ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 1 (2020). С. 83-91.

АЛГЕБРАИЧНОСТЬ РЕШЕТКИ τ-ЗАМКНУТЫХ ТОТАЛЬНО ω-НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В.В. ЩЕРБИНА

Светлой памяти Леонида Александровича Шеметкова

Аннотация. Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. В дальнейшем ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел, а τ — подгрупповой функтор в смысле А.Н. Скибы. Напомним, что *формацией* называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Функции вида $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}$ называются *ω-локальными спутниками* (*формационными ω-функциями*). При помощи таких функций исследуется строение *ω-насыщенных формаций.*

Настоящая статья посвящена изучению свойств решетки всех функторно замкнутых тотально частично насыщенных формаций, связанных с понятием алгебраичности решетки формаций. Доказано, что для любого подгруппового функтора τ решетка $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является алгебраической. Это обобщает результат, полученный ранее В.Г. Сафоновым. В качестве следствия основного результата установлена алгебраичность решетки $l^{\tau}_{p_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально p-насыщенных формаций, а также алгебраичность решетки l^{τ}_{∞} всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций. Аналогичные результаты получены для решеток функторно замкнутых тотально частично насыщенных формаций, соответствующих некоторым подгрупповым функторам τ. Тем самым найдены новые классы алгебраических решеток формаций конечных групп.

Ключевые слова: формация конечных групп, тотально ω-насыщенная формация, решетка формаций, τ-замкнутая формация, алгебраическая решетка.

Mathematics Subject Classifcation: 20D10, 20F17

1. Введение

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. Мы будем придерживаться терминологии, принятой в работах [1]–[4].

Одним из интенсивно развивающихся направлений теории формаций является направление, связанное с изучением внутренней структуры формаций и их классификацией. Универсальными инстументами таких исследований являются методы и конструкции общей теории решеток.

Установленная А.Н. Скибой [5] модулярность решетки всех формаций, а также решетки всех насыщенных формаций дала возможность использовать решеточные методы для решения многих вопросов теории формаций. Основные результаты структурной теории формаций изложены в монографиях [1]–[3], [6]–[9]. Изучению ряда свойств решетки всех

V.V. Shcherbina, Algebraicity of lattice of τ-closed totally ω-saturated formations of finite groups.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ «Конвергенция» 1.1.03.02).

Поступила 12 апреля 2019 г.

тотально насыщенных формаций, а также структурного строения тотально насыщенных формаций с заданными ограничениями на решетку их тотально насыщенных подформаций посвящены работы [10]–[15].

А.Н. Скибой [3] было показано, что при любом целом неотрицательном n решетка всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций, а также решетка всех разрешимых тотально насыщенных формаций являются алгебраическими. А.Н. Скиба и Л.А. Шеметков [16] доказали алгебраичность решетки n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций. Позднее И.П. Шабалиной установлена алгебраичность решетки τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций [17], а М.В. Задорожнюк — алгебраичность решетки всех τ-замкнутых разрешимо ω-насыщенных формаций [18]. Алгебраичность решетки всех τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций доказана Н.Н. Воробьевым и А.А. Царевым [19] (см. также [8, гл. 4, теорема 4.6.12]).

В.Г. Сафоновым показано, что решетка всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций, а также решетка всех тотально ω-насыщенных формаций являются алгебраическими [11, 20]. Изучение ряда свойств решетки тотально частично насыщенных формаций проведено в работах [20]–[23].

В данной работе, используя функторный подход, мы докажем, что решетка $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является алгебраической.

2. Определения и обозначения

В дальнейшем ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел и $\omega' = \mathbb{P}\backslash\omega$. Символами $F_p(G)$ и $O_\pi(G)$ обозначают соответственно наибольшую нормальную p-нильпотентную подгруппу группы G и наибольшую нормальную π-подгруппу группы G, а символом $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G. Символы $\mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{N}_\pi$ и $\mathfrak{S}_\pi$ обозначают класс всех p-групп, π-групп и разрешимых π-групп соответственно.

Следуя [4], символом $G_{\omega d}$ обозначим наибольшую нормальную в G подгруппу K со свойством $\omega \cap \pi(H/N) \neq \varnothing$ для каждого композиционного фактора H/N из K ($G_{\omega d} = 1$, если $\omega \cap \pi(\mathrm{Soc}(G)) = \varnothing$)).

Напомним, что *формацией* называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

Всякую функцию вида $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$формации групп$\}$ называют *ω-локальным спутником* (*формационной ω-функцией*). Следуя [4], сопоставим произвольному ω-локальному спутнику f класс групп

$$\mathrm{LF}_\omega(f) = (G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega(f)$ для некоторого ω-локального спутника f, то формация $\mathfrak{F}$ называется *ω-локальной*, а f — *локальным спутником* этой формации [4]. Если при этом все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то f называется *внутренним*(или *приведенным*) спутником.

Формацию $\mathfrak{F}$ называют *ω-насыщенной*, если ей принадлежит всякая группа G, удовлетворяющая условию $G/L \in \mathfrak{F}$, где $L \subseteq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$.

Пусть A, B — группы, $\varphi :\ A \to B$ — эпиморфизм, Ω и Σ — некоторые системы подгрупп в A и B соответственно. Тогда через Ω^φ обозначается множество $\{H^\varphi \mid H \in \Omega\}$, а через $\Sigma^{\varphi^{-1}}$ — множество $\{H^{\varphi^{-1}} \mid H \in \Sigma\}$ всех полных прообразов в A всех групп из Σ.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольный непустой класс групп и всякой группе $G \in \mathfrak{X}$ сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ — *подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор* в смысле А.Н. Скибы [3] (или, иначе, τ — *подгрупповой функтор на* $\mathfrak{X}$), если для всякого эпиморфизма $\varphi : A \to B$, где A, $B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^\varphi \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \tau(A)$ и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$. Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ — класс всех групп, то символ $\mathfrak{X}$ опускают и говорят просто о подгрупповом функторе. Через $\mathrm{S}(G)$

обозначают совокупность всех подгрупп группы G, а через $\mathrm{S}_n(G)$ — совокупность всех нормальных подгрупп группы G. Подгрупповой функтор τ называется *тривиальным*, если $\tau(G) = \{G\}$, и *единичным*, если $\tau(G) = \mathrm{S}(G)$ для любой группы G. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутым*, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$.

Согласно концепции кратной локальности, предложенной А.Н. Скибой [24] (см. также [4]), любая формация считается *0-кратно ω-локальной*, а при $n \geqslant 1$ формаця $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно ω-локальной*, если $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-локальными формациями. Формацию $\mathfrak{F}$ называют *тотально ω-локальной*, если она n-кратно ω-локальна для всех n. Если при этом формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой, то $\mathfrak{F}$ называют *τ-замкнутой n-кратно ω-локальной* и соответственно *τ-замкнутой тотально ω-локальной*.

Ввиду теоремы 1 работы [4] формация $\mathfrak{F}$ является ω-локальной тогда и только тогда, когда она ω-насыщена. Поэтому n-кратно ω-локальные и тотально ω-локальные формации называют также *n-кратно ω-насыщенными* и, соответственно, *тотально ω-насыщенными*.

Напомним, что *решеткой* называется частично упорядоченное множество L, в котором любые два элемента имеют точную нижнюю грань, обозначаемую $x \wedge y$, и точную верхнюю грань, обозначаемую $x \vee y$ [25, гл. I, п. 4]. Решетка L называется *полной*, если любое ее подмножество X имеет в L точные верхнюю и нижнюю грани. Элемент a решетки L называется *компактным*, если из $a \leqslant \vee(x_i \mid i \in I)$ следует $a \leqslant \vee(x_i \mid i \in J)$ для некоторого конечного подмножества $J \subset I$. Решетка L называется *алгебраической*, если каждый элемент $a \in L$ является объединением компактных элементов решетки L [25, гл. VIII, п. 5].

Непустую систему формаций θ называют *полной решеткой формаций*, если пересечение любой совокупности формаций из θ снова принадлежит θ и во множестве θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{H} \in \theta$. Всякая полная решетка формаций является полной решеткой в обычном смысле. Формации из θ называют *θ-формациями*. Спутник f называется *θ-значным*, если все его значения принадлежат θ. Символом θ^ω обозначается совокупность всех формаций, которые обладают ω-локальным θ-значным спутником.

Символом $l^\tau_{\omega_\infty}$ обозначают совокупность всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций. Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $l^\tau_{\omega_\infty}\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ обозначают пересечение всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. Формацию $l^\tau_{\omega_\infty}\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ называют *τ-замкнутой тотально ω-насыщенной формацией, порожденной совокупностью групп* $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то $l^\tau_{\omega_\infty}\mathrm{form}\,\mathfrak{X} = l^\tau_{\omega_\infty}\mathrm{form}\,G$ называют *однопорожденной τ-замкнутой тотально ω-насыщенной формацией*.

Для любых τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ полагают $\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H} = l^\tau_{\omega_\infty}\mathrm{form}\,(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Относительно операций $\vee^\tau_{\omega_\infty}$ и $\cap$ совокупность всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций $l^\tau_{\omega_\infty}$, частично упорядоченная по включению $\subseteq$, является полной решеткой формаций (см. [8, гл. 1, теорема 1.5.4]). В этой решетке $\vee^\tau_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = l^\tau_{\omega_\infty}\mathrm{form}\,\big(\bigcup\limits_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big)$ и $\bigcap\limits_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ являются соответственно точной верхней и точной нижней гранями для подмножества $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ из $l^\tau_{\omega_\infty}$.

ω-Локальный спутник, все значения которого являются $l^\tau_{\omega_\infty}$-формациями, называется *$l^\tau_{\omega_\infty}$-значным спутником*.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая система $l^\tau_{\omega_\infty}$-значных спутников. Тогда через $\vee^\tau_{\omega_\infty}(f_i \mid i \in I)$ обозначается такой спутник f, что $f(a) = l^\tau_{\omega_\infty}\mathrm{form}\,\big(\bigcup\limits_{i\in I} f_i(a)\big)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, если по крайней мере одна из формаций $f_i(a) \neq \varnothing$. В противном случае полагают $f(a) = \varnothing$.

Для всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ полагают $\mathfrak{X}(F_p) = \mathrm{form}\,(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, если $p \in \pi(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{X}(F_p) = \varnothing$, если $p \notin \pi(\mathfrak{X})$.

Для произвольной τ-замкнутой тотально ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ через $\mathfrak{F}_{\omega_\infty}^{\tau}$ обозначают ее *минимальный ω-локальный $l_{\omega_\infty}^{\tau}$-значный спутник*, т.е. пересечение всех ω-локальных $l_{\omega_\infty}^{\tau}$-значных спутников формации $\mathfrak{F}$.

Для произвольной (тотально) ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ через F обозначают ее *канонический (максимальный внутренний ω-локальный) спутник.* Согласно замечанию 1 работы [4], если $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega(f)$ и f — произвольный внутренний ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$, то справедливо неравенство $f \leqslant F$.

3. Вспомогательные результаты

Для доказательства основного результата нам понадобятся некоторые известные факты теории формаций конечных групп.

Лемма 1 ([22, лемма 3.2]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая τ-замкнутая формация, π — такое множество простых чисел, что $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega \subseteq \pi$. Тогда произведение $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой тотально ω-насыщенной формацией.*

Лемма 2 ([3, гл. 2, лемма 2.1.6]). *Пусть A — монолитическая группа с неабелевым монолитом, $\mathfrak{M}$ — некоторая τ-замкнутая полуформация. И пусть $A \in l_n^{\tau}\mathrm{form}\,\mathfrak{M}$. Тогда $A \in \mathfrak{M}$.*

Лемма 3 ([3, гл. 4, п. 4.4]). *Решетка l_n^{τ} является алгебраической.*

Лемма 4 ([23, лемма 20]). *Пусть f_i — ω-локальный минимальный $l_{\omega_\infty}^{\tau}$-значный спутник τ-замкнутой тотально ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}_i$, где $i \in I$. Тогда $\vee_{\omega_\infty}^{\tau}(f_i \mid i \in I)$ — минимальный $l_{\omega_\infty}^{\tau}$-значный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F} = \vee_{\omega_\infty}^{\tau}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.*

Лемма 5 ([4, лемма 4]). *Если $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega(f)$ и $G/O_p(G) \in \mathfrak{F} \cap f(p)$ для некоторого $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

4. Основной результат

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{H} = l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\,\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big)$, где $\mathfrak{F}_i$ — τ-замкнутая тотально ω-насыщенная формация ($i \in I$), $A \in \mathfrak{H}$ — монолитическая группа. Тогда если $\mathrm{Soc}(A)$ — неабелева группа, то $A \in \bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i$.*

Доказательство. Пусть A — группа из условия леммы, $\pi = \pi\Big(\mathrm{form}\,\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big)\Big) \cap \omega$. Согласно лемме 1, $\mathfrak{S}_\pi\tau\mathrm{form}\,(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i) \in l_{\omega_\infty}^{\tau}$. Поэтому

$$l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\,\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big) \subseteq \mathfrak{S}_\pi\tau\mathrm{form}\,\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big).$$

Значит, $A \in \mathfrak{S}_\pi\tau\mathrm{form}\,\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big)$. Поскольку $\mathrm{Soc}(A)$ — неабелева группа, то $A \in \tau\mathrm{form}\,\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big)$. Тогда ввиду леммы 2 $A \in \bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i$. □

Теорема. *Решетка $l_{\omega_\infty}^{\tau}$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является алгебраической.*

Доказательство. Покажем вначале, что для любой группы A однопорожденная τ-замкнутая тотально ω-насыщенная формация $\mathfrak{F} = l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\,A$ является компактным элементом в решетке $l_{\omega_\infty}^{\tau}$.

Предположим противное. Тогда существуют такая группа A и формации $\mathfrak{F}_i \in l_{\omega_\infty}^{\tau}$, где $i \in I$, что

$$\mathfrak{F} = l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\,A \subseteq \mathfrak{H} = l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\,\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big)$$

и, кроме того,

$$\mathfrak{F} = l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\, A \nsubseteq l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in J}\mathfrak{F}_j\right)$$

для любого конечного подмножества $J \subset I$. Пусть A — группа наименьшего порядка среди групп с таким свойством. Покажем, что группа A монолитична. Допустим, что N_1 и N_2 — две различные минимальные нормальные подгруппы группы A. Пусть $\mathfrak{L} = l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\,(A/N_1)$, $\mathfrak{M} = l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\,(A/N_2)$.

Поскольку $|A/N_1| < |A|$ и $|A/N_2| < |A|$, то ввиду выбора группы A из включений

$$\mathfrak{L} = l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\, A/N_1 \subseteq \mathfrak{H} = l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right),$$

$$\mathfrak{M} = l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\, A/N_2 \subseteq \mathfrak{H} = l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right)$$

следует, что найдутся такие наборы индексов $i_1, \ldots, i_k$ и $j_1, \ldots, j_l$, что

$$\mathfrak{L} \subseteq l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\,(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{F}_{i_k}),$$

$$\mathfrak{M} \subseteq l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\,(\mathfrak{F}_{j_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{F}_{j_l}).$$

Следовательно,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_{\omega_\infty}^{\tau} \mathfrak{M} \subseteq l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\,(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{F}_{i_k} \cup \mathfrak{F}_{j_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{F}_{j_l}).$$

Получили противоречие. Значит, A — монолитическая группа.

Пусть $P = \mathrm{Soc}(A)$. Предположим, что P — неабелева группа. Тогда поскольку $A \in l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right)$, то ввиду леммы 6 $A \in \bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i$. Поэтому существует такое $i_0 \in I$, что $A \in \mathfrak{F}_{i_0}$. Противоречие.

Следовательно, P — абелева p-группа. Пусть $\pi = \pi\Big(\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right)\Big) \cap \omega$.

Предположим, что $p \notin \omega$. Тогда $p \notin \pi$. Ввиду леммы 1 $\mathfrak{S}_\pi \tau\mathrm{form}\,(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i) \in l_{\omega_\infty}^{\tau}$. Значит,

$$\mathfrak{H} = l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right) \subseteq \mathfrak{S}_\pi\tau\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right).$$

Так как

$$A \in \mathfrak{H} = l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right),$$

то

$$A \in \mathfrak{S}_\pi\tau\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right).$$

Поскольку $p \notin \pi$, то

$$A \in \tau\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right).$$

Тогда, согласно лемме 3, найдутся такие индексы $i_1, \ldots, i_m$, что

$$\tau\mathrm{form}\, A \subseteq \tau\mathrm{form}\,(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{F}_{i_m}).$$

Ввиду включения

$$\tau\mathrm{form}\,(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{F}_{i_m}) \subseteq l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\,(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{F}_{i_m}),$$

имеем

$$\tau\mathrm{form}\, A \subseteq l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\,(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{F}_{i_m}).$$

Следовательно,

$$l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\, A \subseteq l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\,(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{F}_{i_m}).$$

Противоречие. Поэтому $p \in \omega$. Поскольку

$$l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\,\big(A/\Phi(A) \cap O_\omega(A)\big) = l_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}\, A,$$

то, в силу выбора группы A, имеем $P \nsubseteq \Phi(A)$. Поэтому $P = C_A(P) = F_p(A) = F(A) = O_p(A)$ и $A = [P]B$, где B — некоторая максимальная подгруппа из A. Пусть f_i, f, h — минимальные $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-значные ω-локальные спутники формаций $\mathfrak{F}_i$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Тогда ввиду леммы 4

$$h = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(f_i \mid i \in I).$$

Поскольку $P = F_p(A)$ и $A \in \mathfrak{H}$, то

$$B \cong A/F_p(A) \in h(p) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(f_i(p) \mid i \in I).$$

Так как $|B| < |A|$, то по выбору группы A существует такой набор индексов $J = \{j_1, \dots, j_n\}$, что

$$B \cong A/F_p(A) \in \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(f_j(p) \mid j \in J).$$

Согласно лемме 4, $l = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(f_j(p) \mid j \in J)$ — минимальный $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-значный спутник формации $\mathfrak{L} = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_j \mid j \in J)$. Следовательно,

$$A/O_p(A) \cong B \in l(p) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(f_j(p) \mid j \in J).$$

Ввиду леммы 5 группа $A \in \mathfrak{L}$. Следовательно,

$$\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\, A \subseteq \mathfrak{L} = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_j \mid j \in J).$$

Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F}$ — компактный элемент в решетке $l^{\tau}_{\omega_\infty}$. Поскольку любая τ-замкнутая тотально ω-насыщенная формация является объединением своих однопорожденных τ-замкнутых тотально ω-насыщенных подформаций в решетке $l^{\tau}_{\omega_\infty}$, то решетка $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ алгебраична. □

Отметим основные следствия доказанной теоремы.

Если τ — тривиальный подгрупповой функтор, то из теоремы получаем

Следствие 1 ([20, В.Г. Сафонов]). *Решетка l^{ω}_{∞} всех тотально ω-насыщенных формаций является алгебраической.*

Если $\omega = \mathbb{P}$, то из теоремы вытекает

Следствие 2 ([11, В.Г. Сафонов]). *Решетка l^{τ}_{∞} всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций является алгебраической.*

При $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора теорема дает

Следствие 3 ([11, В.Г. Сафонов]). *Решетка l_∞ всех тотально насыщенных формаций является алгебраической.*

Если $\omega = \{p\}$, то из теоремы получаем

Следствие 4. *Решетка $l^{\tau}_{p_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально p-насыщенных формаций является алгебраической.*

Из следствия 4 для единичного подгруппового функтора имеем

Следствие 5. *Решетка всех наследственных тотально p-насыщенных формаций является алгебраической.*

В случае, когда $\tau(G) = \mathrm{S}_n(G)$ для любой группы G, из следствия 4 получаем

Следствие 6. *Решетка всех нормально наследственных тотально p-насыщенных формаций является алгебраической.*

5. Общие замечания

Напомним, что *подрешеткой* решетки L называется подмножество $H \subseteq L$, такое, что если $a \in H$, $b \in H$, то $a \wedge b \in H$ и $a \vee b \in H$ [25, гл. I, п. 4]. Подрешетка решетки сама является решеткой с теми же операциями объединения и пересечения. Напомним также, что подрешетка H полной решетки L называется *полной*, если для любого непустого подмножества $X \subseteq H$ имеет место $\sup_L X \in H$ и $\inf_L X \in H$ [26, гл. V, § 1.2]. В этом случае имеют место равенства $\sup_H X = \sup_L X$ и $\inf_H X = \inf_L X$. Несложно показать, что полная подрешетка алгебраической решетки является алгебраической решеткой. Как следует из известного результата Ф.М. Уитмена (см. теорему 2 [27], а также [26, гл. V, § 5.1]), произвольная подрешетка алгебраической решетки может не быть алгебраической решеткой.

Как было отмечено выше, решетка $l^\tau_{\omega_n}$ алгебраична (см. [17]). В то же время решетка $l^\tau_{\omega_\infty}$ не является полной подрешеткой в $l^\tau_{\omega_n}$. Более того, покажем, что для произвольного множества простых чисел ω, такого, что $|\omega| > 1$, а также для любого целого неотрицательного n, решетка $l^\tau_{\omega_\infty}$ не является подрешеткой в $l^\tau_{\omega_n}$.

Достаточно доказать, что решетка разрешимых $l^\tau_{\omega_\infty}$-формаций не является подрешеткой в $l^\tau_{\omega_n}$. Используем метод А.Н. Скибы (см. монографии [3, гл. 4, п. 4.1] и [8, гл. 4, п. 4.5], а также работу [28]).

Индукция по n. Пусть $n = 0$. Рассмотрим формацию $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r \vee \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$, где $p \in \omega$, причем p, r и q — попарно различные простые числа. Поскольку формации $\mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{N}_r$ и $\mathfrak{N}_q$ s-замкнуты и тотально насыщены, то они и τ-замкнуты тотально ω-насыщены. Тогда, согласно лемме 11 [23], формации $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r$ и $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ также τ-замкнуты тотально ω-насыщены. Заметим также, что они разрешимы и, кроме того, $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r \subset \mathfrak{N}^1_\omega\mathfrak{N}_r = \mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N}_r$ и $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q \subset \mathfrak{N}^1_\omega\mathfrak{N}_q = \mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N}_q$.

Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ не является ω-насыщенной. Предположим, что это неверно. Пусть f — минимальный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда $f(p) = \mathfrak{N}_{\{r,q\}}$. Пусть Z_r и Z_q — некоторые группы порядков r и q соответственно. Ввиду следствия 10.7 [2, гл. B] группа $B = Z_r \times Z_q$ обладает над полем $\mathbb{F}_p$ простым точным модулем P. Пусть $G = [P]B$. Тогда ввиду леммы 5 $G \in \mathfrak{F}$. Несложно видеть, что $G \notin \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r \cup \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$. Значит, согласно следствию 1.2.26 [3, гл. 1], в $\mathfrak{F}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами N, M, $N_1, \ldots, N_t$; $M_1, \ldots, M_t$ ($t \geqslant 2$), что выполняются следующие утверждения: 1) $H/N \cong G$, $M/N = \mathrm{Soc}(H/N)$; 2) $N_1 \cap \ldots \cap N_t = 1$; 3) H/N_i — монолитическая $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r \cup \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$-группа с монолитом M_i/N_i, который H-изоморфен M/N. Пусть $H/N_1 \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r$. Поскольку $C_G(P) = P$, то $M = C_H(M/N)$. Значит, $M_1 \subseteq M$. Следовательно, $B = Z_r \times Z_q \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r$. Полученное противоречие показывает, что формация $\mathfrak{F}$ не является ω-насыщенной. Значит, $\mathfrak{F}$ не является тотально ω-насыщенной. Ввиду следствия 1.2.24 [3, гл. 1] имеем

$$\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r \vee^\tau_{\omega_0} \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q = \tau\mathrm{form}\,(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r \cup \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q) =$$
$$\mathrm{form}\,(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r \cup \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_r \vee \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q.$$

Следовательно, решетка разрешимых $l^\tau_{\omega_\infty}$-формаций не является подрешеткой в $l^\tau_{\omega_0}$.

Пусть теперь $n > 1$, и утверждение при $n-1$ верно. Тогда найдутся разрешимые $l^\tau_{\omega_\infty}$-формации $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}^n_\omega\mathfrak{N}_r$ и $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{N}^n_\omega\mathfrak{N}_q$, такие, что $\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_{n-1}} \mathfrak{H} \notin l^\tau_{\omega_\infty}$. Пусть $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{N}_\omega\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{N}_\omega\mathfrak{H}$. Ввиду леммы 4.5.2 [8, гл. 4] формации $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{H}_1$ имеют такие внутренние $l^\tau_{\omega_\infty}$-значные ω-локальные спутники m и h соответственно, что для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ имеет место $m(a) = \mathfrak{M}$, $h(a) = \mathfrak{H}$. Значит, обе формации принадлежат решетке $l^\tau_{\omega_\infty}$. Заметим, что формации $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{H}_1$ разрешимы. Кроме того, учитывая, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}^n_\omega\mathfrak{N}_r$ и $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{N}^n_\omega\mathfrak{N}_q$, имеем

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{N}_\omega\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}_\omega(\mathfrak{N}^n_\omega\mathfrak{N}_r) = (\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N}^n_\omega)\mathfrak{N}_r = \mathfrak{N}^{n+1}_\omega\mathfrak{N}_r$$

и

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{N}_\omega\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}_\omega(\mathfrak{N}_\omega^n\mathfrak{N}_q) = (\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N}_\omega^n)\mathfrak{N}_q = \mathfrak{N}_\omega^{n+1}\mathfrak{N}_q.$$

Предположим, что $\mathfrak{M}_1 \vee_{\omega_n}^\tau \mathfrak{H}_1 \in l_{\omega_\infty}^\tau$. Тогда, поскольку, согласно лемме 4.5.4 [8, гл. 4],

$$\mathfrak{M}_1 \vee_{\omega_n}^\tau \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{N}_\omega\mathfrak{M} \vee_{\omega_n}^\tau \mathfrak{N}_\omega\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\omega(\mathfrak{M} \vee_{\omega_{n-1}}^\tau \mathfrak{H})$$

и

$$\mathfrak{M}_1 \vee_{\omega_n}^\tau \mathfrak{H}_1 = l_{\omega_n}^\tau \mathrm{form}\,(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{H}_1) =$$
$$l_{\omega_\infty}^\tau \mathrm{form}\,(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{H}_1) = \mathfrak{M}_1 \vee_{\omega_\infty}^\tau \mathfrak{H}_1,$$

то по лемме 4.5.5 [8, с. 209] формация $\mathfrak{M} \vee_{\omega_{n-1}}^\tau \mathfrak{H}$ тотально ω-насыщена. Следовательно, $\mathfrak{M} \vee_{\omega_{n-1}}^\tau \mathfrak{H} \in l_{\omega_\infty}^\tau$, что противоречит выбору формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$. Значит, решетка разрешимых (следовательно, и всех) $l_{\omega_\infty}^\tau$-формаций не является подрешеткой в $l_{\omega_n}^\tau$.

Таким образом, алгебраичность (как и другое общее свойство) решетки $l_{\omega_\infty}^\tau$ не является, вообще говоря, следствием алгебраичности (или соответствующего свойства) решетки $l_{\omega_n}^\tau$ (см. также пп. 4.2 и 4.4 гл. 4 монографии А.Н. Скибы [3]). В этой связи заметим, что приведенное выше доказательство алгебраичности решетки $l_{\omega_\infty}^\tau$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций существенно опирается на свойства самой решетки $l_{\omega_\infty}^\tau$, установленные ранее в работе В.Г. Сафонова и И.Н. Сафоновой [22], а также в работе автора и В.Г. Сафонова [23], и как не использует результаты работы И.П. Шабалиной [17], так и не является следствием из них.

Отметим, наконец, что подобные замечания справедливы и для теории разрешимо ω-насыщенных формаций. Рассуждая аналогично, можно показать, что при тех же предположениях для множества простых чисел ω и целого числа n ($|\omega| > 1$, $n \geqslant 0$), решетка $c_{\omega_\infty}^\tau$ всех τ-замкнутых тотально разрешимо ω-насыщенных формаций не является подрешеткой решетки $c_{\omega_n}^\tau$ всех τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций.

В заключение отметим, что А.А. Царевым в недавно опубликованной работе [29] установлена алгебраичность решетки c_∞ всех тотально композиционных формаций. Алгебраичность решетки c_n всех n-кратно композиционных формаций следует из алгебраичности решетки $c_{\omega_n}^\tau$ (для тривиального подгруппового функтора τ и $\omega = \mathbb{P}$), которая, в свою очередь, была получена ранее в совместной работе Н.Н. Воробьева и А.А. Царева [19] (см. также [8, гл. 4, теорема 4.6.12]).

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания, способствовавшие улучшению качества статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. *Формации алгебраических систем*, М.: Наука. 1989. 253 с.
2. K. Doerk, T. Hawkes *Finite soluble groups*, Berlin–New York: Walter de Gruyter. 1992. 889 p.
3. Скиба А.Н. *Алгебра формаций*, Минск: Беларуская навука, 1997. 240 с.
4. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. *Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп* // Матем. труды. Т. 2, № 2. 1999. С. 114–147.
5. Скиба А.Н. *О локальных формациях длины 5* // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп: труды Гомельского семинара. Минск: Наука и техника. 1986. С. 135–149.
6. W. Guo *The Theory of Classes of Groups*, Beijing–New York–Dordrecht–Boston–London: Science Press, Kluwer Academic Publishers. 2000. 261 p.
7. A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro *Classes of Finite Groups*, Dordrecht: Springer. 2006. 385 p.
8. Воробьев Н.Н. *Алгебра классов конечных групп*, Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2012. 322 с.
9. W. Guo *Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups*, Berlin, Heidelberg: Springer. 2015. 359 p.
10. Сафонов В.Г. *О модулярности решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций конечных групп* // Украинск. матем. журн. Т. 58, № 6. 2006. С. 852–858.

11. Сафонов В.Г. *Об алгебраичности решетки всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций* // Алгебра и логика. Т. 45, № 5. 2006. С. 620–626.
12. Сафонов В.Г. *Характеризация разрешимых однопорожденных тотально насыщенных формаций конечных групп* // Сибирск. матем. журн. Т. 48, № 1. 2007. С. 185–191.
13. V.G. Safonov, *On a question of the theory of totally saturated formations of finite groups* // Algebra Colloq. Vol. 15, No. 1. 2008. P. 119–128.
14. Сафонов В.Г., Шеметков Л.А. *О подрешетках решетки тотально насыщенных формаций конечных групп* // Докл. НАН Беларуси. Т. 52, № 4. 2008. С. 34–37.
15. Сафонов В.Г. *$\mathfrak{G}$-отделимость решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций* // Алгебра и логика. Т. 49, № 5. 2010. С. 692–704.
16. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. *Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп* // Украинск. матем. журн. Т. 52, № 6. 2000. С. 783–797.
17. Шабалина И.П. *Алгебраичность решетки τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций* // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры-18. Т. 14, № 5. 2002. С. 59–67.
18. Задорожнюк М.В. *Об элементах высоты 3 решетки τ-значных ω-композиционных формаций* // Вестник Гродненского гос. ун-та им. Я. Купалы. Сер. 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. № 2. 2008. С. 16–21.
19. Воробьев Н.Н., Царев А.А. *О модулярности решетки τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций* // Украинск. матем. журн. Т. 62, № 4. 2010. С. 453–463.
20. Сафонов В.Г., *О тотально ω-насыщенных формациях конечных групп. Препринт № 7*, Гомель: Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. 2004. 18 с.
21. Сафонов В.Г., Сафонова И.Н. *О минимальных тотально ω-насыщенных ненильпотентных формациях конечных групп* // Вестник Витебского гос. ун-та Т. 84, № 6. 2014. С. 9–15.
22. Сафонов В.Г., Сафонова И.Н. *Отделимость решетки τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций конечных групп* // Проблемы физики, математики и техники. Т. 33, № 4. 2017. С. 76–83.
23. Щербина В.В., Сафонов В.Г., *О подрешетках решетки частично тотально насыщенных формаций конечных групп* // Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. Математика. Физика. Т. 51, № 1. 2019. С. 64–87.
24. Скиба А.Н., *Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины* // Вопросы алгебры. Вып. 3. 1987. С. 21–31.
25. Биркгоф Г. *Теория решеток.* Пер. с англ., М.: Наука, 1984. 568 с.
26. Артамонов В.А., Салий В.Н.,. Скорняков Л.А. и др., *Общая алгебра.* Т. 2. Под общ. ред. Л.А. Скорнякова, М.: Наука, 1991. 480 с.
27. Ph.M. Whitman, *Lattices, equivalence relations, and subgroups* // Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 52, No. 6. 1946. P. 507–522.
28. L.A. Shemetkov, A.N. Skiba, N.N. Vorob'ev, *On lattices of formations of finite groups* // Algebra Colloq. Vol. 17, No. 4. 2010. P. 557–564.
29. A.A. Tsarev, *On the lattice of all totally composition formations of finite groups* // Ricerche di Mat. 2019. https://doi.org/10.1007/s11587-019-00433-3

Владимир Владимирович Щербина,
Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Республика Беларусь
E-mail: `shcherbinavv@tut.by`