ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 2 (2020). С. 21-27.

УДК 517.547

О ПОРОЖДЕННОЙ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ ГРУППОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Ф.Н. ГАРИФЬЯНОВ, Е.В. СТРЕЖНЕВА

Аннотация. Рассматривается лакунарная проблема моментов Стильтьеса с экспоненциальным весом. Решение ищется в классе целых функций экспоненциального типа, индикаторной диаграммой которых является некоторый квадрат. Построены нетривиальные решения соответствующей однородной задачи. Эта проблема сводится к исследованию линейного суммарного уравнения в классе функций, голоморфных вне четырех квадратов. На бесконечности у них нуль кратности не менее трех. Их граничные значения удовлетворяют условию Гельдера на любом компакте, не содержащем вершин квадратов. В вершинах допускаются, самое большее, логарифмические особенности. Решение ищется в виде интеграла типа Коши с неизвестной плотностью по границе этих квадратов. Предложен метод регуляризации суммарного уравнения. Выяснено условие равносильности этой регуляризации. Выделены частные случаи, когда полученное уравнение Фредгольма второго рода разрешимо. Для этого используется принцип сжимающих отображений в банаховом пространстве.

Ключевые слова: метод регуляризации, краевые задачи для эллиптических функций, моменты целых функций экспоненциального типа.

Mathematics Subject Classification: 30Exx: 30E05, 30E20, 30E25

1. Введение

Хорошо известно ([1], гл. III, 3.1.2.5.), что

$$\int_0^\infty x^{4n+3}\exp(-x)\sin x\,dx = 0, n = 0, 1, 2\ldots$$

Изложенный там элементарный метод контурного интегрирования позволяет получить и более общие равенства

$$L_1[F, n] \equiv \int_0^\infty x^{4n+3}F(x)\exp(-x)\sin x\,dx = 0, \qquad n = 0, 1, 2\ldots$$

Здесь и всюду в дальнейшем, если это особо не оговорено, $F(z)$ — целая функция экспоненциального типа (Ц.Ф.Э.Т.), удовлетворяющая условию

$$F(iz) = F(z). \tag{1}$$

Ее индикатор удовлетворяет неравенству

$$h(\theta) < \cos(\theta) + \sin(\theta), \qquad \theta \in [0, \pi/2].$$

F.N. Garif'yanov, E.V. Strezhneva, On moment problem for entire functions generated by doubly periodic group.

Поступила 9 октября 2019 г.

Для построения нетривиальных решений однородной задачи

$$\int_0^\infty x^{4n+3}F(x)\exp(-x)\,dx = 0, n = 0,1,2\ldots \tag{2}$$

элементарные методы уже неприменимы. Требуется редукция к линейному разностному уравнению с постоянными коэффициентами, причем здесь неприменимы мощные классические методы исследования операторов свертки [2]. Задача (2) была полностью рассмотрена в работе [3]. Это же касается и соответствующей неоднородной задачи.

В работе [4] была исследована задача $L_1[F,n] = \beta_n, n = 0,1,2\ldots$ в классе четных Ц.Ф.Э.Т. $F(z) \in A$ ([5], гл. V), у которых индикаторной диаграммой является отрезок мнимой оси $[-i,i]$. В том же классе Ц.Ф.Э.Т. в работе [6] рассмотрена задача

$$\int_0^\infty x^{4n+1}F(x)\exp(-x)\cos(x)\,dx = \beta_n, \qquad n = 0,1,2\ldots$$

Цель данной статьи — исследование проблемы моментов

$$L[F,n] \equiv \int_0^\infty x^{4n+1}F(x)\exp(-2x)\sin(x)\,dx = \beta_n, \qquad n = 0,1,2\ldots \tag{3}$$

в классе Ц.Ф.Э.Т. $F(z)$, удовлетворяющих условию (1). Построены нетривиальные решения соответствующей однородной задачи ($\forall n\ \beta_n = 0$). Подчеркнем, что существенно используется теория эллиптических функций, как и в предыдущих работах [3–4,6].

Статья состоит из трех частей. В разделе 2 рассмотрено вспомогательное суммарное уравнение в классе функций, аналитических вне четырех квадратов и имеющих на бесконечности ноль кратности не менее трех. Предложен метод его регуляризации и выяснено условие ее равносильности. В разделе 3 исследуются частные случаи данного уравнения, когда удается показать безусловную разрешимость полученного неоднородного уравнения Фредгольма второго рода. В разделе 4 проблема моментов (3) сводится к этому суммарному уравнению. При этом используется преобразование Бореля ([7], параграф 1, п. 1).

2. Регуляризация суммарного уравнения.

Пусть D_1 — квадрат с вершинами $t_1 = \gamma(1+i)$, $t_2 = t_1 + 1, t_3 = t_2 + i, t_4 = t_1 + i$ и сторонами $l_j, j = \overline{1,4}$, перечисленными в порядке обхода положительно ориентированной границы $\Gamma_1 = \partial D_1 (t \in l_1 => Imt = \gamma)$. Здесь $\gamma \in (2^{-1}, 1)$. Введем в рассмотрение четыре функции

$$\sigma_m(z) = t_m + t_{m+1} - z; \qquad m = \overline{1,4}\ (t_5 = t_1). \tag{4}$$

Они индуцируют сдвиг Карлемана $\alpha(t) = \{\sigma_m(t), t \in l_m\}$, переводящий каждую сторону в себя с изменением ориентации. При этом середины сторон являются неподвижными точками сдвига.

Возьмем еще три квадрата $D_j = i^{j-1}D_1, j = \overline{2,4}$. Функции $\sigma_m(z)$ определены соотношением (4) только при $z \in D_1$. Доопределим их на остальных квадратах формулой

$$\sigma_m(i^{j-1}z) = i^{j-1}\sigma_m(z)(z \in D_1), \qquad j = \overline{2,4}.$$

Пусть $D = \bigcup\limits_{k=1}^{4} D_k$, $\Gamma = \partial D, \Gamma_j = \partial D_j$. Тем самым сдвиг $\alpha(t)$ определен на всем множестве Γ.

Исследуем функциональное уравнение

$$(Vf)(z) \equiv \sum_{m=1}^{4} f[\sigma_m(z)] = g(z), \qquad z \in D \tag{5}$$

при следующих предположениях.

1) Решение $f(z)$ голоморфно вне D и в бесконечно удаленной точке имеет ноль кратности не менее трех. Кроме того,

$$f(iz) = -if(z). \tag{6}$$

Его граничное значение $f^-(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на любом компакте, не содержащем вершин квадратов. В вершинах допускается, самое большее, логарифмические особенности. Такой класс решений обозоначим через B.

2) Свободный член $g(z)$ является кусочно голоморфной функцией, удовлетворяющей (6), т.е. $g(z) = g_j(z), z \in D_j, j = \overline{1,4}$. Каждая функция $g_j(z)$ голоморфна в D_j и ее граничное значение $g_j^+(t) \in H_\mu(\partial D_j)$.

Поясним постановку задачи. Свяжем с каждым квадратом D_j множество $H_j = \bigcup\limits_{m=1}^{4} \sigma_m(D_j)$. Если $H_j \cap D_k \neq \emptyset$ при $k \neq j$, то задача теряет смысл. Напомним, что решение $f(z)$ определенно только вне D. Итак, $\gamma > 2^{-1}$, чтобы квадраты не были «слишком близки» друг от друга. С другой стороны, далее существенно используется то, что $H_j \cap H_{j+1} \neq \emptyset, j = \overline{1,4}$ $(H_5 = H_1)$. Поэтому $\gamma < 1$. Подчеркнем, что нетривиальность задачи (5) обусловлена несвязностью множеств $\mathbb{C} \setminus H_j, j = \overline{1,4}$.

Будем искать решение задачи (5) в виде интеграла типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (\tau - z)^{-1} \phi(\tau)\, d\tau; \qquad z \notin \overline{D} \tag{7}$$

с неизвестной плотностью, удовлетворяющей условиям

$$\phi(it) = -i\phi(t) \tag{8}$$

и

$$\int\limits_{\Gamma} \phi(\tau)\, d\tau = 0 \Rightarrow \forall j \int\limits_{\Gamma_j} \phi(\tau)\, d\tau = 0. \tag{9}$$

Без ограничения общности считаем, что

$$\phi(\tau) + \phi[\alpha(\tau)] = 0. \tag{10}$$

Действительно, на каждой границе Γ_j плотность $\phi(\tau)$ определена с точностью до слагаемого $a_j^+(\tau)$ — граничного значения функции $a(z)$, голоморфной в D_j. За счет подбора этой функции удается добиться выполнения условия (10). Это условие рассматриваем как задачу Карлемана относительно неизвестной функции $a(z)$, которая разрешима в силу принципа локально-конформного склеивания [8] и выполнения условия разрешимости (9).

Теперь получим

$$(5) \Leftrightarrow (A\phi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \phi(\tau) E(z,\tau)\, d\tau = g(z), \qquad z \in D, \tag{11}$$

где

$$E(z,\tau) = \sum_{m=1}^{4} (\tau - \sigma_m(z))^{-1}; \qquad z \in D. \tag{12}$$

Замечание 1. *Укажем на связь ядра (12) с теорией эллиптических функций. Пусть* $\zeta(u)$ *— квазипериодическая дзета-функция Вейерштрасса ([9], ч.2, гл. 1, параграф 11), построенная по примитивным периодам* $1 \pm i$, $u = \tau + z$. *При* $z \in D_1$ *ядро (12) есть сумма четырех слагаемых из разложения дзета функции в ряд простейших дробей, «ближайших» к* D_1.

Перейдем в (11) к пределу по $z \to t \in \Gamma$. С учетом (10) получим аналог формулы Сохоцкого-Племеля

$$(A^+\phi)(t) \equiv 2^{-1}\phi(t) + (A\phi)(t) = g^+(t), \tag{13}$$

где особый интеграл $(A\phi)(t)$ получен формальной заменой в (11) переменной $z \in D$ на $t \in \Gamma$ и понимается в смысле главного значения по Коши. Заменим в соотношении (13) переменную t на $\alpha(t)$, и полученное равенство вычтем из исходного. С учетом условия (10) имеем

$$(T\phi) \equiv \phi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} K(t,\tau)\phi(\tau)\,d\tau = g^+(t) - g^+(\alpha(t)), \tag{14}$$

причем

$$K(t,\tau) = E(t,\tau) + E[\alpha(t),\alpha(\tau)]. \tag{15}$$

Лемма 1. *Интегральное уравнение (14) есть уравнение Фредгольма второго рода.*

Доказательство. Достаточно непосредственным перебором всех возможных вариантов взаимного расположения точек τ и t на сторонах Γ убедиться в ограниченности ядра (15). □

Следствие 1. *Интегральное уравнение (14) имеет конечное число условий разрешимости.*

Пусть эти условия выполнены. Осуществим обратный переход от интегрального уравнения (14) к исходной задаче (5). Совершенно аналогично тому, как это сделано в [10], можно показать, что существует решение $\phi(t)$, удовлетворяющее условиям (8) и (10). Тогда (14) => $(A^+\phi)(t) - (A^+\phi)(\alpha(t)) = g^+(t) - g^+(\alpha(t))$, т.е. $(A\phi)(z) = g(z) + c_z, z \in D$, поскольку двоякопериодическая функция, не имеющая полюсов, может быть только постоянной. Кусочная постоянная c_z является константой в каждом квадрате, причем $c_{iz} = -ic_z$.

Теорема 1. *Задача (5) имеет конечное число условий разрешимости. Это условие разрешимости интегрального уравнения (14) и еще одно условие.*

$$(A\phi)(z_0) = g_1(z_0), \tag{16}$$

где $z_0 \in D_1$, которое обеспечивает равносильность регуляризации.

Пусть все эти условия выполнены и задача (5) разрешима. Множество $H_1 \cap H_2 = H_0$ есть прямоугольник с вершинами $\pm(\gamma-1)+\gamma i$, $\pm(\gamma-1)+(\gamma+1)i$, содержащий отрезок мнимой оси $(\gamma i, (\gamma+1)i)$. Возьмем точку $z \in H_0$. Тогда, используя условия задачи (5) на D_1, имеем

$$f(z) = g_1(t_1+t_4-z) - f(z+1-i) - f(z+1+i) - f(z+2).$$

Совершенно аналогично, используя условие задачи (5) на D_2, получим

$$f(z) = g_2(it_1+it_2-z) - f(z-1-i) - f(z-1+i) - f(z-2).$$

Отсюда

$$\begin{gathered} f(z+1-i) + f(z+1+i) + f(z+2) - f(z-1-i) - f(z-1+i) - \\ - f(z-2) = g_1(t_1+t_4-z) - g_2(it_1+it_2-z). \end{gathered} \tag{17}$$

Пусть теперь $\gamma < \operatorname{Im} z < 2-\gamma$. С использованием условия задачи (5) на квадратах D_3 и D_4, имеем

$$\begin{gathered} f(z+1-3i) + f(z+1-i) + f(z+2-2i) - f(z-1-3i) - f(z-1-i) - \\ - f(z-2-2i) == g_4(2i-it_1-it_4-z) - g_3(2i-t_1-t_3-z). \end{gathered} \tag{18}$$

В результате получим

$$f(z+1+i)+f(z+2)-f(z-1+i)-f(z-2)-f(z+1-3i)- \\ -f(z+2-2i)+f(z-1-3i)+f(z-2-2i)=g_0(z), \tag{19}$$

где

$$g_0(z)=g_1(t_1+t_4-z)-g_2(it_1+it_2-z)-g_4(2i-it_1-it_2-z)+g_3(2i-t_1-t_4-z). \tag{20}$$

В соотношение (19) входят только значения функции f в точках, лежащих вне квадрата D_0 с вершинами $(\gamma+1)i^j, j=\overline{1,4}$.

3. Исследование интегрального уравнения Фредгольма в некоторых частных случаях

Далее считаем, что $\gamma \geq 0,9$. Покажем, что уравнение (14) разрешимо. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$T\phi = 0. \tag{21}$$

Считаем, что оператор T определен на банаховом пространстве $\widetilde{C}(\Gamma)$. Это множество функций, непрерывных на замыкании каждой из сторон квадратов, с естественным образом определенной нормой.

$$M=\max_{t\in\Gamma}|\phi(t)|. \tag{22}$$

При этом вершины могут быть для них только точками разрыва первого рода. Поскольку $A(t,\tau)=A(\tau,t)$, то $T'=T$. Фундаментальную систему решений (Ф.С.Р.) уравнения (21) можно выбрать так, что каждая входящая туда функция удовлетворяет либо условию (10), либо противоположному условию $\phi(t)=\phi(\alpha(t))$ (см. по этому поводу [10]). Решения с последним условием автоматически ортогональны правой части (14), поскольку (10) $\Rightarrow$ (9).

Лемма 2. *Ф.С.Р. уравнения (21) не содержит функций со свойством (10).*

Доказательство. Предположим противное и положим для определенности $\gamma=0.9$. В силу свойства (10) вместо ядра (15) возьмем другое ядро $K_1(t,\tau)=2^{-1}[K(t,\tau)-K(t,\alpha(\tau))]$ и оценим его модуль сверху. Из-за симметрии Γ достаточно рассмотреть всего два случая.

I. Условие (22) выполняется при $t\in l_1$. Тогда

$$\begin{aligned}&A(t,\tau)=(u-2.8-1.8i)^{-1}+(u-3.8-2.8i)^{-1}+(u-2.8-3.8i)^{-1}+\\&+(u-1.8-2.8i)^{-1}; \quad u=\tau+T; \quad \alpha(t)=2.8+1.8i-t; \quad t=x+0.9i;\\&x\in[0.9,1.9].\end{aligned}$$

1.1. $\tau\in l_1$ отсюда

$$K(t,\tau)=(u-3.8-2.8i)^{-1}+(u-2.8-3.8i)^{-1}+(u-1.8-2.8i)^{-1}- \\ -(u-1.8-0.8i)^{-1}-(u-2.8+0.2i)^{-1}-(u-3.8-0.8i)^{-1}$$

т.е. $|K_1|\leq 0.13$.

1.2. $\tau\in l_4$ отсюда

$$K(t,\tau)=(u-3.8-2.8i)^{-1}+(u-2.8-3.8i)^{-1}- \\ -(u-0.8-1.8i)^{-1}-(u-1.8-0.8i)^{-1}$$

т.е. $|K_1|\leq 0.08$.

1.3. $\tau\in l_2$. В силу симметрии справедлива та же оценка $|K_1|\leq 0.08$.

1.4. $\tau\in l_3$. Тогда $K(t,\tau)=0$.

При $\tau\in\Gamma_1$ ядро $E(t,\tau)$ содержит слагаемые, интеграл от которых понимается в смысле главного значения по Коши. Но ядро (15) ограниченно. Поэтому выше ядро K записано в явном виде. При $\tau\notin\Gamma_1$ таких слагаемых нет.

Пусть $\tau \in \Gamma_2$. Обозначим нижнюю, правую, верхнюю и левую стороны квадратов через $b_j, j = \overline{1,4}$ соответственно. При $\tau \in l_j$ имеем $|K_1| \leq c_j$, где $c_1 = 0.17$; $c_2 = 0.43$; $c_3 = 0.31$; $c_4 = 0.21$.

Пусть $\tau \in \Gamma_3$. В этом случае $c_1 = 0.04$;$c_2 = 0.06$;$c_3 = 0.07$;$c_4 = 0.08$.

Пусть $\tau \in \Gamma_4$. В этом случае $c_1 = 0.08$;$c_2 = 0.12$;$c_3 = 0.19$;$c_4 = 0.12$.

Поскольку сумма всех всех этих чисел меньше 2π, то в силу принципа сжимающих отображений следует, что $\phi \equiv 0$, и пришли к противоречию.

II. Условие (22) выполняется при $t \in l_3$. Заметим, что точка $t \in l_3$ дальше от квадратов D_3 и D_4, чем точка $t \in l_1$. Поэтому приведенные выше оценки при $t \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ только улучшаются по сравнению со случаем I и совершенно аналогично получим $\phi \equiv 0$.

Пусть наконец $\gamma > 0.9$. Тогда квадраты расположенны дальше друг от друга, чем в только что рассмотренным случае, и соответствующие оценки могут только улучшиться, что завершает доказательство. □

Замечание 2. *Из приведенных при доказательстве леммы 2 оценок следует, что она остается справедливой и при некоторых* $\gamma < 0.9$. *Вопрос о том, насколько меньшим можно взять* γ, *в данной работе не рассматривается.*

Теорема 2. *При* $\gamma \geq 0.9$ *задача (5) имеет единственное условие разрешимости (16).*

Замечание 3. *По каждой функции* $g(z)$ *можно подобрать такую постоянную* c, *что при* $\widetilde{g}(z) = g_1(z) + c, z \in D_1$ *задача (5) безусловно разрешима.*

4. Приложения к проблеме моментов

Теперь укажем на приложение задачи (5) к проблеме моментов. Пусть Ц.Ф.Э.Т. $F(z)$ — верхняя функция, ассоциированная по Борелю с нижней функцией $f(z) \in B$. Ее сопряженной индикаторной диаграммой является, вообще говоря, квадрат D_0. Она удовлетворяет условию (1). Воспользуемся равенством (6) и перепишем соотношоеие (19) в виде интеграла

$$\int_0^\infty F(x)M(z,x)\,dx = g_0(z), \qquad z \in D_0 \tag{23}$$

с ядром

$$\begin{aligned} M(z,x) &= \exp(-xz-2x) - i\exp(xiz+xi-x) + i\exp(xiz-xi-x) + \\ &+ \exp(zx-2x) - i\exp(-xzi-xi-3x) - \exp(2ix-xz-2x) + \\ &+ i\exp(xi-xiz-3x) - \exp(xz-2x-2ix). \end{aligned}$$

Подчеркнем, что все экспоненты считаются в точках из полуплоскости $Rez > 1+\gamma$. Легко проверить, что при $n \neq 4k+1$, $k = \overline{0,\infty}$ имеем $\frac{\partial^n}{\partial z^n} M(z,x)\Big|_{z=i} = g_0^{(n)}(i) = 0$

и $g_0^{(4k+1)}(i) = -4g_1^{(4k+1)}(z_0)$, где $z_0 = 2\gamma(1+i)$. Пусть

$$g_1(z) = \beta_0 - 2i\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k!}(z-z_0)^k, \tag{24}$$

причем радиус сходимости степенного ряда $R > \gamma\sqrt{2}$. Коэффициент β_0 подобран так, что разрешима задача (5). Приравнивая соответствующие коэффициенты Тейлора в точке i левой и правой частей равенства (23), имеем

$$L[F,n] = \beta_{4n+1}. \tag{25}$$

Теорема 3. *Проблема моментов [25] в классе Ц.Ф.Э.Т. $F(z)$, ассоциированных по Борелю с нижней функцией $f(z) \in B$, при условии*

$$\sqrt{2}\gamma\ e\overline{\lim_{n->\infty}}\sqrt[4n+1]{|\beta_{4n+1}|} < 1$$

разрешима.

Построим нетривиальные решения однородной задачи. Достаточно в формуле (24) считать, что каждый коэффициент $\beta_{4n+1} = 0$ и существует коэффициент $\beta_n \neq 0, \quad n > 0$.

Замечание 4. *Случай, когда сопряженной индикаторной диаграммой является не квадрат D_0, а некоторое «меньшее» выпуклое множество $D_0' \subset D_0$, возможен, но малоинтересен. Тогда задача (5) переопределена. Условие (5) выполняется не только при $z \in D$, но и в окрестности бесконечно удаленной точки. Необходимым (но не достаточным!) условием этого является возможность аналитического продолжения $g_1(z)$ из D_1 в окрестность бесконечно удаленной точки, причем $g_1(\infty) = 0$. Более подробно по этому случаю см. [11-12].*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Титчмарш Е. *Теория функций.* М. Наука, 1980.
2. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука, 1982.
3. Гарифьянов Ф.Н. *Моменты Стильтъеса целых функций экспоненциального типа* // Мат. заметки. **67**:5, № 5, с. 674–679 (2000).
4. F.N. Garifyanov, E.V. Strezhneva *On a classic moment problem for entire functions* // Lobachevskii Journal of Mathematics, **39**:6, pp.755–758, (2018).
5. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М. ГИТТЛ, 1956.
6. Гарифьянов Ф.Н., Стрежнева Е.В. *О системе целых функций класса А, биортогональной с весом лакунарной системе степеней на луче* // Сиб. матем. журн. **58**:1, С. 83–87 (2017).
7. Бибербах Л. *Аналитическое продолжение.* М.: Наука, 1976.
8. Зверович Э.И. *Метод локально-конформного склеивания* // Докл. АН СССР. **205**:4, с. 767–770 (1972).
9. Гурвиц А, Курант Р. *Теория функций.* М., Наука 1967.
10. Аксентьева Е.П, Гарифьянов Ф.Н. *К исследованию интегрального уравнения с ядром Карлемана.* Изв. вузов матем. №4, с.43–51 (1983).
11. Гарифьянов Ф.Н., Модина С.А. *О четырехэлементном уравнении для функций, аналитических вне трапеции и его приложениях* // Сиб. мат. журн. **52**:2, с. 243–249 (2011).
12. Гарифьянов Ф.Н., Стрежнева Е.В. *Интерполяционные задачи для целых функций, индуцированные правильным шестиугольником* // Сиб. мат. журн. **59**:1, с. 59–64 (2018).

Фархат Нургаязович Гарифьянов,
Казанский государственный энергетический университет
ул. Красносельская, д. 51
420066, г. Казань, РФ, РТ
E-mail: `f.garifyanov@mail.ru`

Елена Васильевна Стрежнева,
Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А.Н.Туполева-КАИ
ул. К. Маркса, д.10
420111, г. Казань, РФ, РТ
E-mail: `strezh@yandex.ru`