Appl. Math. 1984.**37**:2, 255–267 (1984).
7. J. Pöschel, E. Trubowitz *Inverse spectral theory.* Nev York: Academic Press. 1987.
8. Савчук А .М., Шкаликов А.А. *О свойствах отображений связанные с обратными задачами Штурма-Лиувилля*// Тр. МИАИ. **260**, 227–247 (2002).
9. Юрко В.А. *Введение в теорию обратных спектральных задач.* М.: Физматлит. 2007.
10. M. Jodeit, B.M. Levitan *The isospectrality problem for the classical Sturm- Liouville equation*// Advances in differential equations.**2**:2, 297–318 (1997).
11. Y.A. Ashrafyan, T.N. Harutyunyan *Inverse Sturm- Liouville problems with fixed boundary conditions.* // Electronic Journal of differential equations. **2015**:27, 1–18 (2015).

Олим Эркинович Мирзаев,
Самаркандский государственный университет,
Университетский бульвар, 15,
140104, г. Самарканд, Узбекистан
E-mail: `olim-mirzaev@mail.ru`

Акназар Бекдурдиевич Хасанов,
Самаркандский государственный университет,
Университетский бульвар, 15,
140104, г. Самарканд, Узбекистан
E-mail: `ahasanov2002@mail.ru`