ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 1 (2020). С. 30-42.

УДК 519.21

КРИТЕРИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

Х.К. ИШКИН, Р.И. МАРВАНОВ

Аннотация. Исследуются условия эквивалентности двух асимптотических формул для произвольной неубывающей неограниченной последовательности $\{\lambda_n\}$. Показано, что если g – неубывающая и неограниченная на бесконечности функция, $\{f_n\}$ – неубывающая последовательность, асимптотически обратная к функции g, то для любой последовательности вещественных чисел λ_n, удовлетворяющих асимптотической оценке $\lambda_n \sim f_n,\ n \to +\infty$, верна и оценка $N(\lambda) \sim g(\lambda)$, $\lambda \to +\infty$, тогда и только тогда, когда g – почти правильно меняющаяся функция (PRV-функция). Также найдено необходимое и достаточное условие на неубывающие последовательность $\{f_n\}$ и функцию g, при котором вторая формула влечет первую. Используя полученный критерий, найден нетривиальный класс возмущений, сохраняющих асимптотику спектра произвольного замкнутого, плотно определенного в сепарабельном гильбертовом пространстве оператора, имеющего хотя бы один луч наилучшего убывания резольвенты. Этот результат является первым обобщением известной теоремы Келдыша на случай операторов, не близких к самосопряженным или нормальным, спектр которых может сильно меняться под действием малых возмущений. Получены также близкие к необходимым достаточные условия на потенциал, при которых спектр оператора Штурма–Лиувилля на кривой имеет такую же асимптотику, как в случае потенциала, имеющего в выпуклой оболочке кривой конечное число полюсов, удовлетворяющих условию тривиальной монодромии.

Ключевые слова: асимптотическая эквивалентность, функции, сохраняющие эквивалентность, почти правильно меняющиеся PRV-функции, операторы, не близкие к самосопряженным, теорема Келдыша, локализация спектра, потенциалы с тривиальной монодромией.

Mathematics Subject Classification: 34D05, 35P20, 60F17

1. Введение

Найти асимптотику некоторой последовательности $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – это значит предъявить последовательность $\{f_n\}$ с известными (вытекающими из контекста) свойствами, удовлетворяющую соотношению:

$$\lambda_n \sim f_n, \qquad n \to +\infty. \tag{1}$$

Здесь и всюду далее запись $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$, $x \in D$, понимается как асимптотическое равенство (эквивалентность) для функций g и f, определенных на множестве D с предельной точкой x_0:

$$g(x) = f(x)(1 + \alpha(x)), \qquad x \in D, \qquad \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Kh. Ishkin, R. Marvanov, Equivalence criterion for two asymptotic formulae.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

Поступила 20 июня 2019 г.

Иногда формулу (1) удается уточнить. К примеру, если L – оператор, порожденный в $L^2(0,\pi)$ дифференциальным выражением $-y''+qy$, где $q\in W_2^m[0,\pi]$, и краевыми условиями $y(0)=y(\pi)=0$, $\{\lambda_n\}$ – собственные числа L, занумерованные в порядке неубывания модулей с учетом алгебраических кратностей, то (см., [2, гл. I, § 5]):

$$\lambda_n-\left(n^2+\sum_{j=1}^{[m+1/2]}c_jn^{-2j}\right)=n^{-m}\alpha_n,\qquad c_j=\mathrm{const},\qquad \{\alpha_n\}\in l^2.$$

Однако часто в задачах, где приходится иметь дело с последовательностями, пользуются формулой

$$N(\lambda)\sim g(\lambda),\qquad \lambda\to+\infty, \tag{2}$$

где

$$N(\lambda)=\sum_{\lambda_n<\lambda}1$$

– функция распределения $\{\lambda_n\}$. Причины тому могут быть разные: порой выбор в пользу формулы (2) может быть продиктован не столько применяемыми методами и подходами, а соображениями более глубокими, вытекающими из самой сути проблемы. В качестве иллюстрации рассмотрим

Пример 1. *Пусть G – ограниченная область в $\mathbb{R}^m$, $-\Delta_D^G$ – Лапласиан Дирихле области G – самосопряженный оператор в $L^2(G,dx)$, ассоциированный с квадратичной формой, представляющей собой замыкание формы*

$$q(f,g)=\int_G\nabla f\overline{\nabla g}dx,\qquad f,g\in C_0^\infty(G).$$

Пусть $\{\lambda_n\}$ – собственные числа оператора A, пронумерованные в порядке неубывания с учетом их кратностей. Тогда если G имеет жорданов объем, то (см., например, [3, гл. XIII, § 15])

$$N(\lambda)\sim(2\pi)^{-m}\tau_mW_m(G)\lambda^{m/2},\qquad \lambda\to+\infty, \tag{3}$$

где W_k – k-мерный жорданов объем. При выполнении дополнительных условий на область G и ее границу Γ (см. [4, §§ 17.5, 24.7], [5]) формулу (3) *можно уточнить, выделяя второй член разложения, который выражается в терминах $m-1$-мерной меры Γ.*

Попутно отметим, что формула (3) *восходит к известной работе Г. Вейля [6], подтвердившей гипотезу Лоренца и Джинса об определении объема области G по спектру Лапласиана $-\Delta^G$. Впоследствии был найден ряд других геометрических характеристик области G, определяемых асимптотикой $N(\lambda)$ [7].*

Пример 1 показывает, сколь естественным может быть выбор в пользу формулы (2). Конечно, при этом предполагается, что знание функции g дает некоторое представление о последовательности $\{f_n\}$. Это предположение оправдывается, например, в случае, когда известно, что последовательность $\{\lambda_n\}$ строго монотонна, и функция g *сохраняет асимптотическую эквивалентность последовательностей*, то есть для любых бесконечно больших последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ справедливо утверждение

$$x_n\sim\ y_n,\quad n\to+\infty\ \Rightarrow\ g(x_n)\sim\ g(y_n),\quad n\to+\infty. \tag{4}$$

Действительно, если $\{\lambda_n\}$ возрастает, то $N(\lambda_n)=n-1$, и из формул (2) и (4) имеем

$$g(f_n)\sim n,\qquad n\to\infty. \tag{5}$$

Если еще предположить, что функция g непрерывна и возрастает на $[A,+\infty)$ и обратная функция g^{-1} также сохраняет асимптотику, то из соотношения (5) получим $f_n\sim\ g^{-1}(n)$ при $n\to+\infty$.

Ниже в Лемме 1 мы покажем, что если последовательность $\{f_n\}$ и функция g не убывают, то условие (5) необходимо (но не достаточно!) для того, чтобы для любой неубывающей последовательности $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющей оценке (1), была верна и оценка (2).

Цель настоящей заметки – найти необходимое и достаточное условие на функцию g или последовательность $\{f_n\}$, при котором для любой неубывающей последовательности $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющей одной из формул (1) или (2), верна другая.

Прежде чем приступить к формулировке результатов, отметим, что класс функций, сохраняющих асимптотическую эквивалентность (4), хорошо известен. Для дальнейшего нам удобнее привести полную формулировку критерия.

Теорема BKS (V. V. Buldygin, O. I. Klesov, J. G. Steinebach [8])**.** *Пусть функция g измерима на $[A,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*

1) *Функция g сохраняет асимптотическую эквивалентность последовательностей.*
2) *Функция g сохраняет асимптотическую эквивалентность непрерывных функций, то есть $g(u(t))\sim g(v(t))$, $t\to+\infty$, для любых функций u,v, непрерывных на некотором интервале $(B,+\infty)$, асимптотически эквивалентных на $+\infty$ и удовлетворяющих условию*
$$\lim_{t\to+\infty} u(t)=\lim_{t\to+\infty} v(t)=+\infty.$$
3) *Функция g удовлетворяет условию*
$$\lim_{\delta\to1+0}\limsup_{x\to+\infty}\frac{g(\delta x)}{g(x)}=1. \tag{6}$$

Из этой теоремы следует, что если функция g непрерывна на $[A,+\infty)$, возрастает и неограничена, $f_n=g^{-1}(n)$, то для того, чтобы всякая возрастающая последовательность $\{\lambda_n\}$ с асимптотикой (1) удовлетворяла и (2), достаточно выполнения условия (6). Действительно, при сделанных предположениях
$$N(\lambda)=n,\qquad g(\lambda_n)<g(\lambda)<g(\lambda_{n+1})\quad\text{на}\quad(\lambda_n,\lambda_{n+1}]$$
и $g(\lambda_n)\sim n$, $n\to+\infty$ в силу (1) и п. 1) теоремы. Отсюда вытекает (2).

Замечание 1. *Функции, удовлетворяющие условию* (6)*, называют PRV-функциями (pseudo-regularly varying). В связи с многочисленными приложениями (в особенности, в теории вероятностей) PRV-функции изучены достаточно подробно (см. [9] и имеющиеся там ссылки). PRV-функции явились естественным обобщением RV-класса правильно меняющихся функций, введенных в 1930 году Караматой в его основополагающей работе [10]. Результаты Караматы (вместе с последующими расширениями и обобщениями) оказались исключительно плодотворными для различных областей математики (см. [11, 12]).*

2. Формулировка основных результатов

Всюду далее $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет означать произвольную вещественнозначную неубывающую последовательность, S^∞ – множество неубывающих неограниченных последовательностей, F^∞ – множество функций, которые на некотором интервале $(A,+\infty)$ (своем для каждой функции) принимают конечные значения, не убывают и неограничены.

Начнем с одного простого утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\{f_n\}\in S^\infty$, $g\in F^\infty$ таковы, что для любой последовательности $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющей* (1)*, верна и оценка* (2)*. Тогда имеет место* (5)*.*

Основной результат статьи – в следующих двух теоремах.

Теорема 1. *Пусть* $\{f_n\} \in S^\infty$, $g \in F^\infty$. *Тогда если выполнены условия* (5) *и* (6), *то для любой последовательности* $\{\lambda_n\}$, *удовлетворяющей* (1), *верна оценка* (2).

Обратно, если для любой последовательности $\{\lambda_n\}$, *удовлетворяющей* (1), *верна оценка* (2), *то* $\{f_n\}$ *и* g *удовлетворяют* (5) *и* (6).

В следующей теореме речь пойдет об условиях, при которых для любой последовательности из S^∞ верна импликация (2) $\Rightarrow$ (1). Но прежде мы должны гарантировать существование хотя бы одной последовательности из S^∞, удовлетворяющей (2) (в условиях теоремы 1 такой вопрос не возникает). Справедлива

Лемма 2. *Для того, чтобы существовала хотя бы одна последовательность* $\{\lambda_n\} \in S^\infty$, *удовлетворяющая* (2), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$g(\lambda - 0) \sim g(\lambda), \qquad \lambda \to +\infty. \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть* $\{f_n\} \in S^\infty$ *и* g *функция из класса* F^∞, *удовлетворяющая условию* (7). *Тогда если*

(i) $f_{[g(\lambda)]} \sim \lambda, \qquad \lambda \to +\infty,$

(ii) $\displaystyle\lim_{\delta\to 1+0} \limsup_{n\to+\infty} \frac{f_{[n(1+\delta)]}}{f_n} = 1,$

то для любой последовательности $\{\lambda_n\}$, *удовлетворяющей* (2), *верна оценка* (1).

Обратно, если для любой последовательности $\{\lambda_n\}$, *удовлетворяющей* (2), *верна оценка* (1), *то* $\{f_n\}$ *и* g *удовлетворяют условиям* (i) *и* (ii).

3. Доказательства утверждений п. 2

3.1. Доказательство леммы 1. Так как $\{f_n\}$ не убывает, то существуют последовательность номеров $\{n_k\}$ и возрастающая последовательность $\{\nu_k\}$, такие, что

$$f_i = \nu_k, \qquad i = \overline{n_{k-1}+1, n_k}.$$

Положим $\lambda_i = f_i$, $i \in \mathbb{N}$. Имеем $N(\lambda) = n_{k-1}$ при $\lambda \in (\nu_{k-1}, \nu_k]$. Согласно (2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что

$$n_{k-1}(1-\varepsilon) < g(\lambda) < n_{k-1}(1+\varepsilon), \qquad \lambda \in (\nu_{k-1}, \nu_k], \quad k \geqslant K_\varepsilon.$$

Отсюда, поскольку $g(f_i) = g(\nu_k)$ при $i = \overline{n_{k-1}+1, n_k}$, то

$$g(f_i) < i(1+\varepsilon), \qquad i = \overline{n_{k-1}+1, n_k}. \tag{8}$$

Теперь возьмем другую последовательность, удовлетворяющую (1): $\lambda_i = f_{i-1}$. Тогда $N(\lambda) = n_k$ при $\lambda \in (\nu_{k-1}, \nu_k]$, откуда в силу (2) при каждом $\varepsilon > 0$ найдется номер $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такой, что

$$n_k(1-\varepsilon) < g(\lambda) < n_k(1+\varepsilon), \qquad \lambda \in (\nu_{k-1}, \nu_k], \quad k \geqslant K_\varepsilon.$$

Отсюда, поскольку

$$f_i = \nu_k, \qquad i = \overline{n_{k-1}+1, n_k},$$

то

$$g(f_i) > n_k(1-\varepsilon) \quad \text{для всех} \quad i = \overline{n_{k-1}+1, n_k}, \quad k \geqslant K_\varepsilon,$$

что вместе с (8) дает (5). Лемма доказана.

3.2. Доказательство теоремы 1. *Достаточность* (5) *и* (6). Пусть выполнены (5) и (6) и $\{\lambda_n\}$ – неубывающая последовательность, имеющая асимптотику (1). Согласно теореме BKS $g(\lambda_n) \sim g(f_n), \quad n \to \infty$, откуда в силу (5)

$$g(\lambda_n) \sim n, \qquad n \to \infty. \tag{9}$$

Пусть $\{n_k\}$ и $\{\mu_k\}$ – возрастающие последовательности, такие, что $\lambda_i = \mu_k$, $k = \overline{n_{k-1}+1, n_k}$, $n_0 = 0$. Тогда $N(\lambda) = n_k$ при $\lambda \in (\mu_k, \mu_{k+1}]$. Далее, из (9) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что при всех $k \geqslant K_\varepsilon$

$$n_k(1-\varepsilon) \leqslant g(\mu_k), \qquad g(\mu_{k+1}) \leqslant (n_k+1)(1+\varepsilon).$$

Отсюда для всех $\lambda \in (\mu_k, \mu_{k+1}]$ имеем

$$n_k(1-\varepsilon) \leqslant g(\lambda) \leqslant (n_k+1)(1+\varepsilon),$$

поэтому

$$1-\varepsilon \leqslant \frac{g(\lambda)}{N(\lambda)} \leqslant \left(1+\frac{1}{n_k}\right)(1+\varepsilon), \qquad \lambda > \mu_k,\ k \geqslant K_\varepsilon,$$

что доказывает (2).

Необходимость. Пусть для любой последовательности $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющей (1), верно (2). Тогда условие (5) следует из леммы 1.

Докажем (6). Предположим противное и построим неубывающую последовательность $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющую (1), но не удовлетворяющую (2).

По теореме BKS существуют две стремящиеся к $+\infty$ асимптотически эквивалентные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, для которых выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{g(y_n)}{g(x_n)} > 1 \qquad \text{или} \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{g(y_n)}{g(x_n)} < 1.$$

Пусть выполнено первое неравенство (случай, когда выполнено второе неравенство, рассматривается аналогично). Тогда найдутся последовательность $\{n_i\}$, $\alpha > 0$ и $I_1 \in \mathbb{N}$, такие, что

$$g(y_{n_i}) > (1+\alpha) g\left(x_{n_i}\right), \qquad i > I_1. \tag{10}$$

Пусть $y_{n_i} = x_{n_i}(1+\varepsilon_i)$. Имеем $\varepsilon_i \to +0,\ i \to \infty$. Далее пусть

$$\sigma_i = \max_{k\geqslant i}\{\varepsilon_k\}, \qquad m_i = \min\{k:\ f_k \geqslant x_{n_i}\}.$$

Тогда

$$f_{m_i-1} < x_{n_i} \leqslant f_{m_i} \tag{11}$$

и согласно (5),

$$g\left(x_{n_i}\right) \sim m_i, \qquad i \to \infty. \tag{12}$$

Положим

$$\lambda_{m_i} = f_{m_i}(1+\sigma_i). \tag{13}$$

Можно считать, что последовательность λ_{m_i} возрастает (при необходимости перейдем к подпоследовательности).

Согласно (12) найдется $I_2 \in \mathbb{N}$, что

$$g\left(x_{n_i}\right) > \frac{m_i\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\alpha}, \qquad i \geqslant I_2.$$

Тогда поскольку $g\left(x_{n_i}(1+\sigma_i)\right) \geqslant g\left(y_{n_i}\right)$, то в силу (10) и (11) будем иметь

$$g\left(\lambda_{m_i}\right) \geqslant \left(1+\frac{\alpha}{2}\right) m_i, \qquad i \geqslant I_3, \tag{14}$$

где $I_3 = \max\{I_1, I_2\}$.

Доопределим λ_k при остальных k. Пусть $m_{i+1} > m_i + 1$. Положим

$$d_i = \max\left\{k \in [m_i, m_{i+1}) : \qquad f_k < \frac{f_{m_i}(1+\sigma_i)}{1+\sigma_{i+1}}\right\}.$$

Ясно, что $m_i \leqslant d_i < m_{i+1}$. Положим

$$\lambda_k = \begin{cases} f_{m_i}(1+\sigma_i), & m_i \leqslant k \leqslant d_i, \\ f_k(1+\sigma_{i+1}), & d_i + 1 \leqslant k \leqslant m_{i+1}. \end{cases}$$

Тогда

$$\lambda_k \sim f_k,\ d_i + 1 \leqslant k \leqslant m_{i+1}, \qquad i \to \infty. \tag{15}$$

Докажем, что оценка (15) верна и при $m_i \leqslant k \leqslant d_i,\ i \to \infty$. При указанных k

$$\lambda_k = f_{m_i}\left(1+\sigma_i\right) \leqslant f_k\left(1+\sigma_i\right). \tag{16}$$

Если $k \leqslant d_i$, то

$$f_k < \frac{\lambda_k}{(1+\sigma_{i+1})},$$

откуда

$$\lambda_k > f_k\left(1+\sigma_{i+1}\right). \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует (15) при $m_i \leqslant k \leqslant d_i$, $i \to \infty$.

Таким образом, мы построили последовательность $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющую (1). Покажем, что оценка (2) для нее неверна.

Из определения $N(\lambda)$ следует, что $N\left(\lambda_{m_i}\right) \leqslant m_i - 1$, поэтому из (14) имеем

$$g\left(\lambda_{m_i}\right) > \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) N\left(\lambda_{m_i}\right).$$

Отсюда следует, что последовательность $\{\lambda_k\}$ не удовлетворяет (2). Теорема доказана.

3.3. Доказательство леммы 2. *Достаточность* (7). Положим

$$s_i = \sup\{\lambda : \quad g(\lambda) < i\}. \tag{18}$$

Поскольку $g \in F^\infty$, то $\{s_n\} \in S^\infty$. Кроме того, если $s_i < s_{i+1}$, то

$$i \leqslant g(\lambda) < i + 1 \qquad \text{при всех} \qquad \lambda \in \left(s_i, s_{i+1}\right). \tag{19}$$

Пусть $\{n_k\}$ и $\{\mu_k\}$ – возрастающие последовательности, такие, что

$$s_i = \mu_k, \qquad i = \overline{n_{k-1}, n_k - 1}. \tag{20}$$

Из (19) при $i = n_k - 1$ имеем

$$n_k - 1 \leqslant g(\lambda) < n_k, \qquad \lambda \in \left(\mu_k, \mu_{k+1}\right). \tag{21}$$

Далее, снова используя (19) (при $i = n_k$), получим

$$g(\mu_{k+1}) < n_k + 1. \tag{22}$$

Тогда, поскольку

$$N_s(\lambda) := \max\{i : \ s_i < \lambda\} = n_k - 1, \qquad \lambda \in \left(\mu_k, \mu_{k+1}\right], \tag{23}$$

то

$$1 \leqslant \frac{g(\lambda)}{N_s(\lambda)} < 1 + \frac{1}{n_k - 1}, \qquad \lambda \in \left(\mu_k, \mu_{k+1}\right). \tag{24}$$

Из (21) имеем $g\left(\mu_{k+1} - 0\right) \leqslant n_k$. Отсюда согласно (7)

$$g\left(\mu_{k+1}\right) \leqslant n_k\left(1 + \alpha_k\right), \qquad \alpha_k \to +0, \quad k \to \infty.$$

Следовательно,

$$1 < \frac{g\left(\mu_{k+1}\right)}{N_s\left(\mu_{k+1}\right)} \leqslant 1 + \frac{1 + \alpha_k}{n_k - 1}.$$

Отсюда и из (24) заключаем, что последовательность $\{s_n\}$ удовлетворяет (2).

Необходимость. Предположим противное: пусть при некотором $\delta > 0$ для некоторой возрастающей последовательности $\{\lambda_n\} \in S^\infty$ выполнены неравенства

$$g(\lambda_n - 0) < (1-\delta)g(\lambda_n). \tag{25}$$

Поскольку функция $N(\lambda)$ непрерывна слева, то для каждого n найдется точка $\mu_n < \lambda_n$, такая, что

$$N(\mu_n) > N(\lambda_n) - \frac{1}{n}. \tag{26}$$

С другой стороны, в силу (2)

$$N(\mu_n) = g(\mu_n)(1+o(1)), \qquad n \to \infty. \tag{27}$$

Объединяя теперь оценки (25)–(27), получим

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{N(\lambda_n)}{g(\lambda_n)} \leqslant 1 - \delta$$

в противоречии с (2). Лемма доказана.

3.4. Доказательство теоремы 2. *Достаточность (i) и (ii).* Пусть выполнены условия (i) и (ii), то есть для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся $\Lambda_1(\varepsilon) > 0$, $\delta(\varepsilon) > 0$ и $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие условиям

$$(1-\varepsilon)f_{[g(\lambda)]} < \lambda < f_{[g(\lambda)]}(1+\varepsilon), \qquad \lambda > \Lambda_1(\varepsilon), \tag{28}$$

$$f_{[n(1+\delta)]} < (1+\varepsilon)f_n, \qquad 0 < \delta < \delta(\varepsilon), \qquad n \geqslant n(\varepsilon). \tag{29}$$

Далее пусть $\{\lambda_n\}$ – произвольная неубывающая последовательность, для которой выполнено условие (2), то есть для любого $\sigma > 0$ найдется $\Lambda_2(\sigma) > 0$, что

$$g(\lambda)(1-\sigma) < N(\lambda) < g(\lambda)(1+\sigma) \qquad \text{для всех} \quad \lambda > \Lambda_2(\sigma). \tag{30}$$

Пусть $\{n_k\}$ и $\{\mu_k\}$ – возрастающие последовательности, определенные по формуле (20), такие, что $\lambda_i = \mu_k$, $i = \overline{n_{k-1}, n_k}$, $n_0 = 0$. Тогда $N(\lambda) = n_k$, $\lambda \in (\mu_k, \mu_{k+1}]$, $k \in \mathbb{N}$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем какое-либо $\delta_\varepsilon \in (0, \delta(\varepsilon))$, где $\delta(\varepsilon)$ определяется (29), и положим

$$\Lambda_3(\varepsilon) = \max\{\Lambda_1(\varepsilon), \Lambda_2(\sigma_\varepsilon)\}, \qquad \sigma_\varepsilon = \frac{\delta_\varepsilon}{1+\delta_\varepsilon}.$$

Далее пусть $n(\varepsilon)$ удовлетворяет (29) и $K_1(\varepsilon), K_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ таковы, что

$$\begin{aligned} \mu_k &> \Lambda_3(\varepsilon), \qquad k \geqslant K_1(\varepsilon), \\ n_k &> \max\left\{ n(\varepsilon)\,(1+\delta_\varepsilon)\,, \frac{(1+\delta_\varepsilon)^2}{\delta_\varepsilon^2} \right\}, \qquad k \geqslant K_2(\varepsilon). \end{aligned}$$

Положим $K(\varepsilon) = \max\{K_1(\varepsilon), K_2(\varepsilon)\}$ и покажем, что при всех $k \geqslant K(\varepsilon)$

$$f_{n_k}(1-2\varepsilon) \leqslant \mu_{k+1} < f_{n_k}(1+\varepsilon)^2. \tag{31}$$

Пусть $k \geqslant K(\varepsilon)$. Взяв $\lambda = \mu_{k+1}$ в (30), с учетом (23) имеем $g\,(\mu_{k+1}) < n_k\,(1+\delta_\varepsilon)$, откуда согласно (28) и (29)

$$\mu_{k+1} < f_{[n_k(1+\delta_\varepsilon)]}(1+\varepsilon) < f_{n_k}(1+\varepsilon)^2.$$

Докажем первое из неравенств (31). Пусть $\lambda \in (\mu_{k+1}, \mu_{k+2}]$. Тогда $\lambda > \Lambda_1(\varepsilon)$, потому в соответствии с (28)

$$\lambda > (1-\varepsilon)f_{[g(\lambda)]}. \tag{32}$$

С другой стороны, поскольку

$$\lambda > \Lambda_2(\sigma_\varepsilon), \qquad \frac{1}{1+\sigma_\varepsilon} > \frac{1}{1+\delta_\varepsilon},$$

то в силу (30) и (23) выполнено

$$g(\lambda) > \frac{n_{k+1}-1}{1+\sigma_\varepsilon} \geqslant \frac{n_k}{1+\sigma_\varepsilon},$$

и следовательно,

$$[g(\lambda)] > \frac{n_k}{1+\sigma_\varepsilon} - 1.$$

Далее,

$$\frac{n_k}{1+\sigma_\varepsilon} = \frac{n_k}{1+\delta_\varepsilon}\left(1+\frac{\delta_\varepsilon^2}{1+2\delta_\varepsilon}\right) > \frac{n_k}{1+\delta_\varepsilon}\left(1+\frac{\delta_\varepsilon^2}{(1+\delta_\varepsilon)^2}\right),$$

откуда, учитывая, что $k \geqslant K_2(\varepsilon)$ и потому $n_k > \dfrac{(1+\delta_\varepsilon)^3}{\delta_\varepsilon^2}$, получим

$$[g(\lambda)] > \frac{n_k}{1+\delta_\varepsilon}. \tag{33}$$

Отсюда, снова используя определение $K_2(\varepsilon)$, заключаем, что $[g(\lambda)] > n(\varepsilon)$, следовательно, мы можем воспользоваться (29) при $n = [g(\lambda)]$. Учитывая при этом (33), получим

$$f_{[g(\lambda)]} > \frac{f_{n_k}}{1+\varepsilon}.$$

Отсюда и из неравенств (32) и

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} > 1-2\varepsilon$$

заключаем, что

$$\lambda > (1-2\varepsilon) f_{n_k} \quad \text{для всех} \lambda \in (\mu_{k+1}, \mu_{k+2}].$$

Тем самым первое из неравенств (31) доказано.

Необходимость. Докажем (i). Поскольку последовательность $\{s_n\}$, построенная при доказательстве леммы 2, удовлетворяет оценке (2), то для нее верна и оценка (1):

$$f_n = s_n(1+\sigma_n), \qquad \text{где } \sigma_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Согласно (21) $[g(\lambda)] = n_k - 1$ при всех $\lambda \in (\mu_k, \mu_{k+1})$. Так как $s_{n_k-1} = \mu_k$, то

$$f_{[g(\lambda)]} = \mu_k\left(1+\beta_k\right), \qquad \lambda \in (\mu_k, \mu_{k+1}),$$

где $\beta_k = \sigma_{n_k-1} \to 0,\ k \to \infty$. Отсюда

$$\frac{f_{[g(\lambda)]}}{\lambda} < 1+\beta_k, \qquad \lambda \in (\mu_k, \mu_{k+1}). \tag{34}$$

Далее, из (22) $[g(\mu_{k+1})] \leqslant n_k$, так что

$$f_{[g(\mu_{k+1})]} \leqslant f_{n_k} = s_{n_k}\left(1+\sigma_{n_k}\right).$$

Согласно (23) $s_{n_k} = \mu_{k+1}$, поэтому последнее неравенство в месте с (34) дает

$$\frac{f_{[g(\lambda)]}}{\lambda} \leqslant 1+\gamma_k, \qquad \lambda \in (\mu_k, \mu_{k+1}], \tag{35}$$

где $\gamma_k \to 0,\ k \to \infty$.

Докажем теперь, что

$$\frac{f_{[g(\lambda)]}}{\lambda} \geqslant 1+\delta_k, \qquad \lambda \in (\mu_k, \mu_{k+1}], \tag{36}$$

где $\delta_k \to 0,\ k \to \infty$.

Введем последовательность

$$\nu_i = \sup\{\lambda:\ g(\lambda) < i+1\}, \qquad N_\nu(\lambda) = \sum_{\nu_i < \lambda} 1.$$

Поскольку $\nu_i = s_{i+1}$, где $\{s_i\}$ определена по (18), то $N_\nu(\lambda) = N_s(\lambda) - 1$, поэтому $N_\nu(\lambda) \sim g(\lambda)$, $\lambda \to +\infty$. Следовательно, для последовательности $\{\nu_i\}$ также верна оценка (1), то есть

$$f_n = \nu_n \left(1 + \varepsilon_n\right), \qquad \varepsilon_n \to 0,\ n \to \infty. \tag{37}$$

Далее, согласно (23), $\nu_i = \mu_k$, $i = \overline{n_{k-1} - 1, n_k - 2}$, где $\{\mu_k\}$ и $\{n_k\}$, те же, что в (20). Отсюда, поскольку $\nu_{n_k - 1} = \mu_{k+1}$, то, учитывая (21) и (37), при всех $\lambda \in (\mu_k, \mu_{k+1})$ будем иметь

$$f_{[g(\lambda)]} = f_{n_k - 1} = \mu_{k+1} \left(1 + \delta_k\right) > \lambda \left(1 + \delta_k\right),$$

где $\delta_k = \varepsilon_{n_k - 1} \to 0,\ k \to \infty$. Отсюда следует (36) при $\lambda \in (\mu_k, \mu_{k+1})$.

Для доказательства (36) при $\lambda = \mu_{k+1}$ заметим, что в силу первого из неравенств (21) $g(\mu_{k+1}) \geqslant n_k - 1$, следовательно,

$$f_{[g(\mu_{k+1})]} \geqslant f_{n_k - 1} = \mu_{k+1}(1 + \delta_k).$$

Из (35) и (36) следует (i).

Докажем (ii). Допустим противное и построим последовательность, удовлетворяющую (2) и не удовлетворяющую (1).

Итак, пусть существуют две растущие последовательности натуральных чисел $\{\nu_k\}$ и $\{m_k\}$ и некоторое положительное число α, такие, что

$$\nu_k = m_k \left(1 + \delta_k\right), \qquad \delta_k \to +0, \quad k \to +\infty, \tag{38}$$

$$f_{\nu_k} = (1 + \alpha) f_{m_k}. \tag{39}$$

Переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что при каждом k

$$g\left(s_{m_{k+1}}\right) > g\left(s_{\nu_k}\right),$$

где s_i определены по формуле (18).

Введем последовательность $\{p_i\}:\ p_i = 0$ при $1 \leqslant i < m_1$ и

$$p_i = \begin{cases} s_{\nu_k}, & m_k \leqslant i < \nu_k, \\ s_i, & \nu_k \leqslant i < m_{k+1}, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \dots \tag{40}$$

В силу утверждения (i)

$$f_{[g(\lambda)]} = \lambda(1 + \delta(\lambda)), \qquad \delta(\lambda) \to 0, \quad \lambda \to +\infty,$$

и согласно (19) при всяком $\varepsilon > 0$ верно $g\left(s_{\nu_k} + \varepsilon\right) \geqslant \nu_k$, так что

$$f_{\nu_k} \leqslant f_{[g(s_{\nu_k} + \varepsilon)]} = \left(s_{\nu_k} + \varepsilon\right)\left(1 + \delta(s_{\nu_k} + \varepsilon)\right) = \lambda_{m_k}\left(1 + o(1)\right), \qquad k \to +\infty,$$

откуда, учитывая (39), при некотором достаточно большом K_0 будем иметь

$$p_{m_k} \geqslant \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) f_{m_k}, \qquad k \geqslant K_0.$$

Отсюда следует оценка (1) для последовательности $\{p_i\}$.

Докажем, что функция $N_p(\lambda) = \max\{i :\ p_i < \lambda\}$ удовлетворяет (2). Поскольку при каждом $k \in \mathbb{N}$ согласно (40) $N_p(\lambda) = N_s(\lambda)$ на $(s_{\nu_k}, s_{m_k}]$ и, как было показано при доказательстве леммы 2, функция $N_s(\cdot)$ удовлетворяет оценке (2), то достаточно проверить, что при $k \to +\infty$

$$N_p(\lambda) \sim g(\lambda), \qquad \lambda \in \left(s_{m_k}, s_{\nu_k}\right]. \tag{41}$$

Из определения $\{p_i\}$ имеем

$$N_p(\lambda) = \nu_k \qquad \text{при} \quad \lambda \in \left(s_{m_k}, s_{\nu_k}\right]. \tag{42}$$

С другой стороны, согласно (19) при всех $\lambda \in \left(s_{m_k}, s_{\nu_k}\right)$

$$m_k \leqslant g(\lambda) < \nu_k, \tag{43}$$

откуда, учитывая (38), заключаем

$$1 < \frac{N_p(\lambda)}{g(\lambda)} < 1 + \delta_k, \qquad \lambda \in (s_{m_k}, s_{\nu_k}), \tag{44}$$

где $\delta_k \to +0$, $k \to +\infty$.

Далее, поскольку в силу (43) выполнено

$$m_k \leqslant g(s_{\nu_k} - 0) \leqslant \nu_k,$$

то, воспользовавшись условием (18), будем иметь

$$m_k \leqslant g(s_{\nu_k}) \leqslant \nu_k (1 + \alpha_k), \qquad \alpha_k \to +0, \quad k \to +\infty,$$

что вместе с (42) дает

$$\frac{1}{1+\alpha_k} \leqslant \frac{N_p(\lambda)}{g(\lambda)} \leqslant 1 + \delta_k.$$

Отсюда и из оценки (44) получаем (41). Теорема доказана.

4. Пример. Оператор Штурма–Лиувилля на кривой

Пусть γ – кривая с параметризацией

$$z = \gamma(x) = \int_0^x \rho(t) e^{i\alpha(t)} dt, \quad x \in [0,1], \qquad \int_0^1 \rho(t) e^{i\alpha(t)} dt = 1,$$

функции r и α кусочно непрерывны, $\rho \geqslant \rho_0$ ($\rho_0 = \mathrm{const} > 0$), α не убывает, и числа $\alpha_0 = \alpha(0)$, $\alpha_1 = \alpha(1)$ удовлетворяют неравенствам

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < 0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}.$$

Пусть $AC(\gamma)$ и $L^p(\gamma)$ – множество функций, соответственно абсолютно непрерывных и суммируемых с p-й степенью (относительно дуговой меры $|dz|$ на γ). Далее пусть $q \in L^1(\gamma)$. Обозначим через L оператор с областью определения

$$D(L) = \left\{ y \in L^2(\gamma) : \ y' \in AC(\gamma), \ -y'' + qy \in L^2(\gamma), \ y(0) = y(1) = 0 \right\}$$

и действующий в гильбертовом пространстве $L^2(\gamma)$ по правилу

$$Ly = -y'' + qy.$$

Точно так же, как в случае $\gamma = [0,1]$ [13, § 17], доказывается, что L — замкнутый оператор с плотной областью определения. Известно [28, Лемма 2], что спектр оператора L дискретен и за исключением конечного числа лежит в угле $\{\mu \in \mathbb{C} : -2\alpha_1 \leqslant \arg \lambda \leqslant -2\alpha_0\}$. Обозначим через $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^\infty$, $-\frac{\pi}{2} < \arg(\lambda_k) \leqslant \frac{\pi}{2}$, собственные числа L, пронумерованные в порядке возрастания их модулей с учетом алгебраических кратностей. Тогда λ_k – нули функции $\Phi(\lambda) = \varphi(1, \lambda)$, где $\varphi(z, \lambda)$ — решение уравнения

$$-y'' + qy = \lambda^2 y, \tag{45}$$

удовлетворяющее условиям $\varphi(0, \lambda) = 0$, $\varphi'(0, \lambda) = 1$. Отсюда следует, что если Ω – область, ограниченная кривой γ и отрезком $[0,1]$, $q(z) = Q(z)$, $z \in \gamma$, где Q – функция, голоморфная в области Ω и непрерывная на ее замыкании, то спектр оператора L имеет асимптотику

$$\lambda_k \sim \pi k, \qquad k \to \infty. \tag{46}$$

На самом деле для выполнения оценки (46) достаточно, чтобы существовала функция $p \in L^1(0,1)$, такая, что функция

$$\widetilde{q}(z) = \begin{cases} q(z), & z \in \gamma, \\ p(z), & z \in (0,1), \end{cases}$$

удовлетворяет условию тривиальной монодромии на замкнутой кривой $\Gamma = \gamma \cup [0,1]$: любое решение уравнения (45) при всех значениях параметра λ однозначно на Γ. Как показано в [29], условие тривиальной монодромии на Γ равносильно тому, что $q = Q$ п.в. на Γ, где Q – функция, мероморфная в области Ω с конечным числом полюсов $z_1, \dots, z_n$, таких, что выполнено:

A)$_n$ При некоторых $m_i \in \mathbb{N}$, $\delta_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ верно равенство

$$Q(z) = \frac{m_i(m_i-1)}{(z-z_i)^2} + \sum_{k=0}^{m_i-1} c_k (z-z_i)^{2k} + O\left((z-z_i)^{2m_i-1}\right), \qquad |z-z_i| < \delta_i, \tag{47}$$

B)$_n$ Функция

$$\widetilde{Q}(z) = Q(z) - \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(m_i-1)}{(z-z_i)^2} \tag{48}$$

принадлежит пространству Смирнова $E_1(\Omega)$ [30, Гл. III, § 7].

Цель этого пункта – с помощью теоремы 2 доказать, что оценка (46) верна и в случае, когда функция Q имеет в Ω бесконечное число полюсов $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$, которые могут скапливаться только к отрезку $[0,1]$ и, помимо естественных условий вида (47) и b), удовлетворяют некоторому дополнительному требованию относительно поведения около точек 0 и 1.

Теорема 3. *Пусть $q = Q$ п.в. на Γ, где Q – функция, мероморфная в области Ω с полюсами $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющими условиям*

A)$_\infty$ *Существуют последовательности $\{m_i\}$, $\{\delta_i\}$, $m_i \in \mathbb{N}$, $\delta_i > 0$ ($i \in \mathbb{N}$, такие, что при каждом i справедлива оценка* (47)*;*

B)$_\infty$ *Для каждой кусочно-гладкой кривой γ_n, не содержащей полюсов Q и охватывающей первые из них, функция* (48) *принадлежит $E_1(\Omega_n)$, где Ω_n – область, ограниченная γ_n;*

C)$_\infty$ *Если*

$$z_k = |z_k| e^{i\beta_{0k}} = 1 + |z_k - 1| e^{i\beta_{1k}}, \quad \text{где} \quad -\frac{\pi}{2} < \beta_{0k} < 0, \qquad -\pi < \beta_{0k} < -\frac{\pi}{2},$$

то $\beta_{0k} \to 0$, $\beta_{1k} \to -\pi$, $k \to \infty$.

Тогда для собственных чисел оператора L справедлива оценка (46).

Доказательство. Обозначим через $n(r,\zeta,\theta)$ число λ_k в секторе $\{\lambda : |\lambda| < r, \zeta < \arg \mu \leqslant \theta\}$. Согласно теореме 3 из [23] при выполнении условий A)$_\infty$ и B)$_\infty$ функция

$$\Delta(\theta) = \lim_{r \to +\infty} \frac{n(r, -\pi/2, \theta)}{r},$$

имеет вид

$$\Delta(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right), \\ \dfrac{1}{\pi}, & \theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases} \tag{49}$$

Далее, в силу условия C)$_\infty$ существует последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ и ломаная γ_n с вершинами в точках 0, $\frac{1}{2(1-i\operatorname{tg}\varepsilon_n)}$ и 1 не содержит полюсов функции Q, и число полюсов Q ниже γ_n конечно. Отсюда согласно теореме 1 из [29] следует, спектр оператора L совпадает со спектром оператора L_n, полученного из L заменой γ на γ_n. Но (см. [28, Лемма 2]) спектр L_n за исключением конечного числа лежит в угле $|\arg z| < 2\varepsilon_n$. Далее, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1 из [20], построим непрерывную на $[0;\infty)$ функцию σ, удовлетворяющую условиям:

a) $\sigma(x) \to 0$, $x \to \infty$,

б) область
$$D_\sigma = \{\lambda = x + iy: \ x > 0, \ |y| \leqslant x\sigma(x)\}$$
содержит все λ_k.

Следовательно, $\arg \lambda_k \to 0$, $k \to \infty$. Поэтому для доказательства оценки (46) достаточно убедиться, что
$$r_k := |\lambda_k| \sim \pi k, \qquad k \to \infty. \tag{50}$$
Пусть $N(r) = \sum\limits_{r_k < r} 1$. Имеем $N(r) = n\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, откуда согласно (49) вытекает, что
$$N(r) \sim \frac{r}{\pi}, \qquad r \to +\infty.$$
Применяя теорему 2 к последовательности $\{r_k\}$ при $g(r) = \frac{\pi}{r}$ и $f_k = \pi k$, получим (50).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розенблюм Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А. *Спектральная теория дифференциальных операторов. Уравнения в частных производных - 7.* Итоги науки и техники. Сер. соврем. пробл. Мат. Фунд. напр. **64**, М.: ВИНИТИ. 5–242 (1989).
2. Марченко В. А. *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения.* Киев: Наукова думка. 1977.
3. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики.* **4**. М.: Мир. 1982.
4. Хёрмандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Псевдодифференциальные операторы.* **3**. М.: Мир. 1987.
5. Васильев Д. Г. *Асимптотика спектра краевой задачи* // Тр. ММО. **49**, 167–237 (1986).
6. H. Weyl *Das Asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen* // Mathematische Annalen. **71**:4, 441–479 (1912).
7. Кас M. *Can One Hear the Shape of a Drum?* // The American Mathematical Monthly. **73**:4, 1–23 (1966).
8. V. V. Buldygin, O. I. Klesov, J. G. Steinebach *Properties of a Subclass of Avakumovic Functions and Their Generalized Inverses* // Ukr. Math. Jour. **54**:2 179–206 (2002).
9. V. V. Buldygin, O. I. Klesov, J. G. Steinebach *On some extensions of Karamata's theory and their applications* // Publ. Inst. Math. Nouv. Ser. **80(94)**, 59–96 (2006) .
10. J. Karamata *Sur un mode de croissance régulière des fonctions* // Mathematica (Cluj). **4**, 33–53 (1930).
11. Сенета Е. *Правильно меняющиеся функции.* М.: Наука. 1985.
12. N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels *Regular Variation. Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* **27**, Cambridge: Cambridge University Press. 1987.
13. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука. 1969.
14. Келдыш М. В. *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений* // ДАН СССР. **77**:1, 11–14 (1951).
15. Шкаликов А. А. *Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром* // УМН. **71(431)**:5, 113–174 (2016).
16. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы.* **2**. *Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве.* М.: Мир. 1966.
17. Маркус А. С., Мацаев В. И. *Теоремы сравнения спектров линейных операторов и спектральные асимптотики.* Тр. ММО. **45**. 133–181 (1982).
18. Davies E. B. *Non-self-adjoint differential operators* // Bull. London Math. Soc. **34**:5, 513–532 (2002).
19. Ишкин Х. К. *О критерии локализации собственных чисел спектрально неустойчивого оператора* // Докл. АН. **429**:3, 301–304 (2009).
20. Ишкин Х. К. *О спектральной неустойчивости оператора Штурма–Лиувилля с комплексным потенциалом* // Дифф. уравнения. **45**:4, 480–495 (2009).
21. Ишкин Х. К. *Об условиях локализации предельного спектра модельного оператора, связанного с уравнением Орра–Зоммерфельда* // Докл. АН. **445**:5, 506–509 (2012).

22. Ишкин Х. К. *Об аналитических свойствах функции Вейля оператора Штурма – Лиувилля с комплексным убывающим потенциалом* // Уфимский матем. журнал. **5**:1, 36–55 (2013).
23. Ишкин Х. К. *Критерий локализации спектра оператора Штурма–Лиувилля на кривой* // Алгебра и анализ. **28**:1, 52–88 (2016).
24. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.* М.: Наука. 1965.
25. Мацаев В. И., Палант Ю. А. *О распределении спектра полиномиального операторного пучка* // ДАН Арм. ССР. **17**:5, 257–261 (1966).
26. V. V. Buldygin, O. I. Klesov, J. G. Steinebach *Some properties of asymptotic quasi-inverse functions and their applications I* // Theor. Probability and Math. Statist. **70**, 11–28 (2005).
27. Ишкин Х. К. *Условия локализации спектра операторов, не близких к самосопряженным* // Докл. АН. **479**:5, 497–500 (2018).
28. Ишкин Х. К. *О необходимых условиях локализации спектра задачи Штурма–Лиувилля на кривой* // Мат. Заметки. **78**:1, 72–84 (2005).
29. Ишкин Х. К. *О критерии безмонодромности уравнения Штурма–Лиувилля* // Мат. заметки. **94**:4, 552–568 (2013).
30. Привалов И. И. *Граничные свойства аналитических функций.* М.–Л.: ГИТТЛ. 1950.

Хабир Кабирович Ишкин,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: Ishkin62@mail.ru

Рустем Ильдарович Марванов,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: rsmar1v@gmail.com