ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 2 (2020). С. 55-70.

УДК 517.983.5, 517.968.7

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В УСЛОВИЯХ СПЕКТРАЛЬНОЙ ИЛИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ

М.В. ФАЛАЛЕЕВ

Аннотация. Исследуется задача Коши для вырожденного интегро-дифференциального уравнения высокого порядка в банаховых пространствах. Операторное ядро интегральной части уравнения является линейной комбинацией операторных коэффициентов его дифференциальной части, что соответствует физическому смыслу некоторых технологических процессов. Решение строится в пространстве обобщенных функций [распределений] в банаховых пространствах с использованием аппарата теории фундаментальных оператор-функций. Сверточное представление исходного уравнения определило дальнейшее активное использование техники сверток и ее свойств. Для исследуемых уравнений построены соответствующие им фундаментальные оператор-функции, с помощью которых восстановлено единственное обобщенное решение исходной задачи Коши в классе распределений с ограниченным слева носителем. Анализ полученного обобщенного решения позволяет исследовать рассматриваемую задачу на разрешимость в классическом смысле. Фундаментальная оператор-функция построена в терминах теории полугрупп операторов с ядрами. Абстрактные результаты проиллюстрированы на примерах начально-краевых задач теории вязкоупругости.

Ключевые слова: банаховы пространства, обобщенная функция, распределение, фундаментальная оператор-функция, интегро-дифференциальный оператор, спектральная ограниченность, полиномиальная ограниченность.

Mathematics Subject Classification:: 34G10, 45K05, 45N05

1. Введение

Для корректного моделирования некоторых естественнонаучных или технологических процессов необходимо учитывать не только сиюминутное действие определяющих факторов, но и предысторию наблюдения. Такие эффекты встречаются, например, при исследовании колебаний мембран в масляных средах, когда возмущение от мембраны передается на среду, а затем возвращается на нее же в каком-то измененном виде вследствие динамических процессов, вызванных в среде самой же мембраной. Одним из способов описания таких моделей является аппарат интегро-дифференциальных уравнений в частных производных сверточного типа. Среди последних выделяются уравнения, у которых оператор при старшей по времени производной необратим, поскольку начально-краевые задачи для таких уравнений разрешимы в классах функций конечной гладкости не при любых сочетаниях начально-краевых условий и свободной функции [правой части] уравнения. Таких недостатков нет у решений в классах распределений, причем в самой общей постановке задачу разрешимости можно ставить и решать путем ее редукции к вырожденным интегро-дифференциальным уравнениям в банаховых пространствах. Наиболее же

M.V. Falaleev, Fundamental operator functions of integro-differential operators under spectral or polynomial constraints.

Поступила 20 сентября 2019 г.

эффективным аппаратом для построения обобщенных решений вырожденных интегро-дифференциальных уравнений является теория фундаментальных оператор-функций см. [8], в соответствии с которой искомое обобщенное решение восстанавливается в виде свертки фундаментальной оператор-функции и обобщенной функции, включающей в себя все входные данные задачи. Анализируя построенные таким образом обобщенные решения, можно делать выводы о существовании и единственности классического [гладкого] решения, его структуре, свойствах, возможности численного эксперимента. В данной работе рассматриваются интегро-дифференциальные уравнения, в которых операторное ядро интегральной части является линейной комбинацией операторных коэффициентов его дифференциальной части. Физически это означает, что в течение всего времени наблюдения на состояние системы влияют одни и те же факторы.

Таким образом будут исследоваться следующие задачи Коши:

$$Bu^{(N)}(t) - Au(t) - \int\limits_0^t \Big(\alpha(t-s)A + \beta(t-s)B\Big)u(s)ds = f(t), \tag{1}$$

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1,\ \ldots,\ u^{(N-1)}(0) = u_{N-1}, \tag{2}$$

где $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ – необратим, A – замкнутый линейные оператор из E_1 в E_2, E_1 и E_2 – банаховы пространства, оператор A спектрально ограничен относительно B см. [4, 9];

$$\begin{gathered} Bu^{(2N)}(t) - A_1u^{(N)}(t) - A_0u(t) - \\ - \int\limits_0^t \Big(\alpha_1(t-s)A_1 + \alpha_0(t-s)A_0 + \beta(t-s)B\Big)u(s)ds = f(t), \end{gathered} \tag{3}$$

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1,\ \ldots,\ u^{(2N-1)}(0) = u_{2N-1}, \tag{4}$$

здесь $B, A_1, A_0 \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, B – необратим, пара операторов (A_1, A_0) полиномиально ограничена относительно оператора B см. [3].

Если в уравнениях (1) и (3) числовые функции $\alpha(t), \beta(t), \alpha_0(t), \alpha_1(t)$ тождественно нулевые, то теория разрешимости задач Коши (1)–(2) и (3)–(4) в указанных условиях в классах функций конечной гладкости хорошо разработана в см. [3, 4, 9].

В данной работе будут строиться решения в классе $K'_+(E_1)$ распределений с ограниченным слева носителем. Данный класс является естественным для рассматриваемых задач по ряду причин. Во-первых, решение задачи Коши определено на луче $t \geq 0$, во-вторых, при построении решений используется операция свертки обобщенных функций, которая в этом классе существует всегда, и, в-третьих, операция свертки в данном классе обладает свойством ассоциативности, весьма необходимом для выполнения всех преобразований.

2. Фундаментальные оператор-функции в условиях спектральной ограниченности

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, оператор $B \in L(E_1, E_2)$ необратим, A – замкнутый линейный оператор из E_1 в E_2. Далее, следуя работам [4, 9], будем называть B-резольвентным множеством оператора A следующее открытое множество комплексной плоскости $\rho^B(A) \equiv \{\mu \in C : (\mu B - A)^{-1} \in L(E_2, E_1)\}$. Оператор A называется спектрально ограниченным относительно оператора B (или (B, σ)-ограниченным), если вне некоторого круга радиуса $a > 0$ операторный пучок $(\mu B - A)$ непрерывно обратим, т.е. $\{\mu \in C : |\mu| > a\} \subset \rho^B(A)$. Рассмотрим окружность комплексной плоскости $\Gamma \equiv \{\mu \in C : |\mu| = r > a\}$, тогда в условиях (B, σ)-ограниченности, как показано в работах

[4, 9], операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}(\mu B - A)^{-1}Bd\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}B(\mu B - A)^{-1}d\mu$$

являются проекторами в E_1 и E_2 соответственно. Проекторы P и Q порождают разложения пространств в прямые суммы $E_1 \equiv E_1^0 \oplus E_1^1 = kerP \oplus imP$ и $E_2 \equiv E_2^0 \oplus E_2^1 = kerQ \oplus imQ$. Действия операторов A и B при этом естественным образом расщепляются так, что их сужения $A_0 : E_1^0 \to E_2^0$ и $B_1 : E_1^1 \to E_2^1$ непрерывно обратимы, $A_1 : E_1^1 \to E_2^1$ – ограничен, сами операторы A и B псевдокоммутируют с проекторами P и Q, т.е. $QB = BP$ и $QA = AP$.

Далее будем обозначать: $\alpha(t), \beta(t) \in C(t \geq 0)$, $\Lambda(t)$ – резольвента ядра $(-\alpha(t)\theta(t))$, $f_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\theta(t)$, $n \in N$, $\theta(t)$ – функция Хевисайда [1, 2], $R(t)$ – резольвента сверточного ядра $k(t)\theta(t) = f_N(t) * \beta(t)\theta(t)$, N– натуральное число, $f_0(t) = \delta(t)$, $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака [1, 2].

Теорема 1. *Если оператор A спектрально ограничен относительно B, то интегро-дифференциальный оператор*

$$B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - \Big(\alpha(t)A + \beta(t)B\Big)\theta(t) = B\Big(\delta^{(N)}(t) - \beta(t)\theta(t)\Big) - A\Big(\delta(t) + \alpha(t)\theta(t)\Big)$$

имеет на классе $K'_+(E_2)$ (обобщенных функций с ограниченным слева носителем) фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}_N(t) = B_1^{-1}\mathcal{U}_N(t)Q - \mathcal{V}_N(t)(I - Q),$$

здесь

$$\mathcal{U}_N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{N\cdot k}(t) * (\delta(t) + R(t)\theta(t))^k * (\delta(t) + \alpha(t)\theta(t))^{k-1}(A_1B_1^{-1})^{k-1},$$

$$\mathcal{V}_N(t) = \sum_{q=0}^{\infty}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\delta^{(N)}(t) - \beta(t)\theta(t))^q * (\delta(t) + \Lambda(t)\theta(t))^{q+1}.$$

Здесь и далее под степенью k обобщенной функции понимается ее k-кратная свертка с собой, нулевая степень обобщенной функции есть $\delta(t)$.

Доказательство. В соответствии с определением фундаментальной оператор-функции [8] проверим справедливость двух сверточных равенств

$$\Big[B\Big(\delta^{(N)}(t) - \beta(t)\theta(t)\Big) - A\Big(\delta(t) + \alpha(t)\theta(t)\Big)\Big] * \mathcal{E}_N(t) = I_2\delta(t) \text{ на } K'_+(E_2), \tag{5}$$

$$\mathcal{E}_N(t) * \Big[B\Big(\delta^{(N)}(t) - \beta(t)\theta(t)\Big) - A\Big(\delta(t) + \alpha(t)\theta(t)\Big)\Big] = I_1\delta(t) \text{ на } K'_+(E_1). \tag{6}$$

Известно, что семейство функций $f_n(t)$ удовлетворяет сверточным равенствам [1, 2] $f_n(t) * f_k(t) = f_{n+k}(t)$ и $\delta^{(n)}(t) * f_n(t) = \delta(t)$. Поэтому

$$B\Big(\delta^{(N)}(t) - \beta(t)\theta(t)\Big) * B_1^{-1}\mathcal{U}_N(t)Q$$

$$= B\Big(\delta^{(N)}(t) - \beta(t)\theta(t)\Big) * B_1^{-1}f_N(t) * (\delta(t) + R(t)\theta(t))$$

$$* \sum_{k=1}^{\infty} f_{N\cdot(k-1)}(t) * (\delta(t) + R(t)\theta(t))^{k-1} * (\delta(t) + \alpha(t)\theta(t))^{k-1}(A_1B_1^{-1})^{k-1}Q$$

$$
\begin{aligned}
=&BB_1^{-1}(\delta(t)-k(t)\theta(t))*(\delta(t)+R(t)\theta(t))\\
&*\sum_{k=1}^{\infty} f_{N\cdot(k-1)}(t)*(\delta(t)+R(t)\theta(t))^{k-1}*(\delta(t)+\alpha(t)\theta(t))^{k-1}(A_1B_1^{-1})^{k-1}Q\\
=&Q\delta(t)+\sum_{k=1}^{\infty} f_{N\cdot k}(t)*(\delta(t)+R(t)\theta(t))^{k}*(\delta(t)+\alpha(t)\theta(t))^{k}(A_1B_1^{-1})^{k}Q,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&A\Big(\delta(t)+\alpha(t)\theta(t)\Big)*B_1^{-1}\mathcal{U}_N(t)Q\\
&=\sum_{k=1}^{\infty} f_{N\cdot k}(t)*(\delta(t)+R(t)\theta(t))^{k}*(\delta(t)+\alpha(t)\theta(t))^{k}(A_1B_1^{-1})^{k}Q,
\end{aligned}
$$

т.е.

$$
\Big[B\Big(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\Big)-A\Big(\delta(t)+\alpha(t)\theta(t)\Big)\Big]*B_1^{-1}\mathcal{U}_N(t)Q=Q\delta(t).
$$

Аналогично находим

$$
\begin{aligned}
&B\Big(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\Big)*\mathcal{V}_N(t)(I-Q)\\
&=\sum_{q=0}^{\infty} B_0(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t))^{q+1}*(\delta(t)+\Lambda(t)\theta(t))^{q+1}(I-Q),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&A\Big(\delta(t)+\alpha(t)\theta(t)\Big)*\mathcal{V}_N(t)(I-Q)\\
&=\sum_{q=0}^{\infty} A_0(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t))^{q}*(\delta(t)+\Lambda(t)\theta(t))^{q}(I-Q)\\
&=(I-Q)\delta(t)+\sum_{q=1}^{\infty} B_0(A_0^{-1}B_0)^{q-1}A_0^{-1}(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t))^{q}*(\delta(t)+\Lambda(t)\theta(t))^{q}(I-Q)\\
&=(I-Q)\delta(t)+\sum_{q=0}^{\infty} B_0(A_0^{-1}B_0)^{q}A_0^{-1}(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t))^{q+1}*(\delta(t)+\Lambda(t)\theta(t))^{q+1}(I-Q).
\end{aligned}
$$

Следовательно

$$
\Big[B\Big(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\Big)-A\Big(\delta(t)+\alpha(t)\theta(t)\Big)\Big]*\mathcal{V}_N(t)(I-Q)=-(I-Q)\delta(t),
$$

таким образом

$$
\Big[B\Big(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\Big)-A\Big(\delta(t)+\alpha(t)\theta(t)\Big)\Big]*\mathcal{E}_N(t)=Q\delta(t)+(I-Q)\delta(t)=I\delta(t)
$$

и первое равенство доказано.

Докажем теперь справедливость второго равенства. Последовательно находим, во-первых,

$$
\begin{aligned}
&B_1^{-1}\mathcal{U}_N(t)Q*B\Big(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\Big)\\
&\qquad=B_1^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} f_{N\cdot(k-1)}(t)*(\delta(t)+R(t)\theta(t))^{k}*(\delta(t)+\alpha(t)\theta(t))^{k-1}(A_1B_1^{-1})^{k-1}B_1P\\
&\qquad*(\delta(t)-k(t)\theta(t))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= B_1^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} f_{N\cdot(k-1)}(t) * (\delta(t)+R(t)\theta(t))^{k-1} * (\delta(t)+\alpha(t)\theta(t))^{k-1}(A_1B_1^{-1})^{k-1}B_1P \\
&= P\delta(t) + B_1^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} f_{N\cdot k}(t) * (\delta(t)+R(t)\theta(t))^{k} * (\delta(t)+\alpha(t)\theta(t))^{k}(A_1B_1^{-1})^{k}B_1P \\
&= P\delta(t) + B_1^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} f_{N\cdot k}(t) * (\delta(t)+R(t)\theta(t))^{k} * (\delta(t)+\alpha(t)\theta(t))^{k}(A_1B_1^{-1})^{k-1}A_1P,
\end{aligned}
$$

во-вторых,

$$
\begin{aligned}
&B_1^{-1}\mathcal{U}_N(t)Q * A\Big(\delta(t)+\alpha(t)\theta(t)\Big) \\
&\qquad = B_1^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} f_{N\cdot k}(t) * (\delta(t)+R(t)\theta(t))^{k} * (\delta(t)+\alpha(t)\theta(t))^{k}(A_1B_1^{-1})^{k-1}A_1P,
\end{aligned}
$$

таким образом,

$$
B_1^{-1}\mathcal{U}_N(t)Q * \Big[B\Big(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\Big) - A\Big(\delta(t)+\alpha(t)\theta(t)\Big)\Big] = P\delta(t).
$$

Соответственно,

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}_N(t)(I-Q) * B\Big(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\Big) \\
&\qquad = \sum_{q=0}^{\infty}(A_0^{-1}B_0)^{q+1}(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t))^{q+1} * (\delta(t)+\Lambda(t)\theta(t))^{q+1}(I-P)
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}_N(t)(I-Q) * A\Big(\delta(t)+\alpha(t)\theta(t)\Big) \\
&\qquad = \sum_{q=0}^{\infty}(A_0^{-1}B_0)^{q}(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t))^{q} * (\delta(t)+\Lambda(t)\theta(t))^{q}(I-P) \\
&\qquad = (I-P)\delta(t) \\
&\qquad\quad + \sum_{q=0}^{\infty}(A_0^{-1}B_0)^{q+1}(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t))^{q+1} * (\delta(t)+\Lambda(t)\theta(t))^{q+1}(I-P),
\end{aligned}
$$

поэтому

$$
\mathcal{V}_N(t)(I-Q) * \Big[B\Big(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\Big) - A\Big(\delta(t)+\alpha(t)\theta(t)\Big)\Big] = -(I-P)\delta(t).
$$

Отсюда получаем справедливость второго равенства

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}_N(t) * \Big[B\Big(\delta^{(N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\Big) - A\Big(\delta(t)+\alpha(t)\theta(t)\Big)\Big] \\
&\qquad = P\delta(t) + (I-P)\delta(t) = I\delta(t).
\end{aligned}
$$

□

Замечание 1. *Если в уравнении (1) $\alpha(t)=\beta(t)\equiv 0$, то теорема 1 полностью совпадает с утверждением теоремы 3 работы* [5]*, откуда, как следствие, получаются соответствующие утверждения из* [4, 9] *(см. теорему 4 и следствие 2 из нее в работе* [5]*).*

Замечание 2. *Если в уравнении (1) $\beta(t)\equiv 0$, то теорема 1 превращается в одно из основных утверждений работы* [6]*, а именно, в теорему 1.*

Замечание 3. *Если в уравнении (1) $\alpha(t) \equiv 0$, то теорема 1 превращается в основное утверждение работы* [7].

Замечание 4. *Теорема 1 допускает обобщения на случай, когда оператор A секториально или радиально ограничен относительно оператора B, соответствующие определения см. в* [4, 9].

Замечание 5. *Задача Коши (1)–(2) в обобщенных функциях записывается следующим образом*

$$\left[B\Big(\delta^{(N)}(t) - \beta(t)\theta(t)\Big) - A\Big(\delta(t) + \alpha(t)\theta(t)\Big)\right] * \tilde{u}(t) = F(t), \tag{7}$$

где

$$F(t) = f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta'(t) + \cdots + Bu_1\delta^{(N-2)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t).$$

В силу равенства (5) обобщенная функция вида $\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * F(t)$ является решением уравнения (7) в классе $K'_+(E_1)$, а в силу равенства (6) – единственным.

Если дополнительно предположить, что ∞ является устранимой особой точкой операторного пучка $(\mu B - A)^{-1}$ см. [4, 9], т.е. $A_0^{-1}B_0 \equiv 0$, то фундаментальная оператор-функция $\mathcal{E}_N(t)$ приобретает следующий наиболее компактный вид

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t) = B_1^{-1}\mathcal{U}_N(t)Q - A_0^{-1}(I-Q)(\delta(t) + \Lambda(t)\theta(t)).$$

В этом случае единственным решением задачи Коши (1)-(2) в классе $K'_+(E_1)$ является регулярная обобщенная функция $\tilde{u}(t) = \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * F(t)$, удовлетворяющая уравнению (1). Потребовав от нее удовлетворения начальным условиям (2), получим условия разрешимости задачи Коши (1)-(2) в классе $C^N(t \geq 0, E_1)$. Непосредственными вычислениями находим для $j = 0, 1, \ldots, N-1$

$$\begin{aligned}\tilde{u}^{(j)}\Big|_{t=0} =& -A_0^{-1}(I-Q)\big[f^{(j)}(0) + \Lambda(0)f^{(j-1)}(0) + \Lambda'(0)f^{(j-2)}(0) + \ldots \\ &+ \Lambda^{(j-2)}(0)f'(0) + \Lambda^{(j-1)}(0)f(0)\big] + Pu_j \\ =& u_j - \omega_j,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}w_j =& (I-P)u_j + A_0^{-1}(I-Q)\big[f^{(j)}(0) + \Lambda(0)f^{(j-1)}(0) + \Lambda'(0)f^{(j-2)}(0) + \ldots \\ &+ \Lambda^{(j-2)}(0)f'(0) + \Lambda^{(j-1)}(0)f(0)\big] \\ =& A_0^{-1}(I-Q)\big[Au_j + f^{(j)}(0) + \Lambda(0)f^{(j-1)}(0) + \Lambda'(0)f^{(j-2)}(0) + \ldots \\ &+ \Lambda^{(j-2)}(0)f'(0) + \Lambda^{(j-1)}(0)f(0)\big] \\ =& A_0^{-1}(I-Q)v_j.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $\tilde{u}(t) \in C^N(t \geq 0, E_1)$ является решением задачи Коши (1)-(2) тогда и только тогда, когда $\omega_j = 0$ или в силу $A_0^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$, $(I-Q)v_j = 0$.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. *Если оператор A спектрально ограничен относительно B и ∞ является устранимой особой точкой, то задача Коши (1)-(2) однозначно разрешима в классе $C^N(t \geq 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\begin{aligned}(I-Q)\big[&Au_j + f^{(j)}(0) + \Lambda(0)f^{(j-1)}(0) + \Lambda'(0)f^{(j-2)}(0) + \ldots \\ &+ \Lambda^{(j-2)}(0)f'(0) + \Lambda^{(j-1)}(0)f(0)\big] = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1.\end{aligned}$$

Пример 1. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу теории вязкоупругости [10]

$$(\lambda - \Delta)\, u_{tt} - (\mu - \Delta)\, u - \int\limits_0^t g(t-\tau)\,(\gamma - \Delta)\, u(\tau, \bar{x}) d\tau = f(t, \bar{x}), \tag{8}$$

$$u\Big|_{t=0} = u_0(\bar{x}), \quad u_t\Big|_{t=0} = u_1(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega; \quad u\Big|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \tag{9}$$

где $g(t)$, $f(t, \bar{x})$ – заданные функции, $u = u(t, \bar{x})$ – искомая функция, $\bar{x} \in \Omega \subset R^m$ – ограниченная область с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$, Δ – оператор Лапласа, $u = u(t, \bar{x})$ определена на цилиндре $R_+ \times \Omega$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$.

Для задачи Коши-Дирихле (8)–(9), где $\mu \neq \lambda$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, банаховы пространства и операторы зададим следующим образом

$$E_1 \equiv \left\{ v(\bar{x}) \in W_p^{k+2}(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \, E_2 \equiv W_p^k(\Omega), \, B = \lambda - \Delta, \, A = \mu - \Delta, \tag{10}$$

где $W_p^k(\Omega)$ – пространства Соболева. В этих обозначениях ядро интегрального оператора уравнения (8) представимо в виде

$$g(t)\,(\gamma - \Delta) = \alpha(t) A + \beta(t) B,$$

где

$$\alpha(t) = \frac{\gamma - \lambda}{\mu - \lambda} g(t), \qquad \beta(t) = \frac{\mu - \gamma}{\mu - \lambda} g(t),$$

оператор A является спектрально ограниченным относительно B и ∞ является устранимой особой точкой см. [4, 9] операторного пучка $(\mu B - A)^{-1}$, тогда в соответствии с теоремой 2 справедливо утверждение

Теорема 3. *Пусть для задачи Коши-Дирихле (8)–(9), где $\mu \neq \lambda$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, банаховы пространства E_1 и E_2, операторы A и B определены как в (10), тогда существует единственное решение $u(t) \in C^2(t \geq 0, E_1)$ задачи (8)-(9) тогда и только тогда, когда начально-краевые условия (9) и функция $f(t, \bar{x})$ удовлетворяют соотношениям*

$$\langle (\mu - \lambda) u_0(\bar{x}) + f(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \rangle = 0,$$

$$\left\langle (\mu - \lambda)^2 u_1(\bar{x}) + (\mu - \lambda) f'_t(0, \bar{x}) - (\gamma - \lambda) g(0) f(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \right\rangle = 0, \; i = 1, \ldots, n,$$

здесь $\varphi_i(\bar{x})$, $i = 1, \ldots, n$ ортонормированный базис пространства решений однородной задачи: $\lambda\varphi_i = \Delta\varphi_i$, $\varphi_i|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0$.

Замечание 6. *Условия разрешимости задачи Коши-Дирихле (8)–(9) можно переписать в эквивалентном виде следующим образом*

$$\langle (\mu - \lambda) u_0(\bar{x}) + f(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \rangle = 0,$$

$$\langle (\mu - \lambda) u_1(\bar{x}) + (\gamma - \lambda) g(0) u_0(\bar{x}) + f'_t(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \rangle = 0, \; i = 1, \ldots, n.$$

3. Фундаментальные оператор-функции в условиях полиномиальной ограниченности

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, $B, A_1, A_0 \in L(E_1, E_2)$, оператор B необратим. Следуя работе [3], введем ряд понятий: B-резольвентным множеством пары операторов (A_1, A_0) называется следующее открытое множество комплексной плоскости

$$\rho^B(A_1, A_0) \equiv \{\mu \in C : R_\mu^B(A_1, A_0) = (\mu^2 B - \mu A_1 - A_0)^{-1} \in L(E_2, E_1)\}.$$

Пара операторов (A_1, A_0) называется полиномиально ограниченной относительно оператора B (или полиномиально B-ограниченной), если существует число $a > 0$ такое, что $\{\mu \in C : |\mu| > a\} \subset \rho^B(A_1, A_0)$. Рассмотрим окружность $\Gamma \equiv \{\mu \in C : |\mu| = r > a\}$, тогда при условии полиномиальной B-ограниченности будем предполагать выполненным условие

A) для любой окружности Γ указанного вида $\oint\limits_{\Gamma} R_\mu^B(A_1, A_0)d\mu \equiv 0$.

В этом случае [3] операторы

$$\tilde{P} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \mu R_\mu^B(A_1, A_0)Bd\mu, \quad \tilde{Q} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \mu BR_\mu^B(A_1, A_0)d\mu$$

являются проекторами в E_1 и E_2 соответственно, порождают разложения этих пространств в прямые суммы

$$E_1 \equiv E_1^0 \oplus E_1^1 = \ker \tilde{P} \oplus \operatorname{im} \tilde{P}$$

и

$$E_2 \equiv E_2^0 \oplus E_2^1 = \ker \tilde{Q} \oplus \operatorname{im} \tilde{Q},$$

действия операторов B, A_1, A_0 расщепляются, причем сужения $A_0^0 : E_1^0 \to E_2^0$ и $B_1 : E_1^1 \to E_2^1$ непрерывно обратимы.

В дальнейшем также будем предполагать выполненным условие (псевдокоммутирования):

B) операторы B и A_1 псевдокоммутируют относительно $R_\mu^B(A_1, A_0)$, т.е. $\forall \mu \in \rho^B(A_1, A_0)$ справедливо равенство

$$BR_\mu^B(A_1, A_0)A_1 = A_1R_\mu^B(A_1, A_0)B.$$

Как показано в [3], если выполнено условие **B)**, то пары операторов B и A_0, A_1 и A_0 также псевдокоммутируют относительно $R_\mu^B(A_1, A_0)$.

Пусть далее: $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \beta(t) \in C(t \geq 0)$, $\Lambda_0(t)$ – резольвента ядра $(-\alpha_0(t)\theta(t))$, $R_1(t)$ – резольвента сверточного ядра

$$k_1(t)\theta(t) = f_{2N}(t) * \beta(t)\theta(t),$$

и

$$g(t)\theta(t) = f_N(t) * \alpha_1(t)\theta(t),$$

N – натуральное число.

Введем два рекуррентных семейства обобщенных оператор-функций:

$$\begin{aligned}
&K_0^1(t) = I\delta(t), \qquad K_0^2(t) = I\delta(t),\\
&K_1^1(t) = H_0(t) = (\delta(t) + \Lambda_0(t)\theta(t)) * (\delta(t) - k_1(t)\theta(t))(A_0^0)^{-1}B_0,\\
&K_1^2(t) = -H_1(t) = -(\delta(t) + \Lambda_0(t)\theta(t)) * (\delta(t) + g(t)\theta(t))(A_0^0)^{-1}A_1^0,\\
&K_{q+1}^1(t) = K_q^2(t) * H_0(t), \qquad K_{q+1}^2(t) = K_q^1(t) - K_q^2(t) * H_1(t)
\end{aligned} \tag{11}$$

и

$$\begin{aligned}
&L_0^1(t) = I\delta(t), \quad L_0^2(t) = I\delta(t),\\
&L_1^1(t) = S_0(t) = (\delta(t) + R_1(t)\theta(t)) * (\delta(t) + \alpha_0(t)\theta(t))B_1^{-1}A_0^1,\\
&L_1^2(t) = S_1(t) = (\delta(t) + R_1(t))\theta(t)) * (\delta(t) + g(t)\theta(t))B_1^{-1}A_1^1,\\
&L_{q+1}^1(t) = L_q^2(t) * S_0(t), \qquad L_{q+1}^2(t) = L_q^1(t) + L_q^2(t) * S_1(t).
\end{aligned} \tag{12}$$

Теорема 4. *Если выполнено условие* **A)**, *то справедливы следующие сверточные равенства:*

$$\begin{aligned}
&(\delta(t) - k_1(t)\theta(t))B * K_q^i(t) - (\delta(t) + g(t)\theta(t))A_1 * K_{q+1}^i(t)\\
&\qquad - (\delta(t) + \alpha_0(t)\theta(t))A_0 * K_{q+2}^i(t) \equiv 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
&(\delta(t) - k_1(t)\theta(t))B * L_{q+2}^i(t) - (\delta(t) + g(t)\theta(t))A_1 * L_{q+1}^i(t)\\
&\qquad - (\delta(t) + \alpha_0(t)\theta(t))A_0 * L_q^i(t) \equiv 0, \qquad i = 1, 2, \qquad q = 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned} \tag{14}$$

$$K^2_{q+k+2}(t) = K^1_{k+1}(t) * K^2_q(t) + K^2_{k+1}(t) * K^2_{q+1}(t),$$
$$L^2_{q+k+2}(t) = L^1_{k+1}(t) * L^2_q(t) + L^2_{k+1}(t) * L^2_{q+1}(t), \qquad k, q = 0, 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Справедливость этих равенств доказывается индукцией по q. При $q = 0$ и $q = 1$ равенства проверяются непосредственно. Пусть $g \geq 2$, тогда

$$\begin{aligned}
(\delta(t) - k_1(t)\theta(t))B * K^2_q(t) - (\delta(t) + g(t)\theta(t))A_1 * K^2_{q+1}(t)& \\
- (\delta(t) + \alpha_0(t)\theta(t))A_0 * K^2_{q+2}(t)& \\
=&(\delta(t) - k_1(t)\theta(t))B * (K^1_{q-1}(t) - K^2_{q-1}(t) * H_1(t)) \\
&- (\delta(t) + g(t)\theta(t))A_1 * (K^1_q(t) - K^2_q(t) * H_1(t)) \\
&- (\delta(t) + \alpha_0(t)\theta(t))A_0 * (K^1_{q+1}(t) - K^2_{q+1}(t) * H_1(t)) \\
=&[(\delta(t) - k_1(t)\theta(t))B * K^2_{q-2}(t) - (\delta(t) + g(t)\theta(t))A_1 * K^2_{q-1}(t) \\
&- (\delta(t) + \alpha_0(t)\theta(t))A_0 * K^2_q(t)] * H_0(t) \\
&- [(\delta(t) - k_1(t)\theta(t))B * K^2_{q-1}(t) - (\delta(t) + g(t)\theta(t))A_1 * K^2_q(t) \\
&- (\delta(t) + \alpha_0(t)\theta(t))A_0 * K^2_{q+1}(t)] * H_1(t) \equiv 0,
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
K^2_{q+k+2}(t) =&K^1_{q+k+1}(t) - K^2_{q+k+1}(t) * H_1(t) \\
=&K^2_{q+k}(t) * H_0(t) - K^2_{q+k+1}(t) * H_1(t) \\
=&(K^1_{k+1}(t) * K^2_{q-2}(t) + K^2_{k+1}(t) * K^2_{q-1}(t)) * H_0(t) \\
&- (K^1_{k+1}(t) * K^2_{q-1}(t) + K^2_{k+1}(t) * K^2_q(t)) * H_1(t) \\
=&K^1_{k+1}(t) * [K^2_{q-2}(t) * H_0(t) - K^2_{q-1}(t) * H_1(t)] \\
&+ K^2_{k+1}(t) * [K^2_{q-1}(t) * H_0(t) - K^2_q(t) * H_1(t)] \\
=&K^1_{k+1}(t) * [K^1_{q-1}(t) - K^2_{q-1}(t) * H_1(t)] + K^2_{k+1}(t) * [K^1_q(t) - K^2_q(t) * H_1(t)] \\
=&K^1_{k+1}(t) * K^2_q(t) + K^2_{k+1}(t) * K^2_{q+1}(t).
\end{aligned}$$

Остальные соотношения доказываются совершенно аналогично. □

Теорема 5. *Если пара операторов (A_1, A_0) полиномиально B-ограничена, выполнены условия* **A)** *и* **B)**, *то интегро-дифференциальный оператор*

$$\begin{aligned}
B\delta^{(2N)}(t) - A_1\delta^{(N)}(t) - A_0\delta(t) - \Big(\beta(t)B + \alpha_1(t)A_1 + \alpha_0(t)A_0\Big)\theta(t)& \\
=B\Big(\delta^{(2N)}(t) - \beta(t)\theta(t)\Big) - A_1\Big(\delta^{(N)}(t) + \alpha_1(t)\theta(t)\Big) - A_0\Big(\delta(t) + \alpha_0(t)\theta(t)\Big)&
\end{aligned}$$

имеет на классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t) = \tilde{\mathcal{U}}_N(t)\tilde{Q} - \tilde{\mathcal{V}}_N(t)(I - \tilde{Q}),$$

здесь

$$\tilde{\mathcal{U}}_N(t) = (\delta(t) + R_1(t)\theta(t)) * \sum_{q=0}^{\infty} f_{N\cdot(q+2)}(t) * L^2_q(t)B_1^{-1},$$

$$\tilde{\mathcal{V}}_N(t) = (\delta(t) + \Lambda_0(t)\theta(t)) * \sum_{q=0}^{\infty} \delta^{(q\cdot N)}(t) * K^2_q(t)(A^0_0)^{-1}.$$

Доказательство. Доказательство проведем по той же схеме, что и в теореме 1. Во-первых,

$$\begin{aligned}
&B\bigg(\delta^{(2N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\bigg)*\tilde{\mathcal{U}}_N(t)\tilde{Q}\\
&\quad=B\bigg(\delta^{(2N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\bigg)*(\delta(t)+R_1(t)\theta(t))*f_{2N}(t)*B_1^{-1}\tilde{Q}\delta(t)\\
&\qquad+(\delta(t)+R_1(t)\theta(t))*\sum_{q=1}^{\infty}f_{N\cdot(q+2)}(t)*(\delta^{(2N)}(t)-\beta(t)\theta(t))B*L_q^2(t)B_1^{-1}\tilde{Q}\\
&\quad=B(\delta(t)-k_1(t)\theta(t))*(\delta(t)+R_1(t)\theta(t))*B_1^{-1}\tilde{Q}\delta(t)\\
&\qquad+(\delta(t)+R_1(t)\theta(t))*\sum_{q=1}^{\infty}f_{N\cdot q}(t)*(\delta(t)-k_1(t)\theta(t))B*L_q^2(t)B_1^{-1}\tilde{Q}\\
&\quad=\tilde{Q}\delta(t)+(\delta(t)+R_1(t)\theta(t))*\bigg[f_N(t)*(\delta(t)+g(t)\theta(t))A_1^1B_1^{-1}\tilde{Q}\\
&\qquad+\sum_{q=2}^{\infty}f_{N\cdot q}(t)*(\delta(t)-k_1(t)\theta(t))B*L_q^2(t)B_1^{-1}\tilde{Q}\bigg],
\end{aligned}$$

во-вторых,

$$\begin{aligned}
&A_1\bigg(\delta^{(N)}(t)+\alpha_1(t)\theta(t)\bigg)*\tilde{\mathcal{U}}_N(t)\tilde{Q}\\
&\quad=(\delta(t)+R_1(t)\theta(t))*\sum_{q=0}^{\infty}f_{N\cdot(q+1)}(t)*(\delta(t)+g(t)\theta(t))A_1*L_q^2(t)B_1^{-1}\tilde{Q}\\
&\quad=(\delta(t)+R_1(t)\theta(t))*\bigg[f_N(t)*(\delta(t)+g(t)\theta(t))A_1^1B_1^{-1}\tilde{Q}\\
&\qquad+\sum_{q=1}^{\infty}f_{N\cdot(q+1)}(t)*(\delta(t)+g(t)\theta(t))A_1*L_q^2(t)B_1^{-1}\tilde{Q}\bigg],
\end{aligned}$$

в-третьих,

$$\begin{aligned}
&A_0\bigg(\delta(t)+\alpha_0(t)\theta(t)\bigg)*\tilde{\mathcal{U}}_N(t)\tilde{Q}\\
&\quad=(\delta(t)+R_1(t)\theta(t))*\sum_{q=0}^{\infty}f_{N\cdot(q+2)}(t)*(\delta(t)+\alpha_0(t)\theta(t))A_0*L_q^2(t)B_1^{-1}\tilde{Q}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует в силу равенств (14)

$$\begin{aligned}
&\bigg[B\bigg(\delta^{(2N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\bigg)-A_1\bigg(\delta^{(N)}(t)+\alpha_1(t)\theta(t)\bigg)\\
&\qquad-A_0\bigg(\delta(t)+\alpha_0(t)\theta(t)\bigg)\bigg]*\tilde{\mathcal{U}}_N(t)\tilde{Q}\\
&=\tilde{Q}\delta(t)+(\delta(t)+R_1(t)\theta(t))*\sum_{q=0}^{\infty}f_{N\cdot(q+2)}(t)*\bigg[(\delta(t)-k_1(t)\theta(t))B*L_{q+2}^2(t)\\
&\qquad-(\delta(t)+g(t)\theta(t))A_1*L_{q+1}^2(t)-(\delta(t)+\alpha_0(t)\theta(t))A_0*L_q^2(t)\bigg]B_1^{-1}\tilde{Q}\\
&=\tilde{Q}\delta(t).
\end{aligned}$$

Далее, во-первых,

$$\begin{aligned}
&B\Big(\delta^{(2N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\Big)*\tilde{\mathcal{V}}_N(t)(I-\tilde{Q})\\
&=(\delta(t)+\Lambda_0(t)\theta(t))*\sum_{q=0}^{\infty}\delta^{(q\cdot N)}(t)*(\delta^{(2N)}(t)-\beta(t)\theta(t))B*K_q^2(t)(A_0^0)^{-1}(I-\tilde{Q})\\
&=(\delta(t)+\Lambda_0(t)\theta(t))*\sum_{q=0}^{\infty}\delta^{((q+2)\cdot N)}(t)*f_{2N}(t)*(\delta^{(2N)}(t)-\beta(t)\theta(t))B\\
&\quad*K_q^2(t)(A_0^0)^{-1}(I-\tilde{Q})\\
&=(\delta(t)+\Lambda_0(t)\theta(t))*\sum_{q=0}^{\infty}\delta^{((q+2)\cdot N)}(t)*(\delta(t)-k_1(t)\theta(t))B*K_q^2(t)(A_0^0)^{-1}(I-\tilde{Q}),
\end{aligned}$$

во-вторых,

$$\begin{aligned}
&A_1\Big(\delta^{(N)}(t)+\alpha_1(t)\theta(t)\Big)*\tilde{\mathcal{V}}_N(t)(I-\tilde{Q})\\
&=(\delta(t)+\Lambda_0(t)\theta(t))*\sum_{q=0}^{\infty}\delta^{(q\cdot N)}(t)*(\delta^{(N)}(t)+\alpha_1(t)\theta(t))A_1*K_q^2(t)(A_0^0)^{-1}(I-\tilde{Q})\\
&=(\delta(t)+\Lambda_0(t)\theta(t))*\sum_{q=0}^{\infty}\delta^{((q+1)\cdot N)}(t)*f_N(t)*(\delta^{(N)}(t)+\alpha_1(t)\theta(t))A_1\\
&\quad*K_q^2(t)(A_0^0)^{-1}(I-\tilde{Q})\\
&=(\delta(t)+\Lambda_0(t)\theta(t))*\Bigg[\sum_{q=1}^{\infty}\delta^{((q+1)\cdot N)}(t)*(\delta(t)+g(t)\theta(t))A_1*K_q^2(t)\\
&\quad+\delta^{(N)}(t)*(\delta(t)+g(t)\theta(t))A_1^0\Bigg](A_0^0)^{-1}(I-\tilde{Q}),
\end{aligned}$$

в-третьих,

$$\begin{aligned}
&A_0\Big(\delta(t)+\alpha_0(t)\theta(t)\Big)*\tilde{\mathcal{V}}_N(t)(I-\tilde{Q})\\
&=(I-\tilde{Q})\delta(t)+(\delta(t)+\Lambda_0(t)\theta(t))*\sum_{q=1}^{\infty}\delta^{(q\cdot N)}(t)*(\delta(t)+\alpha_0(t)\theta(t))A_0\\
&\quad*K_q^2(t)(A_0^0)^{-1}(I-\tilde{Q})\\
&=(I-\tilde{Q})\delta(t)+(\delta(t)+\Lambda_0(t)\theta(t))*\Bigg[\sum_{q=2}^{\infty}\delta^{(q\cdot N)}(t)*(\delta(t)+\alpha_0(t)\theta(t))A_0*K_q^2(t)\\
&\quad-\delta^{(N)}(t)*(\delta(t)+g(t)\theta(t))A_1^0\Bigg](A_0^0)^{-1}(I-\tilde{Q}).
\end{aligned}$$

Отсюда в силу равенств (13) получаем

$$\begin{aligned}
&\Bigg[B\Big(\delta^{(2N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\Big)-A_1\Big(\delta^{(N)}(t)+\alpha_1(t)\theta(t)\Big)\\
&-A_0\Big(\delta(t)+\alpha_0(t)\theta(t)\Big)\Bigg]*\tilde{\mathcal{V}}_N(t)(I-\tilde{Q})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(I-\tilde{Q})\delta(t) + (\delta(t)+\Lambda_0(t)\theta(t)) * \sum_{q=0}^{\infty} \delta^{(N\cdot(q+2))}(t) * [(\delta(t)-k_1(t)\theta(t))B * K_q^2(t)\\
&\quad -(\delta(t)+g(t)\theta(t))A_1 * K_{q+1}^2(t) - (\delta(t)+\alpha_0(t)\theta(t))A_0 * K_{q+2}^2(t)](A_0^0)^{-1}(I-\tilde{Q})\\
&= -(I-\tilde{Q})\delta(t).
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
&\Bigg[B\Big(\delta^{(2N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\Big) - A_1\Big(\delta^{(N)}(t)+\alpha_1(t)\theta(t)\Big)\\
&\quad - A_0\Big(\delta(t)+\alpha_0(t)\theta(t)\Big)\Bigg] * \tilde{\mathcal{E}}_N(t)\\
&=\tilde{Q}\delta(t) + (I-\tilde{Q})\delta(t) = I\delta(t).
\end{aligned}
$$

Аналогичными рассуждениями последовательно находим, во-первых,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\mathcal{U}}_N(t)\tilde{Q} * B\Big(\delta^{(2N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\Big)\\
&\quad=(\delta(t)+R_1(t)\theta(t)) * \sum_{q=0}^{\infty} f_{N\cdot q}(t) * (\delta(t)-k_1(t)\theta(t)) * L_q^2(t)\tilde{P}\\
&\quad=\sum_{q=0}^{\infty} f_{N\cdot q}(t) * L_q^2(t)\tilde{P} = \tilde{P}\delta(t) + \left[f_N(t) * L_1^2(t) + \sum_{q=2}^{\infty} f_{N\cdot q}(t) * L_q^2(t)\right]\tilde{P},
\end{aligned}
$$

во-вторых,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\mathcal{U}}_N(t)\tilde{Q} * A_1\Big(\delta^{(N)}(t)+\alpha_1(t)\theta(t)\Big)\\
&\quad=(\delta(t)+R_1(t)\theta(t)) * \sum_{q=0}^{\infty} f_{N\cdot(q+1)}(t) * (\delta(t)+g(t)\theta(t)) * L_q^2(t)B_1^{-1}A_1^1\tilde{P}\\
&\quad=\sum_{q=0}^{\infty} f_{N\cdot(q+1)}(t) * L_q^2(t) * S_1(t)\tilde{P}\\
&\quad=\left[f_N(t) * L_1^2(t) + \sum_{q=1}^{\infty} f_{N\cdot(q+1)}(t) * L_q^2(t) * S_1(t)\right]\tilde{P},
\end{aligned}
$$

в-третьих,

$$
\tilde{\mathcal{U}}_N(t)\tilde{Q} * A_0\Big(\delta(t)+\alpha_0(t)\theta(t)\Big) = \sum_{q=0}^{\infty} f_{N\cdot(q+2)}(t) * L_q^2(t) * S_0(t)\tilde{P},
$$

откуда получаем в силу рекуррентных соотношений (12)

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\mathcal{U}}_N(t)\tilde{Q} * \Bigg[B\Big(\delta^{(2N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\Big) - A_1\Big(\delta^{(N)}(t)+\alpha_1(t)\theta(t)\Big)\\
&\qquad -A_0\Big(\delta(t)+\alpha_0(t)\theta(t)\Big)\Bigg]\\
&\quad=\tilde{P}\delta(t) + \sum_{q=0}^{\infty} f_{N\cdot(q+2)}(t) * \Big(L_{q+2}^2(t) - L_{q+1}^2(t) * S_1(t) - L_q^2(t) * S_0(t)\Big)\tilde{P}
\end{aligned}
$$

$$=\tilde{P}\delta(t)+\sum_{q=0}^{\infty} f_{N\cdot(q+2)}(t)*\left(L^2_{q+2}(t)-L^2_{q+1}(t)*S_1(t)-L^1_{q+1}(t)\right)\tilde{P}$$
$$=\tilde{P}\delta(t).$$

Для завершения доказательства осталось получить следующие три соотношения: первое

$$\tilde{\mathcal{V}}_N(t)(I-\tilde{Q})*B\left(\delta^{(2N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)$$
$$=(\delta(t)+\Lambda_0(t)\theta(t))*\sum_{q=0}^{\infty}\delta^{(N\cdot q)}(t)*\left(\delta^{(2N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\right)*K^2_q(t)(A^0_0)^{-1}B_0(I-\tilde{P})$$
$$=(\delta(t)+\Lambda_0(t)\theta(t))*\sum_{q=0}^{\infty}\delta^{(N\cdot(q+2))}(t)*(\delta(t)-k_1(t)\theta(t))*K^2_q(t)(A^0_0)^{-1}B_0(I-\tilde{P})$$
$$=\left[\sum_{q=0}^{\infty}\delta^{(N\cdot(q+2))}(t)*K^2_q(t)*H_0(t)\right](I-\tilde{P}),$$

второе

$$\tilde{\mathcal{V}}_N(t)(I-\tilde{Q})*A_1\left(\delta^{(N)}(t)+\alpha_1(t)\theta(t)\right)$$
$$=(\delta(t)+\Lambda_0(t)\theta(t))*\sum_{q=0}^{\infty}\delta^{(N\cdot q)}(t)*\left(\delta^{(N)}(t)+\alpha_1(t)\theta(t)\right)*K^2_q(t)(A^0_0)^{-1}A^0_1(I-\tilde{P})$$
$$=(\delta(t)+\Lambda_0(t)\theta(t))*\sum_{q=0}^{\infty}\delta^{(N\cdot(q+1))}(t)*(\delta(t)+g(t)\theta(t))*K^2_q(t)(A^0_0)^{-1}A^0_1(I-\tilde{P})$$
$$=\left[\sum_{q=0}^{\infty}\delta^{(N\cdot(q+1))}(t)*K^2_q(t)*H_1(t)\right](I-\tilde{P})$$
$$=\left[\delta^{(N)}(t)*H_1(t)+\sum_{q=1}^{\infty}\delta^{(N\cdot(q+1))}(t)*K^2_q(t)*H_1(t)\right](I-\tilde{P}),$$

третье

$$\tilde{\mathcal{V}}_N(t)(I-\tilde{Q})*A_0\left(\delta^{(N)}(t)+\alpha_0(t)\theta(t)\right)$$
$$=(\delta(t)+\Lambda_0(t)\theta(t))*\sum_{q=0}^{\infty}\delta^{(N\cdot q)}(t)*\left(\delta(t)+\alpha_0(t)\theta(t)\right)*K^2_q(t)(I-\tilde{P})$$
$$=\sum_{q=0}^{\infty}\delta^{(N\cdot q)}(t)*K^2_q(t)(I-\tilde{P})$$
$$=(I-\tilde{P})\delta(t)+\left[\delta^{(N)}(t)*K^2_1(t)+\sum_{q=2}^{\infty}\delta^{(N\cdot q)}(t)*K^2_q(t)\right](I-\tilde{P})$$
$$=(I-\tilde{P})\delta(t)+\left[-\delta^{(N)}(t)*H_1(t)+\sum_{q=2}^{\infty}\delta^{(N\cdot q)}(t)*K^2_q(t)\right](I-\tilde{P}).$$

Таким образом, в соответствии с рекуррентными соотношениями (11) имеем

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathcal{V}}_N(t)(I-\tilde{Q})*\Big[B\Big(\delta^{(2N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\Big)-A_1\Big(\delta^{(N)}(t)+\alpha_1(t)\theta(t)\Big)\\
&\qquad -A_0\Big(\delta(t)+\alpha_0(t)\theta(t)\Big)\Big]\\
&=\sum_{q=0}^{\infty}\delta^{(N\cdot(q+2))}(t)*\Big[K_q^2(t)*H_0(t)-K_{q+1}^2(t)*H_1(t)-K_{q+2}^2(t)\Big](I-\tilde{P})\\
&\quad-(I-\tilde{P})\delta(t)\\
&=\sum_{q=0}^{\infty}\delta^{(N\cdot(q+2))}(t)*\Big[K_{q+1}^1(t)-K_{q+1}^2(t)*H_1(t)-K_{q+2}^2(t)\Big](I-\tilde{P})-(I-\tilde{P})\delta(t)\\
&=-(I-\tilde{P})\delta(t).
\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\Big[B\Big(\delta^{(2N)}(t)-\beta(t)\theta(t)\Big)-A_1\Big(\delta^{(N)}(t)+\alpha_1(t)\theta(t)\Big)\\
&\qquad -A_0\Big(\delta(t)+\alpha_0(t)\theta(t)\Big)\Big]=\tilde{P}\delta(t)+(I-\tilde{P})\delta(t)=I\delta(t).
\end{aligned}$$

□

Замечание 7. *Если в уравнении (3)*

$$\alpha_0(t)=\alpha_1(t)=\beta(t)\equiv 0,$$

то доказанная здесь теорема 5 совпадает с теоремой 5 из работы [5]*, а если*

$$\alpha_1(t)=\beta(t)\equiv 0,$$

то с теоремой 5 из работы [6]*. Выводы, сформулированные в замечании 5 относительно задачи Коши (1)–(2), полностью актуальны и для задачи Коши (3)–(4).*

Если ∞ является устранимой особой точкой пары операторов (A_1, A_0) полиномиально ограниченной относительно B (см. [3], стр. 55), т.е. $K_1^1 \equiv 0$, $K_1^2 \equiv 0$ или $(A_0^0)^{-1}B_0 \equiv 0$, $(A_0^0)^{-1}A_1^0 \equiv 0$, тогда фундаментальная оператор-функция из теоремы 5 приобретает вид

$$\tilde{\tilde{\mathcal{E}}}_N(t)=\tilde{\mathcal{U}}_N(t)\tilde{Q}-(\delta(t)+\Lambda_0(t)\theta(t))(A_0^0)^{-1}(I-\tilde{Q}),$$

тогда единственным решением задачи Коши (3)–(4) окажется регулярная обобщенная функция

$$\tilde{u}(t)=\tilde{\tilde{\mathcal{E}}}_N(t)*\Big(f(t)\theta(t)+Bu_{2N-1}\delta(t)+Bu_{2N-2}\delta'(t)+\cdots+Bu_1\delta^{(2N-2)}(t)+Bu_0\delta^{(2N-1)}(t)\Big),$$

которая обращает в тождество уравнение (3) и принадлежит классу $C^{2N}(t\geq 0, E_1)$. Условия, при которых эта функция удовлетворит начальным условиям (4), и будут условиями разрешимости задачи Коши (3)–(4) в классе $C^{2N}(t \geq 0, E_1)$. Прямыми вычислениями находим

$$\tilde{u}^{(j)}\Big|_{t=0}=u_j-\tilde{\omega}_j,\quad j=0,1,2,\ldots,2N-1,$$

где

$$\tilde{\omega}_j=(A_0^0)^{-1}(I-\tilde{Q})\big[A_0u_j+f^{(j)}(0)+\Lambda_0(0)f^{(j-1)}(0)+\Lambda_0'(0)f^{(j-2)}(0)+\ldots$$

$$
\begin{aligned}
&+ \Lambda_0^{(j-2)}(0)f'(0) + \Lambda_0^{(j-1)}(0)f(0)\big] \\
=&(A_0^0)^{-1}(I-\tilde{Q})\tilde{v}_j.
\end{aligned}
$$

Поскольку $(A_0^0)^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$, то $\tilde{\omega}_j = 0$ при $(I-\tilde{Q})\tilde{v}_j = 0$.

Теорема 6. *Если в условиях теоремы 5* ∞ *является устранимой особой точкой, то задача Коши (3)–(4) однозначно разрешима в классе* $C^{2N}(t \geq 0, E_1)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$
\begin{aligned}
(I-\tilde{Q})\big[&A_0 u_j + f^{(j)}(0) + \Lambda_0(0)f^{(j-1)}(0) + \Lambda_0'(0)f^{(j-2)}(0) + \ldots \\
&+ \Lambda_0^{(j-2)}(0)f'(0) + \Lambda_0^{(j-1)}(0)f(0)\big] = 0, \qquad j = 0,1,2,\ldots,2N-1.
\end{aligned}
$$

Пример 2. Для интегро-дифференциального аналога уравнения теории вязкоупругости [10] рассмотрим задачу Коши-Дирихле

$$
(\lambda - \Delta)\, u_{tt} - \beta(\mu - \Delta)u_t - \Delta^2 u + \int\limits_0^t g(t-\tau)\left(\gamma - \Delta^2\right) u(\tau,\bar{x})d\tau = f(t,\bar{x}), \tag{15}
$$

$$
u\Big|_{t=0} = u_0(\bar{x}), \;\; u_t\Big|_{t=0} = u_1(\bar{x}), \;\; \bar{x} \in \Omega; \;\; u\Big|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0, \;\; t \geq 0, \tag{16}
$$

где $g(t),\; f(t,\bar{x})$ – заданные функции, $u = u(t,\bar{x})$ – искомая функция, $\bar{x} \in \Omega \subset R^m$ – ограниченная область с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$, Δ – оператор Лапласа, $u = u(t,\bar{x})$ определена на цилиндре $R_+ \times \Omega$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$.

Для задачи Коши-Дирихле (15)-(16), где $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $\lambda \neq \mu$, банаховы пространства E_1 и E_2 и операторы определим следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&E_1 \equiv \left\{v(\bar{x}) \in W_p^{k+4}(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\right\},\; E_2 \equiv W_p^k(\Omega), \\
&B = \lambda - \Delta, \qquad A_1 = \beta(\mu - \Delta), \qquad A_0 = \Delta^2,
\end{aligned} \tag{17}
$$

тогда ядро интегрального оператора из уравнения (15) раскладывается в сумму

$$
-g(t)\left(\gamma - \Delta^2\right) = \beta(t)(\lambda - \Delta) + \alpha_1(t)\beta(\mu - \Delta) + \alpha_0(t)\Delta^2,
$$

где

$$
\beta(t) = -\frac{\gamma}{\lambda - \mu}g(t), \qquad \alpha_1(t) = \frac{\gamma}{\beta(\lambda - \mu)}g(t), \qquad \alpha_0(t) = g(t).
$$

Рассуждая, как в работе [3] (см. стр. 83–84, лемма 4.2.1), убеждаемся, что выбранная таким образом пара операторов (A_1, A_0) является полиномиально ограниченной относительно B и ∞ является устранимой особой точкой. Отсюда в соответствии с теоремой 6 получаем

Теорема 7. *Пусть для задачи Коши-Дирихле (15)-(16), где* $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $\lambda \neq \mu$, *банаховы пространства* E_1 *и* E_2 *и операторы* B, A_1, A_0 *определены как в (17), тогда существует единственное решение* $u(t) \in C^{2N}(t \geq 0, E_1)$ *задачи (15)–(16) тогда и только тогда, когда начально-краевые условия (16) и функция* $f(t,\bar{x})$ *удовлетворяют соотношениям*

$$
\begin{gathered}
\left\langle \lambda^2 u_0(\bar{x}) + f(0,\bar{x}), \varphi_i(\bar{x})\right\rangle = 0, \\
\left\langle \lambda^2 u_1(\bar{x}) + f_t'(0,\bar{x}) - g(0)f(0,\bar{x}), \varphi_i(\bar{x})\right\rangle = 0,\; i = 1,\ldots,n,
\end{gathered}
$$

здесь $\varphi_i(\bar{x})$, $i = 1,\ldots,n$ *ортонормированный базис пространства решений однородной задачи:* $\lambda\varphi_i = \Delta\varphi_i$, $\varphi_i|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0$.

Замечание 8. *Как и в теореме 3, см. замечание 6, условия разрешимости задачи Коши-Дирихле (15)–(16) можно переписать в эквивалентном виде следующим образом*

$$
\begin{gathered}
\left\langle \lambda^2 u_0(\bar{x}) + f(0,\bar{x}), \varphi_i(\bar{x})\right\rangle = 0, \\
\left\langle \lambda^2 u_1(\bar{x}) + \lambda^2 g(0)u_0(\bar{x}) + f_t'(0,\bar{x}), \varphi_i(\bar{x})\right\rangle = 0,\; i = 1,\ldots,n.
\end{gathered}
$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров В.С. *Обобщение функции в математической физике.* М.: Наука. 1979.
2. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука. 1982.
3. Замышляева А.А. *Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка.* Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ. 2012.
4. Свиридюк Г.А. *К общей теории полугрупп операторов* // УМН. **49**:4, 47–74 (1994).
5. Фалалеев М.В., Гражданцева Е.Ю. *Фундаменатльные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в усолвиях спектральной ограниченности* // Дифференц. уравнения. **42**:6, 769–774 (2006).
6. Фалалеев М.В., Орлов С.С. *Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения специального типа в банаховых пространствах и их приложения* // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». **7**:4, 100–110 (2011).
7. Фалалеев М.В. *Линейные модели теории вязкоупругости соболевского типа* // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». **6**:4, 101–107 (2013).
8. N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn and M. Falaleev *Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinaear Analysis and Applications.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. 2002.
9. G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov, *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht, Boston: VSP. 2003.
10. M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira *Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equation with Strong Damping* // Math. Meth. Appl. Sci. **24**, 1043–1053 (2001).

Михаил Валентинович Фалалеев,
Институт математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «ИГУ»,
ул. К. Маркса, 1,
664003, г. Иркутск, Россия
E-mail: mvfalaleev@gmail.com