ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 2 (2020). С. 3-9.

УДК 517.41

ПРОИЗВЕДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ВРОНСКИАНЫ

А.А. АЛЛАХВЕРДЯН, А.Б. ШАБАТ

Аннотация. Рассматриваются новые вронскианные тождества, открытые недавно в г. Майкопе. Обсуждаются связи этих тождеств с теорией интегрируемых систем и с общей теорией обратимых преобразований Дарбу для линейных дифференциальных операторов с одной независимой переменной. Объектами изучения в данной работе являются однородные относительно группы растяжений отношения вронскианов двух различных порядков N и $N' > N$. Элементы первого вронскиана порядка N являются произвольными функциями, что существенно расширяет возможности теории, а элементы второго вронскиана образованы произведениями заданной степени $n \geq 2$ этих функций. Группа растяжений позволяет перейти к проективным координатам в рассматриваемом отношении вронскианов и определить, в частности, вложение симметрических функций и многочленов в рассматриваемую теорию.96

Наиболее простым оказывается, естественно, случай $N = 2$, в котором второй вронскиан из произведений оказывается степенью исходного вронскиана и, таким образом, рассматриваемое отношение вронскианов вообще не зависит от выбора элементов основного вронскиана второго порядка. В этом случае получены также новые уравнения для кубов и т.д. собственных функций одномерного оператора Шредингера, обобщающие известные уравнения для квадратов, связанное с производной Шварца и КдФ иерархией.

Случай $N = 3$ представляется чрезвычайно интересным с различных точек зрения, но его исследование требует дальнейшего развития методов проективной теории вронскианов с использованием логарифмических производных и их высших аналогов.

Ключевые слова: факторизация, матрица Вронского, производная Шварца, уравнение Риккати, преобразования Дарбу.

Mathematics Subject Classification: 35P05; 35B10

1. Вронскианы

Задача о построении дифференциального оператора L порядка $n \geq 2$ по фундаментальной системе решений уравнения $L\varphi_j = 0,\ j = \overline{1,n}$ (для краткости далее будем использовать следующее сокращение $(j \in [n])$) сводится очевидно к линейной алгебре, и формулы Крамера дают нам следующую формулу с вронскианами для действия оператора $L(\varphi)$ на произвольную гладкую функцию φ:

$$L(\varphi) = \frac{\langle \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle}, \quad \varphi_j \in \ker L. \tag{1.1}$$

Здесь предполагается, что заданные функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ образуют базис n-мерного линейного пространства $\ker L$, а скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают вронскиан $\langle y_1, \dots, y_m \rangle = \det(D_x^{k-1}(y_j))$, $j, k = 1, \dots, m$ т.е. определитель матрицы Вронского, составленной из производных рассматриваемых функций. Формула (1.1) и ее уточнения (см. ниже (3.2)) заменяют нам

A.A. Allakhverdyan, A.B. Shabat, Products of eigenfunctions and Wronskians.

Поступила 7 февраля 2020 г.

разложение обычного многочлена в произведение линейных сомножителей и играют аналогичную роль, если мы уточняем структуру ядра рассматриваемого дифференциального оператора L.

Используя известные свойства определителей и формулы Лейбница, мы находим, что

$$y_j(x) = a(x)\hat{y}_j(x), \quad \forall\ j \ \Rightarrow\ \langle y_1, \ldots, y_m\rangle = a^m\langle \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_m\rangle. \tag{1.2}$$

На языке дифференциального оператора (1.1) эта операция совпадает с операцией сопряжения

$$L \Leftrightarrow \widetilde{L}, \qquad L = \frac{1}{a}\cdot \widetilde{L}\circ a. \tag{1.3}$$

Напомним, что, используя сопряжение (1.2) в исходной формуле (1.1), можно избавиться от знаменателя, положив $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n\rangle = 1$. Старший коэффициент дифференциального оператора L при этом по-прежнему будет единичным, но в добавок обратится в нуль следующий коэффициент при производной $\varphi^{(n-1)}$ порядка $n-1$. Для вронскианов при $a = 1/\varphi_n$ операция (1.2) соответствует переходу в матрице Вронского к *однородным координатам и их логарифмическим производным*:

$$w_n(\vec{\psi}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\rangle}{\psi_1\psi_2\cdots\psi_n} = (-1)^{n-1}\det\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_{n-1}\\ g_1' + g_1^2 & g_2' + g_2^2 & \cdots & g_{n-1}' + g_{n-1}^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}, \\ g_j = (\log\psi_j)_x - (\log\psi_n)_x = \frac{\langle \psi_j, \psi_n\rangle}{\psi_j\psi_n}, \quad j \in [n-1] \tag{1.4}$$

Лемма 1.1. *Преобразованный вронскиан $w_n(\vec{\psi})$ является однородным антисимметричным многочленом степени $\frac{1}{2}n(n-1)$ от $n-1$ дифференциальных переменных $g_j,\ j \in [n-1]$.*

Действительно (ср. [3]), при $g = \phi'/\phi = (\log\phi)_x$ дальнейшее дифференцирование дает:

$$\frac{\phi''}{\phi} = g' + g^2, \quad \frac{\phi'''}{\phi} = g'' + 3gg' + g^3, \quad \frac{\phi^{(4)}}{\phi} = g^{(3)} + 4gg_{xx} + 3g_x^2 + 6g^2g_x + g^4 ... \tag{1.5}$$

2. Производная Шварца

Указанная выше формула (1.4) для вронскианов предоставляет удобный способ вывода дифференциальных уравнений для однородных мономов квадратов и кубов решений уравнения второго порядка [1] $\varphi'' = u(x)\varphi$. Для квадратов ответ известен, но мы для иллюстрации общей схемы приводим подробные вычисления и в этом случае.

Пусть $\varphi_j' = f_j\varphi_j,\ f_j' + f_j^2 = u(x),\ j \in [2]$ и $\psi_3 = \varphi_1\varphi_2$. Тогда

$$\psi_3' = [f_1 + f_2]\psi_3, \quad \psi_3'' = 2[u + f_1f_2]\psi_3, \quad \psi_3''' = 2\left[u' + 2u(f_1 + f_2)\right]\psi_3, \tag{2.1}$$

и, подставив соответствующие формулы для $\psi_1 = \varphi_1^2$ и $\psi_2 = \varphi_2^2$ в (1.1), мы находим, что

$$\frac{\langle \psi, \psi_1, \psi_2, \psi_3\rangle}{\psi_1\cdot\psi_2\cdot\psi_3} = \begin{pmatrix} \psi & 1 & 1 & 1\\ \psi' & 2f_1 & 2f_2 & f_1 + f_2\\ \psi'' & 2u + 2f_1^2 & 2u + 2f_2^2 & 2u + 2f_1f_2\\ \psi''' & 2u' + 8uf_1 & 2u' + 8uf_2 & 2u' + 4u(f_1 + f_2)\end{pmatrix}.$$

Окончательно мы получаем, что в случае «квадратов» решений уравнения $\varphi'' = u(x)\varphi$ формула (1.1) имеет следующий вид:

$$L(\psi) = \frac{\langle \psi, \psi_1, \psi_2, \psi_3\rangle}{\langle \psi_1, \psi_2, \psi_3\rangle} = \psi''' - 4u\psi' - 2u'\psi, \tag{2.2}$$

[1]а также квадратов и кубов решений уравнения со спектральным параметром $u \equiv u - \lambda$

а при $\psi_1=\varphi_1^2\varphi_2,\ \psi_2=\varphi_1\varphi_2^2,\ \psi_3=\varphi_1^3,\ \psi_4=\varphi_2^3$

$$L(\psi)=\frac{\langle\psi,\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4\rangle}{\langle\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4\rangle}=\psi''''-10(u\psi''+u'\psi')-3(u''-3u^2)\psi \tag{2.3}$$

В последнем случае роль формулы (2.1) для производных произведения $\varphi_1\varphi_2$ играют приведенные ниже формулы для производных функции $\psi_1=\varphi_1^2\varphi_2$:

$$\frac{\psi_1'}{\psi_1}=2f_1+f_2,\quad \frac{\psi_1''}{\psi_1}=3u+2f_1^2+4f_1f_2,\quad \frac{\psi_1'''}{\psi_1}=3u'+7u(2f_1+f_2)+6f_1^2f_2,$$
$$\frac{\psi_1''''}{\psi_1}=3u''+21u^2+10u'(2f_1+f_2)+u(20f_1^2+40f_1f_2).$$

Для сопоставления с обычным выводом (см. например [6]) уравнения для квадратов собственных функций оператора Шредингера умножим уравнение (2.2) на ψ. После интегрирования уравнение $L\psi=0$ третьего порядка приводится к виду

$$C(\lambda)=\psi_x^2+4(u-\lambda)\psi^2-2\psi_{xx}\psi, \tag{2.4}$$

где $C(\lambda)$—постоянная интегрирования, а λ— дополнительный параметр [1]. При $\psi=\varphi_1\varphi_2$ формула (2.1) устнавливает связь константы интегрирования с вронскианом $w=\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle$:

$$C(\lambda)=(f_1-f_2)^2=\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle^2. \tag{2.5}$$

С другой стороны, $(\log\psi)_x=(\log\varphi_1)_x+(\log\varphi_2)_x=f_1+f_2$, и поэтому

$$f_1=\frac{\psi_x-w}{2\psi},\quad f_2=\frac{\psi_x+w}{2\psi} \tag{2.6}$$

Формулы (2.6) переводят таким образом решение уравнения (2.4) с «производной» Шварца в пару решений уравнения Риккати или, другими словами, формула (2.6) вместе с формулой (2.2) устанавливают эквивалентность уравнения (2.4) уравнению Риккати $f_x+f^2=u-\lambda$.

Замечание 1. *Напомним, что задача о построении решения ψ уравнения* (2.4) *в явном виде использует оригинальную гипотезу о полиномиальной зависимости искомой функции $\psi=\psi(x;\lambda)$ от параметра λ:*

$$\psi=\lambda^n+a_1(x)\lambda^{n-1}+\cdots+a_n(x). \tag{2.7}$$

В простейшем случае $n=1$ подстановка $\psi=\lambda+a_1(x)$ в уравнение (2.4) приводит к формулам:

$$C(\lambda)=-4(\lambda^3+\alpha_1\lambda^2+\alpha_2\lambda+\alpha_3),\quad u=2a_1-\alpha_1$$

и известному дифференциальному уравнению первого порядка для эллиптической функции Вейерштрасса:

$$a_x^2=C(-a),\quad (a\equiv a_1(x)). \tag{2.8}$$

При $n>1$ степень многочлена $C(\lambda)$ в левой части уравнения (2.4) заменяется на $2n+1$, а уравнение (2.8) переходит в систему уравнений Дубровина [6] для n корней многочлена (2.7). Коэффициенты $a_j(x)$ этого многочлена (2.7) можно найти один за другим, используя дифференциальный оператор L из формулы (2.2):

$$4a_{j+1}'+L(a_j)=0,\ a_0=1,\quad L=D^3-4uD-2u_x. \tag{2.9}$$

Проинтегрированная форма (2.4) помогает при этом выразить $a_j(x)$ в терминах потенциала $u(x)$ и его производных. Так, например, с точностью до младших членов

$$8a_2=3u^2-u_2,\quad 32a_3=u_4-4uu_2+u_1^2+10u^3,\quad (u_1=u_x,\ u_2=u_{xx},\dots).$$

[1]подстановка $u\leftrightarrow u-\lambda$ допускается формулами (2.2)

При подстановке однородных мономов $\varphi_1^j\varphi_2^k = j+k = m$ в общую формулу (1.1) естественно ожидать, что коэффициенты полученного оператора могут зависеть от конкретного выбора базиса φ_1 и φ_2. Однако это не так, и объяснение обнаруженной инвариантности в случае четвертого порядка (2.3) дает, на наш взгляд, следующая теорема:

Теорема 2.1. *Пусть φ_1 и φ_2 произвольные гладкие функции и $\psi_1 = \varphi_1^3$, $\psi_2 = \varphi_1^2\varphi_2$, $\psi_3 = \varphi_1\varphi_2^2$, $\psi_4 = \varphi_2^3$. Тогда имеет место тождество*

$$\frac{\langle\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4\rangle}{(\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle)^6} = 12. \tag{2.10}$$

Доказательство

Применяя преобразование (1.2) (ср. формула (1.4)), мы в числителе заменяем $\psi_j \to \psi_j/\psi_4$:

$$\frac{\langle\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4\rangle}{(\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle)^6} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ g_1 & g_2 & g_3 & 0\\ g_1'+g_1^2 & g_2'+g_2^2 & g_3'+g_3^2 & 0\\ g_1''+3g_1g_1'+g_1^3 & g_2''+3g_2g_2'+g_2^3 & g_3''+3g_3g_3'+g_3^3 & 0\end{pmatrix},$$

где g_j обозначают логарифмические производные функций ψ_j/ψ_4. Таким образом,

$$g_1 = 3(f_1-f_2),\quad g_2 = 2(f_1-f_2),\quad g_3 = f_1-f_2, \tag{2.11}$$

где $f_j = (\log\varphi_j)'$, $j=1,\ 2$, и подстановка этих формул в приведенный выше определитель дает тождество (2.10) после приведения подобных членов. □ □

Утверждение *Теоремы 2.1* обобщается и на случай $\deg\varphi_1^j\varphi_2^k = j+k = 4$, и мы получаем

$$\frac{\langle\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4,\psi_5\rangle}{(\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle)^{10}} = 288 = 2^5 3^2. \tag{2.12}$$

Точнее, применив формулу (1.4), мы находим в этом случае, что

$$\frac{w_5(\vec{\psi})}{g_1\cdots g_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4\\ g_1^2 & g_2^2 & g_3^2 & g_4^2\\ g_1^3 & g_2^3 & g_3^3 & g_4^3\end{pmatrix} = \prod_{i>j}(g_i-g_j)+\dots, \tag{2.13}$$

где многоточие обозначает слагаемые из формул (1.5), содержащие производные g_j. Аналогично (2.11) мы находим,

$$g_1 = 4g,\quad g_2 = 3g,\quad g_3 = 2g,\quad g_4 = g = \left(\log\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)_x. \tag{2.14}$$

Легко видеть, что формула (2.12) следует из (2.13) и (2.14) при $g_j' = 0$, т.е. *экспоненциальных* функциях φ_1 и φ_2. В общем случае зануление добавочных слагаемых с производными приходится проверять непосредственно, начиная со старших (ср. [3]), используя явные формулы (1.5).

Оператор L, аналогичный (2.2) и (2.3), будет иметь в случае (2.13) пятый порядок. Интересные вопросы о приложениях этих операторов и их связь с производной Шварца и уравнениями типа КдФ остаются пока открытыми.

2.1. Случай экспонент. Задача о квадратах собственных функций оператора Шредингера и связанное с этой задачей тождество:

$$\frac{\langle\varphi_1^2,\varphi_1\varphi_2,\varphi_2^2\rangle}{\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle^3} = 2. \tag{2.15}$$

требуют модификации в случае операторов третьего порядка с размерностью нуль-пространства равной 3. Действительно, в случае квадратичных мономов с тремя образующими φ_j мы имеем

$$\psi_1 = \varphi_1^2, \quad \psi_2 = \varphi_1\varphi_2, \quad \psi_3 = \varphi_1\varphi_3, \quad \psi_4 = \varphi_2^2, \quad \psi_5 = \varphi_2\varphi_3, \quad \psi_6 = \varphi_3^2, \tag{2.16}$$

и переход к однородным координатам и их логарифмическим производным в формуле

$$\frac{\langle \psi_1, \ldots, \psi_6 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle^4}$$

дает в силу *Леммы 2.1* разные степени однородности[1] многочленов от дифференциальных переменных g_j в числителе и знаменателе рассматриваемой дроби. Мы вводим следующие обозначения:

$$\begin{gathered} g_j \stackrel{\text{def}}{=} \left(\log \frac{\psi_j}{\psi_6}\right)_x \;\Rightarrow\; g_1 = 2g,\; g_2 = g + h,\; g_3 = g,\; g_4 = 2h,\; g_5 = h \\ g = f_1 - f_3,\; h = f_2 - f_3; \quad f_j \stackrel{\text{def}}{=} (\log \varphi_j)_x,\; j \in [3]. \end{gathered} \tag{2.17}$$

В этих обозначениях пользуясь Леммой 2.1 получаем

$$\frac{\langle \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_6 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle^4} = -\begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_5 \\ g_1' + g_1^2 & \cdots & g_5' + g_5^2 \\ g_1'' + 3g_1g_1' + g_1^3, & \cdots & g_5'' + 3g_1g_5' + g_5^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & h \\ g' + g^2 & h' + h^2 \end{pmatrix}^{-4}.$$

В экспоненциальном приближении логарифмические производные постоянны

$$\frac{\langle \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_6 \rangle}{\psi_1\dot{\psi}_2 \cdots \psi_6} = 8(h-g)^4(hg)^4(2h-g)(h-2g)(g+h); \quad \left(\frac{(\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle)}{\varphi_1\varphi_2\varphi_3}\right)^4 = (h-g)^4(gh)^4,$$

и поэтому

$$\frac{\langle \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_6 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle^4} \approx 8(2h-g)(h-2g)(h+g). \tag{2.18}$$

В связи с этим можно высказать гипотезу о кратности нулей в уравнении

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle = 0 \;\Rightarrow\; \langle \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_6 \rangle = 0$$

и полиномиальном, в смысле *Леммы 1.1*, характере ответа в случае функций φ_j общего вида, а не только экспоненциальных.

Таким образом, вронскианы заменяются на вандермонды для экспоненциальных функций, и задача переходит в алгебраическую. В частности, отношение вронскианов (2.12) сводится при этом к отношению вандермондов, а результат деления не зависит от показателей экспонент функций φ_1 и φ_2. Ясно, что полученное условие инвариантности относительно выбора показателей экспонент является лишь *необходимым условием* для выполнения тождеств, аналогичных (2.12).

3. Преобразования Дарбу и факторизация.

В случае мономов с тремя образующими $\varphi_1^i\varphi_2^j\varphi_3^k,\ i+j+k = m \geq 2$ не удается найти подходящий нормировочный делитель для вронскианных тождеств типа (2.15). Экспоненциальный вариант этой задачи рассматривался кратко в конце предыдущего параграфа. Опираясь на произвольный выбор функций в тождествах, аналогичных (2.12) мы хотим в качестве первого шага добавить к преобразованиям Дарбу «нулевого порядка» (1.2) преобразования типа заменам $\varphi \to \varphi' - f\varphi$, т.е. преобразования Дарбу первого порядка. Следующий вариант известной в теории интегрируемых систем леммы подсказывает, как такие преобразования можно использовать вместо (1.2) в рассматриваемой задаче:

[1] в (2.15) они совпадают

Лемма 3.1. *Для вронскиана* $\langle\psi_1,\dots,\psi_m\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \det(\partial_x^{k-1}(\psi_j)), \quad j,k=1,\dots,m$ *от произвольных* $m\geq 2$ *гладких функций* $\psi_j(x)$ *имеет место следующая формула*

$$\langle\psi_1,\dots,\psi_m\rangle = \psi_1\langle\hat\psi_2,\dots,\hat\psi_m\rangle, \quad \hat\psi_j=(D-f)\psi_j, \quad f=D\log\psi_1. \tag{3.1}$$

Доказательство

Разложив определители $\langle\psi_1,\dots,\psi_m\rangle$ и $\langle\hat\psi_2,\dots,\hat\psi_m\rangle$ по элементам последнего столбца и учитывая, что $\hat\psi_m=(D-f)(\psi_m)$, мы получаем два выражения в виде дифференциального оператора порядка $m-1$, действующего на функцию ψ_m:

$$A(\psi_m)=(a_0D^{m-1}+a_1D^{m-2}+\dots+a_{m-1})(\psi_m) \quad \text{и}$$
$$\hat A(\psi_m)=(\hat a_0D^{m-2}+\hat a_1D^{m-3}+\dots+\hat a_{m-2})(D-f)(\psi_m)$$

Легко видеть, что нуль-пространства $\ker A$ и $\ker\hat A$ содержат функции $\psi_1,\dots,\psi_{m-1}$ и, следовательно, совпадают. Остается заметить, что необходимое нам равенство $a_0=\psi_1\hat a_0$ эквивалентно доказательству формулы (3.1): $\langle\psi_1,\dots,\psi_{m-1}\rangle=\psi_1\langle\hat\psi_2,\dots,\hat\psi_{m-1}\rangle$, но с заменой m на $m-1$. Для завершения доказательства можно сослаться на индукцию по m, т.к. при $m=2$ мы имеем $\langle\psi_1,\psi_2\rangle=\psi_1\psi_2'-\psi_2\psi_1'=\psi_1(D-f)\psi_2=\psi_1\hat\psi_2$. □ □

Непосредственным следствием *Леммы 3.1* является следующая теорема о факторизации произвольного дифференциального оператора, уточняющая исходную формулу (1.1)

Теорема 3.1. *Пусть заданные функции* $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ *образуют базис* n*-мерного линейного пространства* $\ker A$. *Тогда*

$$\begin{gathered} A=a_0(D-z_n)(D-z_{n-1})\cdots(D-z_1), \quad z_j=[\log(w_j/w_{j-1})]_x, \\ w_j\stackrel{\mathrm{def}}{=}\langle\varphi_1,\dots,\varphi_j\rangle, \quad j\in[n], \quad w_0\stackrel{\mathrm{def}}{=}1. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Доказательство

Переписав формулу (1.1) в виде $A(\varphi)=a_0\langle\varphi,\varphi_1,\dots,\varphi_n\rangle$ и применив *Лемму 3.1* , мы получаем

$$A(\varphi)=a_{0,1}A_1\circ(D-z_1)(\varphi), \quad z_1=(\log\varphi_1)_x\equiv[\log(w_1/w_0)]_x,$$

где оператор $A_1(\hat\varphi)=\langle\hat\varphi,\hat\varphi_2,\dots,\hat\varphi_n\rangle$ имеет порядок $n-1$ и можно применить индукцию. □ □

Используя *лемму 3.1* и *теорему 3.1*, мы можем так же, как в случае (1.2), понижать порядок определителей рассматриваемых вронскианов. Например, положив $\hat\varphi=\varphi'-z\varphi$, $z=(\log\varphi_3)_x$, мы получаем

$$\langle\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\rangle=\varphi_3\langle\hat\varphi_1,\hat\varphi_2\rangle, \quad \hat\varphi_j=\varphi_j'-z\varphi_j, \quad j\in[2].$$

Однако в случае, когда исходные функции $\varphi_j,\ j\in[3]$ (см. §2) образуют базис $\ker A$, для заданного дифференциального оператора A, преобразование $\varphi\to\hat\psi$ позволяет (см. например, [1]) заменить[1] исходный оператор на оператор $\hat A$, с другим "порядком сомножителей" в факторизационной формуле (3.2).

Отметим, что основные приложения преобразований Дарбу для операторов A третьего порядка (см. [4], [5]) связаны с антисимметричным случаем:

$$A+A^*=0, \quad A=D^3+aD+b \ \Leftrightarrow\ 2b=a',$$

совпадающим с оператором L из формулы (2.2) для квадратов собственных функций для оператора Шредингера. Это совпадение не является случайным, и взаимосвязь преобразований Дарбу нулевого и первого порядка, на уровне уравнений Риккати для логарифмических производных собственных функций, заслуживает дополнительного исследования.

Отметим наконец, что преобразования Лапласа также являются обратимыми преобразованиями Дарбу и связанные с этими преобразованиями алгебраические исследования двумерных аналогов вронскианов (см. например, [2]) позволяют надеяться на полезные контакты в этой области с коллегами из Уфы.

[1] в задаче о собственных функциях

4. Благодарности.

Мы выражаем искренюю благодарность В.Э. Адлеру и участникам семинара «Интегрируемые системы» в городе Майкопе за полезные замечания и интерес к нашей работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аллахвердян А.А. *О преобразованиях Дарбу для функций Бесселя* // ВМЖ **21**:3, 5–13, (2019).
2. D.Demskoi, D.Tran *Darboux integrability of determinant and equations for principal minors* // Nonlinearity **29**:7, 36, (2014).
3. Шабат А.Б., Эфендиев М.Х. *О приложениях формулы Фаа-ди- Бруно*// УМЖ **9**:3, 132–137, (2017).
4. C. Verhoeven, M. Musette *Extended soliton solutions for the Kaup–Kupershmidt equation* // J. Phys. A: Math. Gen. **34**: 2515–2523, (2001).
5. M.C. Nucci *Pseudopotentials, Lax equations and Backlund transformations for nonlinear evolution equations* // J. Phys. A: Math. Gen. **21**: 73–79, (1988).
6. Dubrovin B.A., Matveev V.B., Novikov S.P. *Non-linear equations of Korteweg–de Vries type, finite-zone linear operators, and Abelian varieties*// *Russ.Math.Surv.*, **31**(1): 59–146, 1976. (1976).

Алина Альбертовна Аллахвердян
Адыгейский государственный университет,
ул. Первомайская, 208,
385000, г. Майкоп, Россия
E-mail: alinaallakhverdyan@mail.ru

$\boxed{\text{Алексей Борисович Шабат}}$,
Адыгейский государственный университет,
ул. Первомайская, 208,
385000, г. Майкоп, Россия
E-mail: shabatab@mail.ru