ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 1 (2020). С. 13-29.

О РАЗРЕШИМОСТИ И ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ВО ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ, СВЯЗАННОЙ С НЕКОЭРЦИТИВНОЙ ФОРМОЙ

С.А. ИСХОКОВ, Б.А. РАХМОНОВ

Аннотация. Исследуется разрешимость вариационной задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических операторов высшего порядка во всем n-мерном евклидовом пространстве, коэффициенты которых имеют степенное вырождение на бесконечности. Постановка исследуемой задачи связана с интегро-дифференциальной полуторалинейной формой, которая может не удовлетворять условию коэрцитивности. Ранее вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов, связанных с некоэрцитивными формами, исследовалась, в основном, в случае ограниченной области, и применялся метод, основанный на конечном разбиении единицы области. В отличие от этого, в настоящей работе применяется специальное бесконечное разбиение единицы всего евклидова пространства конечной кратности.

Применяемый метод основан на элементах теории пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных со степенным весом. Граничные условия в исследуемой задачи считаются однородными в том смысле, что решение исследуемой задачи ищется в функциональном пространстве, в котором плотно множество бесконечно дифференцируемых финитных функций.

Рассматриваемый дифференциальный оператор зависит от комплексного параметра λ, и существование и единственность решения вариационной задачи Дирихле доказывается в случае, когда λ принадлежит некоторому угловому сектору с вершиной в нуле, содержащим отрицательную часть действительной оси. При дополнительных условиях на гладкость коэффициентов и правой части уравнения изучаются дифференциальные свойства решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: вариационная задача Дирихле, эллиптический оператор, степенное вырождение, некоэрцитивная форма, гладкость решения.

Mathematics Subject Classification: 35J35, 35D30, 35J40, 35J70, 46E35

1. Введение

Разрешимость вариационной задачи Дирихле для различных классов вырождающихся эллиптических операторов хорошо изучена в случае, когда полуторалинейные формы, связанные с исследуемыми операторами, удовлетворяют условию коэрцитивности (см. [1]–[8] и имеющуюся в них библиографию). Случай эллиптических операторов, ассоциированных с некоэрцитивными полуторалинейными формами, является технически сложным и сравнительно мало изучен. Этот случай впервые был рассмотрен К.Х. Бойматовым в

S.A. Iskhokov, B.A. Rakhmonov, Solvability and smoothness of solution to variational Dirichlet problem in entire space associated with a non-coercive form.

Поступила 2 сентября 2019 г.

работе [9] и позже в работах [10]–[18]. В этих работах (за исключением [13], [18]) исследовались операторы, заданные в ограниченной области, а операторы, рассмотренные в работах [13], [18], заданы в неограниченных областях, которые очень близки к ограниченным (предельно-цилиндрическая область с нулевым диаметром на бесконечности и некоторые ее обобщения).

В отличие от вышеперечисленных работ, здесь впервые рассматривается случай вырождающихся эллиптических операторов, заданных во всем n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и ассоциированных с некоэрцитивными полуторалинейными формами. Изучается разрешимость вариационной задачи Дирихле с параметром. Подобные внешние задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов в случае коэрцитивности соответствующих форм ранее изучались в работах [2], [3]. Применяемый нами метод основан на использовании элементов теории весовых функциональных пространств. Поэтому во втором разделе приведены необходимые определения функциональных пространств со степенными весами и сформулированы их основные свойства. В третьем разделе доказывается однозначная разрешимость однородной вариационной задачи Дирихле. Здесь однородность граничных условий понимается в том смысле, что решение исследуемой задачи ищется в функциональном пространстве, в котором плотно множество бесконечно дифференцируемых финитных функций. В четвертом разделе сформулирован результат о гладкости решения исследуемой задачи.

Разработанная в нашей работе техника позволяет в дальнейшим исследовать подобные вопросы для других видов неограниченных областей (внешность ограниченной области, полупространство, бесконечная цилиндрическая область и т.д.).

2. Функциональные пространства

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ – длина мультииндекса k. Обозначим через $u^{(k)}(x)$ обобщенную в смысле С.Л. Соболева производную функции $u(x)$ мультииндекса k. Пусть $d(x) = (1+|x|^2)^{-1/2}$, r – натуральное, α, δ, p – вещественные числа и $1 \leqslant p < \infty$. Символом $W^r_{p,\alpha,\delta}(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, имеющих все обобщенные в смысле С.Л. Соболева производные порядка r с конечной нормой

$$\left\|u;\, W^r_{p,\,\alpha,\,\delta}(\mathbb{R}^n)\right\| = \left\{\left\|u;\, L^r_{p,\,\alpha}(\mathbb{R}^n)\right\|^p + \|u;\, L_{p,\,\delta}(\mathbb{R}^n)\|^p\right\}^{1/p},$$

где

$$\left\|u;\, L^r_{p,\,\alpha}(\mathbb{R}^n)\right\| = \left\{\sum_{|k|=r}\int d^{p\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx\right\}^{1/p},$$

$$\|u;\, L_{p,\,\delta}(\mathbb{R}^n)\| = \left\{\int d^{p\delta}(x)|u(x)|^p dx\right\}^{1/p}.$$

Здесь и далее в этой работе в интегралах по всему пространству $\mathbb{R}^n$ мы опускаем символ $\mathbb{R}^n$. Наряду с пространством $W^r_{p,\alpha,\delta}(\mathbb{R}^n)$ определим также пространства $W^r_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $V^r_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ соответственно с нормами

$$\left\|u;\, W^r_{p,\,\alpha}(\mathbb{R}^n)\right\| = \left\{\left\|u;\, L^r_{p,\,\alpha}(\mathbb{R}^n)\right\|^p + \int_{K_R}|u(x)|^p dx\right\}^{1/p},$$

$$\left\|u;\, V^r_{p,\,\alpha}(\mathbb{R}^n)\right\| = \left\{\sum_{|k|\leqslant r}\int d^{p(\alpha+r-|k|)}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx\right\}^{1/p}. \tag{2.1}$$

Здесь K_R – шар радиуса $R > 0$ с центром в начале координат.

Символом $V^{-r}_{q,-\alpha}(\mathbb{R}^n)$, где $q = p/(p-1)$, обозначим пространство антилинейных непрерывных функционалов F над пространством $V^r_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, наделенное нормой сопряженного пространства.

Если B – какое-либо из пространств $W^r_{p,\alpha,\delta}(\mathbb{R}^n)$, $W^r_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, то символом $\overset{\circ}{B}$ мы будем обозначать замыкание $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в норме этого пространства.

Сформулируем основные свойства пространства $V^r_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, которые следуют из соответствующих результатов работ [4, 19, 20].

Теорема 2.1. *При всех $r \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, $p \in (1, +\infty)$ справедливы следующие утверждения:*

1) множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в пространстве $V^r_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)$;

2) норма (2.1) пространства $V^r_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ эквивалентна следующей величине

$$\|u; V^r_{p;\,\alpha}(\mathbb{R}^n)\|_* = \left\{ \sum_{|k|=r} \int d^{p\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx + \int d^{p(\alpha+r)}(x)|u(x)|^p dx \right\}^{1/p}; \qquad (2.2)$$

3) для любого натурального числа m имеют место вложения

$$V^{r+m}_{p;\,\alpha-m}(\mathbb{R}^n) \to V^r_{p;\,\alpha}(\mathbb{R}^n), \quad V^{-r+m}_{q,-\alpha-m}(\mathbb{R}^n) \to V^{-r}_{q,-\alpha}(\mathbb{R}^n).$$

4) Пусть $n/p - \alpha \notin \{1,\, 2,\, \ldots, r\}$. Тогда справедливо равенство

$$\overset{\circ}{W}{}^r_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n) = V^r_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n).$$

Пространство $W^r_{p,\,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ введено Л.Д. Кудрявцевым и хорошо изучено в работах [21], [22] (см. также [3]).

В следующем пункте при оценке некоторых вспомогательных форм нам понадобится лемма 2.2 из [6]. Ниже приведем в удобной для нас форме утверждение этой леммы применительно к пространствам дифференцируемых функций многих вещественных переменных во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ со степенным весом.

Лемма 2.1. *Пусть целое число $m \in [0, r)$, $p \geq 1$, $1 \leqslant q_1 \leqslant q_0$, а число q_0 удовлетворяет условиям*

$$\begin{cases} \frac{1}{p} - \frac{r-m}{n} < \frac{1}{q_0}, & \text{при} \quad n-(r-m)p > 0; \\ q_0 - \text{любое конечное число}, & \text{при} \quad n-(r-m)p \leqslant 0. \end{cases}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и всех $v \in V^r_{p,\,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство

$$\left\| v;\, L^m_{q_0,\,\alpha-\frac{n}{p}+\frac{n}{q_0}+r-m}(\mathbb{R}^n) \right\| \leqslant \varepsilon \left\| v;\, V^r_{p,\,\alpha}(\mathbb{R}^n) \right\|_* + c_0\varepsilon^{-\mu} \left\| v;\, L_{q_1,\,\alpha-\frac{n}{p}+\frac{n}{q_1}+r}(\mathbb{R}^n) \right\|,$$

где

$$\mu = \frac{q_1^{-1} - q_0^{-1} + mn^{-1}}{q_0^{-1} - p^{-1} + (r-m)n^{-1}}.$$

3. Разрешимость однородной вариационной задачи Дирихле

Далее в этом разделе предположим, что r – натуральное, α, δ – вещественные числа, удовлетворяющие условию $\delta \leqslant \alpha + r$, и для удобства записи символом $\overset{\circ}{H}_+$ обозначим замыкание класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в норме пространства $H_+ = W^r_{2,\alpha,\delta}(\mathbb{R}^n)$, а символом $\overset{\circ}{H}_-$ – пополнение пространства $H_0 = L_{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|f\|_- = \sup_{0 \neq u \in \overset{\circ}{H}_+} \frac{|(f,\, u)_\delta|}{\|u\|_+}.$$

Здесь и далее $\|\cdot\|_+$ – норма в пространстве H_+, и

$$(f,\, u)_\delta = \int d^{2\delta}(x) f(x)\overline{u(x)}dx \; -$$

скалярное произведение в H_0. Норму в пространстве H_0 обозначим через $\|\cdot\|_\delta$. Элементы пространства $\overset{\circ}{H}_-$ отождествляются с соответствующими антилинейными непрерывными функционалами над $\overset{\circ}{H}_+$. Действие функционала $F \in \overset{\circ}{H}_-$ на функцию $u \in \overset{\circ}{H}_+$ будем обозначать через $< F,\, u >$. Таким образом, мы получили тройку плотно вложенных пространств $\overset{\circ}{H}_+ \to H_0 \to \overset{\circ}{H}_-$. Эту тройку называют (см. [23, гл.1]) оснащенным гильбертовым пространством, $\overset{\circ}{H}_+$ – позитивным, а $\overset{\circ}{H}_-$ – негативным пространствами.

Отметим, что $\|u; V^r_{p;\,\alpha}(\mathbb{R}^n)\|_* \leqslant \|u; W^r_{p;\,\alpha,\,\delta}(\mathbb{R}^n)\|$ при $\delta \leqslant r+\alpha$ и в силу эквивалентности норм (2.1) и (2.2) при $\delta \leqslant \alpha + r$ имеют места неравенства

$$\int d^{2\alpha+2r-2|k|}(x)\left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx \leqslant M_1\|u\|_+ \tag{3.1}$$

для всех $u \in \overset{\circ}{H}_+$ и $|k| \leqslant r$; число $M_1 > 0$ не зависит от u.

В дальнейшем через $M_2,\, M_3,\, \ldots$ обозначаются различные положительные постоянные, точные значения которых не существенны.

На функциях $u,\, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим полуторалинейную форму

$$B[u,v] = \sum_{|k|,|l|\leqslant r} \left(d^{-|k|}a_{kl}u^{(k)},\, d^{-|l|}v^{(l)}\right)_{\alpha+r}, \tag{3.2}$$

коэффициенты $a_{kl}(x)$ которой являются ограниченными комплекснозначными измеримыми функциями. Далее исследуется разрешимость следующей вариационной задачи Дирихле, связанной с формой (3.2).

Задача D_λ. Для заданного функционала $F \in \overset{\circ}{H}_-$ требуется найти решение $u(x) \in \overset{\circ}{H}_+$ уравнения

$$B_\lambda[u,\, v] \overset{\text{def}}{=} B[u,\, v] + \lambda\,(u,\, v)_\delta =< F,\, v > \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{3.3}$$

Отметим, что любое решение уравнения (3.3) называется обобщенным решением дифференциального уравнения

$$\sum_{|k|,|l|\leqslant r} (-1)^{|l|}\left(d^{2r+2\alpha-|k|-|l|}(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\right)^{(l)} + \lambda d^{2\delta}(x)u(x) = F, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Наряду с формой (3.2) вводим следующую функцию

$$A(x,\, \zeta) = \sum_{|k|,|l|\leqslant r} a_{kl}(x)\zeta_k\overline{\zeta_l},$$

определенную для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\leqslant r}$.

Предположим, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$, и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\leqslant r}$ выполнены условия

$$|\arg A(x,\, \zeta)| < \varphi, \tag{3.4}$$

$$\sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \leqslant M_2 \mathrm{Re}\,\{\gamma(x)A(x,\, \zeta)\}, \tag{3.5}$$

где φ – некоторое число из интервала $(\pi/2,\, \pi)$, $\gamma(x)$ – всюду непрерывная, отличная от нуля комплекснозначная функция со следующим свойством: для любого числа $\nu > 0$ существует число $R_\nu > 0$ такое, что

$$|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu \tag{3.6}$$

для всех $x,\, y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x| > R_\nu$, $|y| > R_\nu$.

Здесь и далее считается, что функция $\arg z$ принимает значения из $(-\pi,\, \pi]$.

Отметим, что исследование разрешимости вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной формой, приведенное в работах [9]–[17] в случае ограниченной области, основано на конечном разбиении единицы рассматриваемой области. В отличие от этого, здесь мы применяем бесконечное разбиение единицы пространства $\mathbb{R}^n$, построенное в следующей лемме.

Лемма 3.1. *Пусть функция $\gamma(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяет условию (3.6) и пусть ν – достаточно малое положительное число. Тогда существуют неотрицательные функции $\varphi_m(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\eta_m(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $m = 1, 2, \ldots$, такие, что:*

а) система функций $\{\varphi_m^2(x)\}_{m=1}^\infty$ образует разбиение единицы пространства $\mathbb{R}^n$ с конечной кратностью, то есть

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m^2(x) \equiv 1, \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.7}$$

и если $\chi_m(x)$ – характеристическая функция множества $\operatorname{supp} \varphi_m$, то существует конечное число Λ_n, зависящее только от n, такое, что

$$1 \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \chi_m(x) \leqslant \Lambda_n \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^n;$$

б) функция $\eta_m(x)$ обращается в единицу в некоторой окрестности множества $\operatorname{supp} \varphi_m(x)$ и $0 \leqslant \eta_m(x) \leqslant 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$;

в) производные функции $\varphi_m(x)$, $\eta_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют следующим неравенствам

$$\left|\varphi_m^{(k)}(x)\right| \leqslant C_1 \, d^{|k|}(x), \quad \left|\eta_m^{(k)}(x)\right| \leqslant C_2 \, d^{|k|}(x), \ |k| \leqslant r, \tag{3.8}$$

где положительные числа C_1, C_2 не зависят от m и r;

г) $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu$ для всех x, $y \in \operatorname{supp} \eta_m$, $m = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Действуя так же, как в доказательстве леммы 7.1 работы [24], строится разбиение единицы

$$\sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(x) \equiv 1 \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

кратности $\Lambda_n \leqslant (10)^{9n}$, где неотрицательные функции ψ_1, ψ_2, $\ldots$, из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют неравенствам

$$\left|\psi_m^{(k)}(x)\right| \leqslant C_1' \, d^{|k|}(x), \quad (x \in \mathbb{R}^n, \ m = 1, 2, \ldots),$$
$$|x - y| d(x) \leqslant 1 \quad (x, \, y \in \operatorname{supp} \psi_m, \ m = 1, 2, \ldots).$$

Положим

$$\varphi_m(x) = \psi_m(x) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2(x) \right)^{-1/2}, \ \eta_m(x) = \sum{}' \varphi_j(x) \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_i(x) \right)^{-1} \quad m = 1, 2, \ldots.$$

где $\sum'$ обозначает суммирование только по тем индексам j, для которых $\varphi_m(x)\varphi_j(x) \not\equiv 0$. Эти функции обладают свойствами а) – в). Так как отличная от нуля комплекснозначная функция $\gamma(x)$ всюду непрерывна и для любого числа $\nu > 0$ существует число $R_\nu > 0$ такое, что (см. (3.6)) $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu$ для всех x, $y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x| > R_\nu$, $|y| > R_\nu$, то утверждение п. г может не выполняться для конечного числа индексов m. В этом случае, для тех индексов m, для которых не выполняется утверждение п. г, представляя функции $\varphi_m(x)$, $\eta_m(x)$ в виде суммы конечного числа подобных функций, можно добиться того, что утверждение п. г будет выполняться при всех $m = 1, 2, \ldots$.

□

Ниже мы неоднократно будем использовать лемму 2.2 из [25]. Сформулируем эту лемму в удобной для нас форме.

Лемма 3.2. *Пусть Λ_n, χ_m, $m = 1, 2, \ldots,$ – такие же объекты, как в лемме 3.1. Пусть оператор T имеет вид*

$$T = \sum_{m=1}^{+\infty} \chi_m T_m \chi_m,$$

где $T_1, T_2, \ldots$ – последовательность непрерывных операторов в $L_p(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\Lambda = \sup_{m=1,2,\ldots} \|T_m\|_p < +\infty,$$

где число $p \in (1, +\infty)$. Тогда T – ограниченный оператор и выполняется неравенство $\|T\|_p \leqslant \Lambda_n^{1/p}\Lambda$.

Здесь $\|T\|_p$ обозначает норму непрерывного оператора $T : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$.

Теперь сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 3.1. *Пусть $\delta \leqslant \alpha + r$ и выполнены условия (3.4)–(3.6). Тогда существует сектор $S \subset \{z \in C : |arg\, z| < \pi - \varphi\} \cup \{0\}$ с вершиной в нуле и положительное число σ_0 такие, что если $\lambda \in S$ и $|\lambda| \geq \sigma_0$, то для любого заданного функционала $F \in \mathring{H}_-$ задача D_λ имеет единственное решение, и при этом справедлива оценка*

$$\|u\|_+ \leqslant M_3 \|F\|_- , \tag{3.9}$$

где число $M_3 > 0$ не зависит от $\lambda \in S$ и функционала F.

Доказательство. Пусть $\varphi_m(x)$, $\eta_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$ – такие же функции, как в лемме 3.1. В каждом множестве $\operatorname{supp}\varphi_m$, $m = 1, 2, \ldots$, фиксируем точку x_m и рассмотрим форму

$$B^{(0)}_{\lambda;m}[u,v] = \sum_{|k|,|l|\leqslant r} \left(d^{-|k|} a^{(0)}_{klm} u^{(k)},\, d^{-|l|} v^{(l)} \right)_{\alpha+r} + \lambda\, (u,\, v)_\delta\, ,$$

где

$$a^{(0)}_{klm}(x) = (1 - \eta_m(x))\gamma(x_m)a_{kl}(x_m) + \eta_m(x)\gamma(x)a_{kl}(x).$$

Из ограниченности коэффициентов $a_{kl}(x)$, $|k|, |l| \leqslant r$, следует ограниченность коэффициентов $a^{(0)}_{klm}(x)$. Поэтому, применяя неравенство Коши-Буняковского и (3.1), имеем

$$\left| B^{(0)}_{\lambda;m}[u,v] \right| \leqslant M_4 \int \sum_{|k|,|l|\leqslant r} d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x) \left| u^{(k)}(x) \right| \left| v^{(l)}(x) \right| dx +$$

$$+ |\lambda| \int d^{2\delta} |u(x)||v(x)| dx \leqslant M_1(M_4 + |\lambda|)\|u\|_+ \cdot \|v\|_+ \tag{3.10}$$

для всех $u, v \in \mathring{H}_+$.

Из условия (3.5) следует, что

$$\operatorname{Re}\left\{ \sum_{|k|,|l|\leqslant r} a^{(0)}_{klm}(x)\zeta_i\overline{\zeta_j} \right\} \geq c \sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2$$

для всех $m = 1, 2, 3, \ldots$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\leqslant r} \subset C$. Подставляя в этом неравенстве $\zeta_k = d^{\alpha+r-|k|}(x)u^{(k)}(x)$, после интегрирования по $\mathbb{R}^n$, получим

$$\operatorname{Re}\, B^{(0)}_{\lambda;m}[u,u] \geq C_0 \|u\|^2_+ \quad (\operatorname{Re}\lambda \geq 1) \tag{3.11}$$

для всех $m = 1, 2, 3, \ldots, \quad u \in \mathring{H}_+$.

Теперь рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;m}[u,v] = \sum_{|k|,|l|\leqslant r} \left(d^{-|k|}\widehat{a}_{klm}u^{(k)},\, d^{-|l|}v^{(l)}\right)_{\alpha+r} + \lambda\,(u,\,v)_\delta\,,$$

где

$$\widehat{a}_{klm}(x) = [(1-\eta_m(x))a_{kl}(x_m) + \eta_m(x)a_{kl}(x)]\gamma(x_m).$$

Так как $a^{(0)}_{klm}(x) - \widehat{a}_{klm}(x) = \eta_m(x)(\gamma(x)-\gamma(x_m))a_{kl}(x)$, и коэффициенты $a_{kl}(x)$ ограничены, то, действуя так же, как в доказательстве неравенства (3.10), получим

$$|B^{(0)}_{\lambda;m}[u,v] - \mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;m}[u,v]| \leqslant M_5\,\Lambda\,\|u\|_+\cdot\|v\|_+$$

для всех $u, v \in \mathring{H}_+$. Здесь $\Lambda = \sup|\eta_m(x)(\gamma(x)-\gamma(x_m))|$, где супремум берется по всем $x \in R_n$ и всем $m = 1,\,2,\,3,\,\ldots$.

Применяя это неравенство, из (3.11) находим

$$C_0\|u\|^2_+ \leqslant \operatorname{Re}\left(B^{(0)}_{\lambda;m}[u,u] - \mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;m}[u,u]\right) + \operatorname{Re}\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;m}[u,u] \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{Re}\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;m}[u,u] + M_5\,\Lambda\,\|u\|^2_+, \quad u \in \mathring{H}_+. \quad (3.12)$$

Так как

$$|\eta_m(x)(\gamma(x)-\gamma(x_m))| < \nu, \quad x \in \operatorname{supp}\eta_m, \quad m = 1,\,2,\,\ldots,$$

и ν – достаточно малое положительное число, то из (3.12) следует, что

$$c_0\|u\|^2_+ \leqslant \operatorname{Re}\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;m}[u,u], \quad \operatorname{Re}\lambda \geq 1, u \in \mathring{H}_+. \quad (3.13)$$

Вводим следующую полуторалинейную форму

$$\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v] = \sum_{|k|,|l|\leqslant r} \left(d^{-|k|}a_{klm}u^{(k)},\, d^{-|l|}v^{(l)}\right)_{\alpha+r} + \lambda\,(u,\,v)_\delta\,, \quad (3.14)$$

где

$$a_{klm}(x) = (1-\eta_m(x))a_{kl}(x_m) + \eta_m(x)a_{kl}(x).$$

Заметим, что $\gamma(x_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v] = \mathcal{B}^{(0)}_{\lambda_m;m}[u,v]$, где $\lambda_m = \lambda\gamma(x_m)$. Поэтому из неравенства (3.13) следует, что при $\operatorname{Re}\gamma(x_m)\lambda \geq 1$

$$c_0\|u\|^2_+ \leqslant \operatorname{Re}\{\gamma(x_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u]\}\,, \quad u \in \mathring{H}_+. \quad (3.15)$$

В силу (3.4) неравенство (3.5) будет выполняться также и в том случае, если $\gamma(x)$ заменить на $\exp(i\theta(x))$, где

$$\theta(x) = \min\{\varphi - \pi/2,\, |\arg\gamma(x)|\}\,(\operatorname{sign}\arg\gamma(x)).$$

Далее через S обозначим замкнутый угловой сектор на комплексной плоскости с вершиной в нуле такой, что $|\theta(x) + \arg z| < \pi/2$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in S$. Заметим, что $S \subset \{z \in C:\, |\arg z| < \pi - \varphi < \pi/2\} \cup \{0\}$.

Таким образом, из неравенства (3.15) следует, что

$$c_0\|u\|^2_+ \leqslant \operatorname{Re}\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u]\} \quad (\lambda \in S,\, |\lambda| \geq \sigma_0) \quad (3.16)$$

для всех $u \in \mathring{H}_+$. Здесь и далее σ_0 – некоторое положительное число и $\theta_m = \theta(x_m)$, $m = 1,\,2,\,\ldots$.

Поступая так же, как в доказательстве неравенства (3.10), находим

$$|\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v]| \leqslant M_6(M_4 + |\lambda|)\|u\|_+\cdot\|v\|_+, \quad u,\,v \in \mathring{H}_+. \quad (3.17)$$

Неравенства (3.16), (3.17) позволяют нам применить обобщенную теорему Лакса-Мильграма (см. [1, теорема 2.0.1]), согласно которой существует оператор

$$\mathcal{R}_m(\lambda) : \mathring{H}_- \to \mathring{H}_+$$

такой, что

$$\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[\mathcal{R}_m(\lambda)F, v] = \langle F, v\rangle \tag{3.18}$$

для всех $F \in \mathring{H}_-$ и всех $v \in \mathring{H}_+$;

$$\|\mathcal{R}_m(\lambda)F\|_+ \leqslant M_7 \, \|F\|_- \tag{3.19}$$

для всех $F \in \mathring{H}_-$. Здесь число M_7 не зависит от F и от $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq \sigma_0$.

Далее, обозначим оператор умножения на функцию φ_m снова этим же символом и введем оператор

$$\mathcal{R}(\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(i\theta_m)\varphi_m \mathcal{R}_m(\lambda)\varphi_m, \tag{3.20}$$

который действует из $\mathring{H}_-$ в $\mathring{H}_+$.

Используя неравенство (3.11) и ограниченность коэффициентов a_{kl}, $|k|$, $|l| \leqslant r$, легко доказывается, что оператор $\mathbb{R}(\lambda)$, определенный равенством

$$\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle = B_\lambda[\mathcal{R}(\lambda)F, v] \quad (\forall v \in \mathring{H}_+), \tag{3.21}$$

действует из $\mathring{H}_-$ в $\mathring{H}_-$.

Функции $\varphi_m^2(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, образуют разбиение единицы в $\mathbb{R}^n$ (см. (3.7)). Поэтому для всех $F \in H_0$ и всех $v \in \mathring{H}_+$ выполняются следующие равенства

$$\langle F, \, v\rangle = (F, \, v)_\delta = \sum_{m=1}^{\infty} \int \varphi_m^2(x) d^{2\delta}(x) F(x)\overline{v(x)} dx = \sum_{m=1}^{\infty} (\varphi_m F, \, \varphi_m v)_\delta. \tag{3.22}$$

Напомним, что $(\cdot, \cdot)_\delta$ – скалярное произведение в $H_0 = L_{2,\,\delta}(\mathbb{R}^n)$, и, как прежде, все интегралы берутся по $\mathbb{R}^n$.

Так как $a_{klm}(x) = (1-\eta_m(x))a_{kl}(x_m)+\eta_m(x)a_{kl}(x)$, и функция $\eta_m(x)$ обращается в единицу в некоторой окрестности множества $\operatorname{supp}\varphi_m$, то функции $a_{klm}(x)$ и $a_{kl}(x)$ на множестве $\operatorname{supp}\varphi_m$ совпадают. Поэтому из равенств (3.2), (3.20) и (3.21) следует, что

$$\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(i\theta_m) \Bigg\{ \sum_{|k|,|l|\leqslant r} \left(d^{-|k|} a_{klm} D^k(\varphi_m \mathcal{R}_m(\lambda)\varphi_m F), \, d^{-|l|} v^{(l)}\right)_{\alpha+r} + \\ + \lambda \left(\mathcal{R}_m(\lambda)\varphi_m F, \, \varphi_m v\right)_\delta \Bigg\}. \tag{3.23}$$

Здесь и далее символ D^k обозначает дифференцирование мультииндекса k.

Пусть $F \in H_0$. В равенстве (3.18) заменим F на $\varphi_m F$, и v – на $\varphi_m v$:

$$\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[\mathcal{R}_m(\lambda)\varphi_m F, \varphi_m v] = (\varphi_m F, \varphi_m v)_\delta.$$

Отсюда с учетом равенства (3.14) следует, что

$$(\varphi_m F, \varphi_m v)_\delta = \exp(i\theta_m) \Bigg\{ \sum_{|k|,|l|\leqslant r} \left(d^{-|k|} a_{klm} D^k \left(\mathcal{R}_m(\lambda)\varphi_m F\right), \, d^{-|l|} D^l(\varphi_m v)\right)_{\alpha+r} + \\ + \lambda \left(\mathcal{R}_m(\lambda)\varphi_m F, \, \varphi_m v\right)_\delta \Bigg\}.$$

Суммируя это равенство по m от 1 до ∞, в силу (3.22), имеем

$$\langle F,\, v\rangle = (F,\, v)_\delta = \sum_{m=1}^{\infty}\exp(i\theta_m)\Bigg\{\sum_{|k|,|l|\leqslant r}\left(d^{-|k|}a_{klm}D^k\left(\mathcal{R}_m(\lambda)\varphi_m F\right),\, d^{-|l|}D^l\left(\varphi_m v\right)\right)_{\alpha+r} + + \lambda\left(\mathcal{R}_m(\lambda)\varphi_m F,\, \varphi_m v\right)_\delta\Bigg\}.$$

Отсюда и из (3.23) следует, что

$$\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle - \langle F,\, v\rangle = \sum_{m=1}^{\infty}\exp(i\theta_m)\sum_{|k|,|l|\leqslant r}\Bigg\{\left(d^{-|k|}a_{klm}D^k\left(\varphi_m\mathcal{R}_m(\lambda)\varphi_m F\right),\, d^{-|l|}v^{(l)}\right)_{\alpha+r} - - \left(d^{-|k|}a_{klm}D^k\left(\mathcal{R}_m(\lambda)\varphi_m F\right),\, d^{-|l|}D^l\left(\varphi_m v\right)\right)_{\alpha+r}\Bigg\}. \tag{3.24}$$

Вводим обозначение

$$U_{m,\lambda} = \mathcal{R}_m(\lambda)\varphi_m F, \quad m = 1,\, 2,\, \ldots. \tag{3.25}$$

и запишем (3.24) в виде

$$\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle - \langle F,\, v\rangle = \mathbb{K}_\lambda[F,\, v] + \mathbb{L}_\lambda[F,\, v], \tag{3.26}$$

где

$$\mathbb{K}_\lambda[F,\, v] = \sum_{m=1}^{\infty}\exp(i\theta_m)\sum\nolimits^{(1)} C_{k'}^{k''}\left(d^{-|k|}a_{klm}\varphi_m^{(k')}U_{m,\delta,\lambda}^{(k'')},\, d^{-|l|}v^{(l)}\right)_{\alpha+r}, \tag{3.27}$$

$$\mathbb{L}_\lambda[F,\, v] = \sum_{m=1}^{\infty}\exp(i\theta_m)\sum\nolimits^{(2)} C_{l'}^{l''}\left(d^{-|k|}a_{klm}U_{m,\delta,\lambda}^{(k)},\, d^{-|l|}\varphi_m^{(l')}v^{(l'')}\right)_{\alpha+r}. \tag{3.28}$$

Здесь и далее символ $\sum^{(1)}$ обозначает суммирование по мультииндексам $k,\, l,\, k',\, k''$ таким, что $k = k' + k''$, $k' \neq 0$, $|k|,\, |l| \leqslant r$, и символ $\sum^{(2)}$ обозначает суммирование по мультииндексам $k,\, l,\, l',\, l''$ таким, что $l = l' + l''$, $l' \neq 0$, $|k|,\, |l| \leqslant r$.

Далее оценим абсолютное значение правых частей (3.27), (3.28). Сначала докажем, что для всех $F \in \mathring{H}_-$, $v \in \mathring{H}_+$ справедливо неравенство

$$|\mathbb{K}_\lambda[F,\, v]| \leqslant \omega_1(|\lambda|)\|F\|_- \cdot \|v\|_+ \left(\lambda \in S,\, |\lambda| \geq \sigma_0\right), \tag{3.29}$$

где положительная функция $\omega_1(t)$, $t > 0$, такая, что $\omega_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Рассмотрим симметричную форму

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda;m}[u, v] = \frac{1}{2}\left\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda m}[u, v] + \exp(-i\theta_m)\overline{\mathcal{B}_{\lambda;m}[v, u]}\right\}, \tag{3.30}$$

Из (3.16) следует, что

$$c_0\|u\|_+^2 \leqslant \widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda;m}[u, u], \quad u \in \mathring{H}_+. \tag{3.31}$$

Поэтому

$$c_0\|u\|_\delta^2 \leqslant \widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda;m}[u, u], \quad u \in \mathring{H}_+. \tag{3.32}$$

Тогда в силу известной теоремы из функционального анализа (см., например, [26, с.214]) существует самосопряженный оператор $B_m(\lambda)$, действующий в пространстве $H_0 = L_{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$, такой, что

$$\|B_m^{1/2}(\lambda)u\|_\delta^2 = \left(B_m^{1/2}(\lambda)u,\, B_m^{1/2}(\lambda)u\right)_\delta = \widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda;m}[u, u] = \mathrm{Re}\,\left\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u, u]\right\}, \tag{3.33}$$

$$D(\widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda;m}) = \mathring{H}_+.$$

Отсюда и из (3.32) следует, что

$$\|B_m^{1/2}(\lambda)u\|_\delta \geq c_0\|u\|_+ \qquad (\lambda \in S,\, |\lambda| \geq \sigma_0,\ u \in \mathring{H}_+). \tag{3.34}$$

Далее, используя (3.1), имеем

$$\left\|d^{\alpha+r-|k|}u^{(k)}\right\|_0 \leqslant M_8\|B_m^{1/2}(\lambda)u\|_\delta \quad (|k|\leqslant r).$$

Следовательно, при $\lambda\in S$, $|\lambda|\geq\sigma_0$, $|k|\leqslant r$, операторы $d^{\alpha+r-|k|-\delta}D^kB_m^{-1/2}(\lambda)$ ограничены:

$$\left\|d^{\alpha+r-|k|}D^kB_m^{-1/2}(\lambda)u\right\|_0 \leqslant M_8\|u\|_\delta. \tag{3.35}$$

Пусть мультииндексы k, k'' такие, что $0\neq|k''|<|k|\leqslant r$. При $k'=k-k''$, используя (3.8), имеем

$$\left\|d^{\alpha+r-|k|}\varphi_m^{(k')}u^{(k'')}\right\|_0 \leqslant C_1\left\|d^{\alpha+r-|k''|}u^{(k'')}\right\|_0.$$

Так как $|k''|<|k|\leqslant r$ и $\delta\leqslant r+\alpha$, то с помощью леммы 2.1 доказывается, что

$$\left\|d^{\alpha+r-|k''|}u^{(k'')}\right\|_0 < \varepsilon\|u\|_+ + K(\varepsilon)\left\|u\right\|_\delta,\ u\in\mathring{H}_+. \tag{3.36}$$

Здесь $\varepsilon>0$ – достаточно малое положительное число и величина $K(\varepsilon)$ такая, что

$$K(\varepsilon)\to+\infty \text{ при } \varepsilon\to+0. \tag{3.37}$$

Далее в процессе доказательства вместо $M\cdot K(\varepsilon)$, где M – некоторое положительное число, мы снова будем писать $K(\varepsilon)$.

В силу (3.34) из (3.36) следует, что

$$\left\|d^{\alpha+r-|k''|}u^{(k'')}\right\|_0^2 < \varepsilon^2\|B_m^{1/2}(\lambda)u\|_\delta^2 + K(\varepsilon)^2\left\|u\right\|_\delta^2.$$

Далее, ввиду равенства (3.33) имеем

$$\left\|d^{\alpha+r-|k''|}u^{(k'')}\right\|_0^2 \leqslant \varepsilon^2\mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u]\right\} + K(\varepsilon)^2\left\|u\right\|_\delta^2.$$

Используя (3.14), оценим правую часть этого неравенства

$$\varepsilon^2\mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,\,u]\right\} + K(\varepsilon)^2\left\|d^\delta u\right\|_0^2 =$$

$$= \varepsilon^2\mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_m)\left(\sum_{|k|,|l|\leqslant r}\left(d^{-|k|}a_{klm}u^{(k)},\,d^{-|l|}u^{(l)}\right)_{\alpha+r} + \lambda\left\|d^\delta u\right\|_0^2\right)\right\} + K(\varepsilon)^2\left\|u\right\|_\delta^2 \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^2\mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_m)\left(\sum_{|k|,|l|\leqslant r}\left(d^{-|k|}a_{klm}u^{(k)},\,d^{-|l|}u^{(l)}\right)_{\alpha+r} + \Lambda(|\lambda|,\,\varepsilon)\left\|u\right\|_\delta^2\right)\right\},$$

где $\Lambda(|\lambda|,\varepsilon)$ – непрерывная положительная функция, удовлетворяющая условию $|\lambda|+K(\varepsilon)^2\varepsilon^{-2}\leqslant\cos(\varphi-\pi/2)\Lambda(|\lambda|,\varepsilon)$. В силу (3.37), не ограничивая общности, можно считать, что $K(\varepsilon)^2\varepsilon^{-2}\to+\infty$ при $\varepsilon\to0+$. Поэтому из полученного выше неравенства при $|\lambda|=1/\varepsilon$ следует, что

$$\left\|d^{\alpha+r-|k''|}u^{(k'')}\right\|_0^2 \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^2\mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_m)\left(\sum_{|k|,|l|\leqslant r}\left(d^{-|k|}a_{klm}u^{(k)},\,d^{-|l|}u^{(l)}\right)_{\alpha+r} + p(\varepsilon)\left\|u\right\|_\delta^2\right)\right\}, \tag{3.38}$$

где $p(\varepsilon)=\Lambda(1/\varepsilon,\,\varepsilon)$. Заметим, что $p(\varepsilon)\to\infty$ при $\varepsilon\to0$. Обозначим через $q(\cdot)$ функцию, обратную относительно $p(\varepsilon)$. Тогда при $\varepsilon=q(|\lambda|)$, то есть $|\lambda|=p(\varepsilon)$, из (3.38) следует

$$\left\|d^{\alpha+r-|k''|}u^{(k'')}\right\|_0^2 \leqslant q(\lambda)^2\mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_m)\left(\sum_{|k|,|l|\leqslant r}\left(d^{-|k|}a_{klm}u^{(k)},\,d^{-|l|}u^{(l)}\right)_{\alpha+r} + \lambda\left\|u\right\|_\delta^2\right)\right\}.$$

Здесь $q(t)$ – положительная непрерывная функция, определенная для $t > 0$, и такая, что $q(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Из полученного выше неравенства в силу (3.14), (3.33) имеем

$$\left\| d^{\alpha+r-|k''|} u^{(k'')} \right\|_0 \leqslant q(|\lambda|) \|B_m^{1/2}(\lambda)u\|_\delta, \quad u \in \overset{\circ}{H}_+. \tag{3.39}$$

Это неравенство доказано в случае $0 \neq |k''| < |k|$. Ниже докажем, что оно имеет место и в случае $|k''| = 0$.

Пусть $\lambda \in S$ и $|\lambda| > \sigma_0$, где $\sigma_0 > 0$ – такое же число, как в (3.34). Тогда, используя (3.30), имеем

$$\|B_m^{1/2}(\lambda)u\|_\delta^2 = \operatorname{Re}\{\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u]\} = \|B_m^{1/2}(\lambda_0)u\|_\delta^2 + \operatorname{Re}\{\exp(i\theta_m)(\lambda-\sigma_0)\}\|u\|_\delta^2 \geq$$
$$\geq \operatorname{Re}\{\exp(i\theta_m)(\lambda-\sigma_0)\}\|u\|_\delta^2.$$

Следовательно,

$$\|u\|_\delta^2 \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\{\exp(i\theta_m)(\lambda-\sigma_0)\}} \|B_m^{1/2}(\lambda)u\|_\delta^2. \tag{3.40}$$

Вводя обозначение

$$q(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Re}\{\exp(i\theta_m)(\lambda-\sigma_0)\}}}$$

и учитывая неравенство $d^{r+\alpha}(x) \leqslant d^\delta(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, из (3.40) получим (3.39) при $|k''| = 0$.

Согласно неравенствам (3.16), (3.17), форма $\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v]$ замкнута и секториальна в пространстве H_0. Поэтому, в силу утверждения i) теоремы 2.1 из [27, гл. 6], существует такой m – секториальный оператор $A_m(\lambda)$, что

$$\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v] = (A_m(\lambda)u, v)_\delta \quad \forall u \in D(A_m(\lambda)) \subset \overset{\circ}{H}_+, \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}_+. \tag{3.41}$$

Пусть $f \in H_0$. Тогда $\mathcal{R}_m(\lambda)f \in \overset{\circ}{H}_+$, и ввиду равенства (3.18)

$$\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[\mathcal{R}_m(\lambda)f, v] = \langle f, v\rangle = (f,\, v)_\delta$$

для всех $v \in \overset{\circ}{H}_+$. Согласно утверждению iii) теоремы 2.1 из [27, гл. 6], если для $u \in \overset{\circ}{H}_+$, $w \in H_0$, выполняется равенство

$$\exp(i\theta_m)\mathcal{B}_{\lambda;m}[u,v] = (w,v)_\delta \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}_+,$$

то $u \in D(A_m(\lambda))$ и $A_m(\lambda)u = w$. Поэтому

$$(A_m(\lambda)\mathcal{R}_m(\lambda)f,\, v)_\delta = \langle f, v\rangle = (f,\, v)_\delta \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}_+.$$

Отсюда следует $A_m(\lambda)\mathcal{R}_m(\lambda)f = f \quad \forall f \in H_0$, и, следовательно,

$$\mathcal{R}_m(\lambda)f = A_m^{-1}(\lambda)f \quad \forall f \in H_0. \tag{3.42}$$

Пусть $B_m(\lambda)$ – самосопряженный оператор, порожденный формой (3.30). Из неравенства (3.34) следует, что

$$\left\|B_m^{1/2}(\lambda)u\right\|_\delta \geq c_0\,\|u\|_\delta \;\forall u \in \overset{\circ}{H}_+ \quad (\lambda \in S,\, |\lambda| \geq \sigma_0).$$

Отсюда следует обратимость оператора $B_m^{1/2}(\lambda)$ при $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq \sigma_0$. Применяя теорему 3.2 из [27, гл. 6] , получим представление

$$A_m^{-1}(\lambda) = B_m^{-1/2}(\lambda)X_m(\lambda)B_m^{-1/2}(\lambda) \quad (\lambda \in S,\, |\lambda| \geq \sigma_0), \tag{3.43}$$

где $X_m(\lambda)$ – некоторый ограниченный оператор в H_0, и его норма $\|X_m(\lambda)\|$ не превосходит числа $M_1 > 0$, не зависящего от $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq \sigma_0$.

Теперь переходим к непосредственному доказательству оценки (3.29). Равенство (3.27) перепишем в виде

$$\mathbb{K}_\lambda[F,\, v] = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(i\theta_m) \sum\nolimits^{(1)} C_{k'}^{k''} \left(d^{-|k|} a_{klm} \varphi_m^{(k')} U_{m,\lambda}^{(k'')},\, d^{-|l|} v^{(l)} \right)_{\alpha+r}. \tag{3.44}$$

Пусть $F \in H_0$. Используя равенства (3.41) – (3.44), имеем

$$\mathbb{K}_\lambda[F,v] = \sum_{m=1}^{\infty} \sum\nolimits^{(1)} C_{k'}^{k''} \exp(i\theta_m) \left(d^{-|k|} a_{klm} \varphi_m^{(k')} D^{k''} A_m^{-1}(\lambda) \varphi_m F,\, d^{-|l|} v^{(l)} \right)_{\alpha+r} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum\nolimits^{(1)} C_{k'}^{k''} \exp(i\theta_m) (d^{-|k|} a_{klm} \varphi_m^{(k')} D^{k''} B_m^{-1/2}(\lambda) X_m(\lambda) B_m^{-1/2}(\lambda) \varphi_m F, d^{-|l|} v^{(l)}(x))_{\alpha+r}.$$

Далее, применяя лемму 3.2 и неравенство Коши – Буняковского, имеем

$$|\mathbb{K}_\lambda[F,v]| \leqslant M_9 \Lambda_n \sup_{m=1,2,\dots} \sum\nolimits^{(3)} \left\| \mathbb{T}_m^{k',k''}(\lambda) V_{m,\lambda} \right\|_{r+\alpha} \cdot \left\| d^{-|l|} v^{(l)}(x) \right\|_{r+\alpha}, \tag{3.45}$$

где

$$\mathbb{T}_m^{k',k''}(\lambda) = d^{-|k'|-|k''|} \varphi_m^{(k')} a_{klm} D^{k''} B_m^{-1/2}(\lambda), \quad V_{m,\lambda} = X_m(\lambda) B_m^{-1/2}(\lambda) \varphi_m F \tag{3.46}$$

и символом $\sum^{(3)}$ обозначено суммирование по мультииндексам k', k'' таким, что $|k'| + |k''| \leqslant r$ и $k' \neq 0$.

В силу неравенства (3.1) из (3.45) следует

$$|\mathbb{K}_\lambda[F,v]| \leqslant M_{10} \|v\|_+ \cdot \sup_{m=1,2,\dots} \sum\nolimits^{(3)} \left\| \mathbb{T}_m^{k',k''}(\lambda) V_{m,\lambda} \right\|_{r+\alpha}, \tag{3.47}$$

Пусть σ_0 – положительное число, такое же, как в (3.43). Тогда при $|\lambda| > \sigma_0$ в силу равенства (3.33) имеем

$$\left\| B_m^{1/2}(\lambda) u \right\|_\delta^2 = \mathrm{Re}\{\exp(i\theta_m) \mathcal{B}_{\lambda;m}[u,u]\} \geq \mathrm{Re}\{\exp(i\theta_m) \mathcal{B}_{\sigma_0;m}[u,u]\} = \left\| B_m^{1/2}(\sigma_0) u \right\|_\delta^2. \tag{3.48}$$

Следовательно,

$$\left\| B_m^{-1/2}(\lambda) \varphi_m F \right\|_\delta \leqslant M_{11} \left\| B_m^{-1/2}(\sigma_0) \varphi_m F \right\|_\delta. \tag{3.49}$$

Ниже мы будем воспользоваться равенством

$$\|f\|_\delta = \sup |(f,v)_\delta|, \tag{3.50}$$

где супремум берется по всем $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, таким, что $\|v\|_\delta = 1$.

При $\lambda = \sigma_0$ из равенства (3.33) имеем $\left(B_m^{1/2}(\sigma_0) u,\, B_m^{1/2}(\sigma_0) v \right)_\delta = \widetilde{\mathcal{B}}_{\sigma_0;m}[u,v]$. С другой стороны,

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\sigma_0;m}[u,u] \geq c_1 \|u\|_+^2,$$
$$\left| \widetilde{\mathcal{B}}_{\sigma_0;m}[u,v] \right| \leqslant M_1 (M_0 + \sigma_0) \|u\|_+ \cdot \|v\|_+ \tag{3.51}$$

для всех $u, v \in \mathring{H}_+$. Поэтому, согласно теореме Лакса – Мильграма, уравнение

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\sigma_0;m}[u,\widehat{v}] = (w,\widehat{v})_\delta \quad \forall \widehat{v} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

имеет решение для любого $w \in H_0 = L_{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, функцию $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в (3.50) можно представить в виде $v = B_m^{1/2}(\sigma_0) w$, то есть

$$\|f\|_\delta = \sup \left| \left(f,\, B_m^{1/2}(\sigma_0) w \right)_\delta \right|,$$

где супремум берется по всем $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ таким, что $\left\| B_m^{1/2}(\sigma_0) w \right\|_\delta = 1$.

С другой стороны, в классе $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ нормы $\|v\|_+$ и $\left\| B_m^{1/2}(\sigma_0) v \right\|_\delta$ эквивалентны. Поэтому

$$\left\| B_m^{-1/2}(\sigma_0) \varphi_m F \right\|_\delta = \sup \left| \left(B_m^{-1/2}(\sigma_0) \varphi_m F, w \right)_\delta \right| =$$
$$= \sup \left| \left(B_m^{-1/2}(\sigma_0) \varphi_m F,\, B_m^{1/2}(\sigma_0) v \right)_\delta \right| \leqslant M_{12} \sup |(\varphi_m F, v)_\delta| \leqslant$$
$$\leqslant M_{13} \|\varphi_m F\|_- \leqslant M_{14} \|F\|_-, \tag{3.52}$$

где первый супремум в этой цепочке берется по всем $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с единичной нормой в H_0, второй супремум – по всем $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющим условию $\left\|B_m^{1/2}(\sigma_0)v\right\|_\delta = 1$, а третий супремум – по всем $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с единичной нормой в H_+.

В силу (3.49) из (3.52) имеем

$$\|V_{m,\lambda}\|_\delta \leqslant M\|F\|_-, \tag{3.53}$$

которое справедливо при $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq \sigma_0$, где $\sigma_0 \geq 1$ – некоторое конечное число.

В силу доказанного выше неравенства (3.39), из равенства (3.46) следует, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} \left\|\mathbb{T}_m^{k',k''}(\lambda)\right\| = 0. \tag{3.54}$$

Тогда из (3.47), (3.52), (3.53) получим

$$|\mathbb{K}_\lambda[F,v]| \leqslant M_{15} \sup_{m=1,2,\ldots} \sup_{|k'|+|k''|\leqslant 2r;\, k'\neq 0} \left\|\mathbb{T}_m^{k',k''}(\lambda)\right\| \cdot \|V_{m,\lambda}\|_\delta \|v\|_+ \leqslant \omega_1(|\lambda|)\|F\|_- \cdot \|v\|_+$$

для всех $F \in H_0$, $v \in \mathring{H}_+$, и $\omega_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Отсюда в силу плотности H_0 в $\mathring{H}_-$ следует оценка (3.29).

Теперь переходим к оценке абсолютного значения правой части равенства (3.30). Докажем, что для всех $F \in \mathring{H}_-$, $v \in \mathring{H}_+$ выполняется неравенство

$$|\mathbb{L}_\lambda[F,\, v]| \leqslant \omega_2(\sigma_0)\|F\|_- \cdot \|v\|_+ \quad (\lambda \in S,\, |\lambda| \geq \sigma_0)\,, \tag{3.55}$$

где положительная функция $\omega_2(t)$, $t > \sigma_0$, такая, что $\omega_2(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Полуторалинейную форму $\mathbb{L}_\lambda[F,\, v]$ (см. (3.28)) представим в виде

$$\mathbb{L}_\lambda[F,\, v] = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(i\theta_m) \sum\nolimits^{(2)} C_{l'}^{l''} \mathbb{I}_{\lambda;\,k,m}^{l',l''}[F,\, v], \tag{3.56}$$

где

$$\mathbb{I}_{\lambda;\,k,m}^{l',l''}[F,\, v] = \left(d^{-|k|}a_{klm}U_{m,\lambda}^{(k)},\, d^{-|l'|-|l''|}\varphi_m^{(l')}v^{(l'')}\right)_{\alpha+r},$$

$$U_{m,\lambda}^{(k)}(x) = D^k(\mathcal{R}_m(\lambda)\varphi_m F)(x), \quad m = 1,\, 2,\, \ldots,$$

и символ $\sum^{(2)}$ обозначает суммирование по мультииндексам $k,\, l,\, l',\, l''$ таким, что $l = l' + l''$, $l' \neq 0$, $|k|$, $|l| \leqslant r$.

Далее, используя (3.42), (3.43), (3.46), запишем форму $\mathbb{I}_{\lambda;\,k,m}^{l',l''}[F,\, v]$ в виде

$$\mathbb{I}_{\lambda;\,k,m}^{l',l''}[F,\, v] = \left(d^{-|k|}a_{klm}D^k B_m^{-1/2}(\lambda)V_{m,\lambda},\, d^{-|l'|-|l''|}\varphi_m^{(l')}D^{l''}v\right)_{\alpha+r}.$$

Отсюда, учитывая самосопряженность оператора $B_m(\sigma_0)$, имеем

$$\mathbb{I}_{\lambda;\,k,m}^{l',l''}[F,\, v] = \left(B_m^{-1/2}(\sigma_0)D^{l''}\varphi_m^{(l')}d^{-|k|-|l'|-|l''|}a_{klm}D^k B_m^{-1/2}(\lambda)V_{m,\lambda},\, B_m^{1/2}(\sigma_0)v\right)_{r+\alpha}. \tag{3.57}$$

Согласно (3.46) и (3.54)

$$\left(\mathbb{T}_m^{l',l''}(\sigma_0)\right)^* = B_m^{-1/2}(\sigma_0)D^{l''}\varphi_m^{(l')}d^{-|l'|-|l''|}a_{klm},$$

$$\lim_{\sigma_0\to\infty} \left\|\left(\mathbb{T}_m^{l',l''}(\sigma_0)\right)^*\right\| = 0 \tag{3.58}$$

при $|l'| + |l''| \leqslant r$; $l' \neq 0$. Учитывая это, записываем равенство (3.57) в виде

$$\mathbb{I}_{\lambda;\,k,m}^{l',l''}[F,\, v] = \left(\left(\mathbb{T}_m^{l',l''}(\sigma_0)\right)^* d^{-|k|}D^k B_m^{-1/2}(\lambda)V_{m,\lambda},\, B_m^{1/2}(\sigma_0)v\right)_{\alpha+r}.$$

Далее вводим обозначение

$$\mathbb{P}_{m,\,k}(\sigma_0) = d^{-|k|}D^k B_m^{-1/2}(\sigma_0)$$

и записываем полученное равенство в виде

$$\mathbb{I}^{l',l''}_{\lambda;\,k,m}[F,\,v] = \left(\left(\mathbb{T}^{l',l''}_m(\sigma_0)\right)^* \mathbb{P}_{m,\,k}(\sigma_0) B^{1/2}_m(\sigma_0) B^{-1/2}_m(\lambda) V_{m,\lambda},\, B^{1/2}_m(\sigma_0) v\right)_{\alpha+r}. \tag{3.59}$$

Из (3.48) следует, что при $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq \sigma_0$ оператор $B^{1/2}_m(\sigma_0)B^{-1/2}_m(\lambda)$ является ограниченным оператором, и его норма не превосходит единицу. С другой стороны, согласно доказанному выше неравенству (3.35) оператор $\mathbb{P}_{m,\,k}(\sigma_0)$ является ограниченным. Поэтому из (3.59) имеем

$$\left|\mathbb{I}^{l',l''}_{\lambda;\,k,m}[F,\,v]\right| \leqslant M_{16} \left\|\left(\mathbb{T}^{l',l''}_m(\sigma_0)\right)^*\right\| \|V_{m,\lambda}\|_\delta \cdot \left\|B^{1/2}_m(\sigma_0) v\right\|_\delta$$

при всех $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq \sigma_0$. Отсюда в силу (3.51), (3.53) следует, что

$$\left|\mathbb{I}^{l',l''}_{\lambda;\,k,m}[F,\,v]\right| \leqslant M_{17} \left\|\left(\mathbb{T}^{l',l''}_m(\sigma_0)\right)^*\right\| \|F\|_- \|v\|_+$$

при всех $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq \sigma_0$ и для всех $F \in H_0$, $v \in \mathring{H}_+$. Вводя обозначение

$$\omega_*(\sigma_0) = M_{17} \left\|\left(\mathbb{T}^{l',l''}_m(\sigma_0)\right)^*\right\|,$$

получим

$$\left|\mathbb{I}^{l',l''}_{\lambda;\,k,m}[F,\,v]\right| \leqslant \omega_*(\sigma_0) \|F\|_- \|v\|_+ \tag{3.60}$$

при всех $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq \sigma_0$ и для всех $F \in H_0$, $v \in \mathring{H}_+$.

Из (3.58) следует, что $\omega_*(\sigma_0) \to 0$ при $\sigma_0 \to 0$. Поэтому, подбирая число σ_0 достаточно большим, из (3.60) и (3.56) в силу леммы 3.2 получаем (3.55) для $F \in H_0$. Полученная оценка по непрерывности распространяется на всех $F \in \mathring{H}_-$. Неравенство (3.55) доказано

Применяя неравенства (3.29), (3.55) из (3.26), получим

$$|\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle - \langle F,\,v\rangle| \leqslant (\omega_1(|\lambda|) + \omega_2(\sigma_0)) \|F\|_- \|v\|_+$$

для всех $F \in \mathring{H}_-$, $v \in \mathring{H}_+$. Так как $\lim_{t\to\infty} \omega_i(t) = 0$, $i = 1,\,2$, то существует число $\sigma_0 \geq 1$ такое, что

$$|\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle - \langle F,\,v\rangle| \leqslant \frac{1}{2} \|F\|_- \|v\|_+ \tag{3.61}$$

для любого $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq \sigma_0$ и всех $F \in \mathring{H}_-$, $v \in \mathring{H}_+$.

Из оценки (3.61) следует, что при $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq \sigma_0$ оператор $\mathbb{G}(\lambda) = \mathbb{R}(\lambda) - E$, действующий из $\mathring{H}_-$ в $\mathring{H}_-$, является ограниченным, и его норма не превосходит $1/2$. Поэтому оператор $\mathbb{R}(\lambda) : \mathring{H}_- \to \mathring{H}_-$ непрерывно обратим и $\mathbb{R}^{-1}(\lambda) = (E + \mathbb{G}(\lambda))^{-1}$.

Оператор $\mathcal{R}_m(\lambda)$, определенный равенством (3.18), действует из $\mathring{H}_-$ в $\mathring{H}_+$. Поэтому из (3.20) следует, что оператор $\mathcal{R}(\lambda)$ также действует из $\mathring{H}_-$ в $\mathring{H}_+$. Следовательно, для любого функционала $F \in \mathring{H}_-$ функция $U(x)$, определенная равенством

$$U = \mathcal{R}(\lambda)\mathbb{R}^{-1}(\lambda)F \quad (\lambda \in S,\, |\lambda| \geq \sigma_0), \tag{3.62}$$

принадлежит пространству $\mathring{H}_+$.

Далее будем предполагать, что $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq \sigma_0$ и σ_0 – некоторое достаточно большое число. Тогда из равенства (3.21) следует, что $B_\lambda[\mathcal{R}(\lambda)\mathbb{R}^{-1}(\lambda)F, v] = \langle F, v\rangle$ для всех $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Поэтому при $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq \sigma_0$ функция $U(x)$, определенная равенством (3.62), удовлетворяет уравнению

$$B_\lambda[U, v] = \langle F, v\rangle \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

то есть является решением задачи D_λ. Так как при $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq \sigma_0$ оператор $\mathbb{R}^{-1}(\lambda)$ ограничен, то из (3.19) и (3.20) следует, что функция (3.62) удовлетворяет оценке (3.9) теоремы 3.1.

Переходим к доказательству единственности решения задачи D_λ. Очевидно, для этого нам достаточно доказать, что однородная задача D_λ, то есть, когда $F = 0$, имеет только нулевое решение.

Рассмотрим сопряженную задачу: для заданного функционала $F \in \overset{\circ}{H}_-$ найти функцию $U_1 \in \overset{\circ}{H}_+$, удовлетворяющую равенству

$$\overline{B_\lambda[v, U_1]} = \langle F, v\rangle \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}_+. \tag{3.63}$$

Так как коэффициенты формы $\overline{B_\lambda[v, U_1]}$ удовлетворяют условиям теоремы 3.1, поступая так же, как выше, можно построить операторы $\mathcal{R}_*(\lambda)$, $\mathbb{R}_*(\lambda)$ такие, что функция $U_1 = \mathcal{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F$ $(\lambda \in S,\, |\lambda| \geq \sigma_0^*)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{H}_+$ и удовлетворяет уравнению (3.63).

Пусть функция $u \in \overset{\circ}{H}_+$ является решением уравнения

$$B_\lambda[u, v] = 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}_+, \tag{3.64}$$

где $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq \sigma_0' = \max\{\sigma_0^*, \sigma_0\}$. Пусть F – произвольный элемент пространства $\overset{\circ}{H}_-$. Так как $U_1 = \mathcal{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{H}_+$, то, полагая $v = U_1$ в (3.64), получаем $B_\lambda[u, U_1] = 0$, т. е. $\overline{B_\lambda[u, U_1]} = 0$.

С другой стороны, функция $U_1 = \mathcal{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F$ удовлетворяет (3.63). Поэтому $\langle F, u\rangle = 0$ для всех $F \in \overset{\circ}{H}_+$. Учитывая вложение $\overset{\circ}{H}_+ \to \overset{\circ}{H}_-$ и полагая $F = u$, имеем $\langle u, u\rangle = 0$, то есть $u = 0$.

□

4. Гладкость решения однородной вариационной задачи Дирихле

Если коэффициенты $a_{kl}(x)$ формы (3.2) и правая часть уравнения (3.3) – функционал F обладают некоторым свойством гладкости, то повышается и гладкость решения задачи D_λ.

Пусть m – натуральное число и $m \leqslant r$. Вводим обозначения $\overset{\circ}{H}{}^m_+ = \overset{\circ}{W}{}^{r+m}_{2;\,\alpha-m,\,\delta}(\mathbb{R}^n)$, $\|\cdot\|_{+m}$ – норма в $W^{r+m}_{2;\,\alpha-m,\,\delta}(\mathbb{R}^n)$. Символом $\overset{\circ}{H}{}^{-m}_-$ обозначим пополнения пространства $H_0 = L_{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|f\|_{-m} = \sup|(f,\, u)_\delta|$$

где верхняя грань берется по всем $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ таким, что $\left\|u;\, W^{r-m}_{2;\,\alpha+m,\,\delta}(\mathbb{R}^n)\right\| = 1$. Отметим, что $\overset{\circ}{H}{}^m_+ \to \overset{\circ}{H}_+$, $\overset{\circ}{H}{}^{-m}_- \to \overset{\circ}{H}_-$ для любого натурального $m \leqslant r$.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 3.1, и пусть существует натуральное число $m_0 \leqslant r$ такое, что*

$$\left|a^{(s)}_{kl}(x)\right| \leqslant M d^{|s|}(x),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

для любого мультииндекса $s:\ |s| \leqslant m_0$.

Тогда существует сектор $S \subset \{z \in C : |arg\, z| < \pi/2\} \cup \{0\}$ с вершиной в нуле и положительное число σ_0 такие, что при $\lambda \in S$ и $|\lambda| \geq \sigma_0$ для любого заданного элемента $F \in \overset{\circ}{H}{}^{-m}_-$, где натуральное число m такое, что $m \leqslant m_0$, существует единственное решение $u \in \overset{\circ}{H}_+$ задачи D_λ. Это решение принадлежит пространству $\overset{\circ}{H}{}^m_+$, и справедлива следующая оценка $\|u\|_{+m} \leqslant M\,\|F\|_{-m}$, где число $M > 0$ не зависит от $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq \sigma_0$, и функционала F.

Доказательство проводится усовершенствованием техники, использованной при доказательстве теоремы 8 работы [12] о гладкости решения вариационной задачи Дирихле в ограниченной области, связанной с некоэрцитивной формой (см., также [28]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский С.М., Лирозкин П.И., Мирошин Н.В. *Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений* // Известия вузов. Математика. 1988. № 8. С. 4–30.
2. Мирошин Н.В. *Спектральные внешние задачи для вырождающегося эллиптического оператора* // Известия вузов. Математика. 1988. № 8. С. 47–55.
3. Мирошин Н.В. *Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора с вырождением* // Труды математического института им. В. А. Стеклова РАН. 1992. Т. 194. С. 179–195.
4. Исхоков С.А. *О гладкости решения вырождающихся эллиптических уравнений* // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 641–653.
5. Исхоков С.А., Куджмуродов А.Я. *О вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов* // Доклады Академии наук (Россия). 2005. Т. 403, № 2. С. 165-168.
6. Исхоков С.А. *Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением* // Математические заметки. 2010. Т. 87, № 2. С. 201–216.
7. Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Якушев И.А. *Неравенство Гординга для эллиптических операторов высшего порядка с нестепенным вырождением и его приложения* // Уфимский математический журнал. 2016. Т. 8, № 1. С. 54–71.
8. Исхоков С.А., Нематуллоев О.А. *О разрешимости вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области* // Доклады АН Республики Таджикистан. 2013. Т. 56, № 5. С. 352–358.
9. Бойматов К.Х. *Обобщенная задача Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка* // Доклады АН СССР. 1992. Т. 327, № 1. С. 9–15.
10. Бойматов К.Х. *Обобщенная задача Дирихле, связанная с некоэрцитивной билинейной формой* // Доклады Академии наук (Россия). 1993. Т. 330, № 3. С. 285–290.
11. Бойматов К.Х. *Матричные дифференциальные операторы, порожденные некоэрцитивными билинейными формами.* // Доклады Академии наук (Россия). 1994. Т. 339, № 1. С. 5–10.
12. Бойматов К.Х., Исхоков С.А. *О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой* // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 1997. Т. 214. С. 107–134.
13. Исхоков С.А. *Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов с нестепенным вырождением, порожденных некоэрцитивными формами* // Доклады Академии наук (Россия). 2003. Т. 392, № 5. С. 606–609.
14. Исхоков С.А., Каримов А.Г. *О гладкости решения вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов, ассоциированных с некоэрцитивными билинейными формами* // Доклады АН Республики Таджикистан. 2004. Т. 47, № 4. С. 68–74.
15. Бойматов К.Х. *О базисности по Абелю системы корневых вектор-функций вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов с сингулярными матричными коэффициентами* // Сибирский математический журнал. 2006. Т. 47, № 1. С. 46–57.
16. Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Константинова Т.П. *Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами* // Доклады Академии наук (Россия). 2015. Т. 462, № 1. С. 7–10.
17. Гадоев М.Г., Константинова Т.П. *О разрешимости вариационной задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических операторов.* // Математические заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 2. С. 8–21.
18. Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Петрова М.Н. *О некоторых спектральных свойствах одного класса вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов* // Математические заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 2. С. 31–50.
19. Бойматов К.Х. *О плотности финитных функций в весовых пространствах* // Доклады АН СССР. 1989. Т. 307, № 6. С. 1296–1299.

20. Исхоков С.А. *О гладкости обобщенного решения вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений в полупространстве* // Доклады Академии наук (Россия). 1993. Т. 330, № 4. С. 420–423.
21. Кудрявцев Л.Д. *Теоремы вложения для классов функций, определенных на неограниченных областях* // ДАН СССР. 1963. Т. 153, № 3. С. 530–532.
22. Пиголькина Т.С. *О плотности финитных функций в весовых классах* // Математические заметки. 1967. Т. 2, № 1. С. 53-60.
23. Березанский Ю.М. *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.* Киев: Наукова Думка, 1965.
24. Бойматов К.Х. *Спектральная асимптотика дифференциальных и псевдодифференциальных операторов. I* // Труды семинара им. И.Г.Петровского. 1981. Вып.7. С. 50–100.
25. Бойматов К.Х. *Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения* // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1984. Т.170. С. 37–76.
26. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 264 с.
27. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир. 1972. 740 с.
28. Исхоков С.А. *О гладкости решений обобщенной задачи Дирихле и задачи на собственные значения для дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами* // Доклады Академии наук (Россия). 1995. Т. 342, № 1. С. 20–22.

Сулаймон Абунасрович Исхоков,
Институт математики Академии наук Республики Таджикистан,
ул. Айни, 299/4,
734063, г. Душанбе, Таджикистан
Мирнинский политехнический институт (филиал) СВФУ им. М.К. Аммосова,
ул. Тихонова, 5/1,
678170, г. Мирный, Россия
E-mail: `sulaimon@mail.ru`

Бахтовар Абдуганиевич Рахмонов,
Институт математики Академии наук Республики Таджикистан,
ул. Айни, 299/4,
734063, г. Душанбе, Таджикистан
E-mail: `bakhtovar-1989@mail.ru`