# О СОХРАНЕНИИ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ УПРАВЛЯЕМОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

**А.В. ЧЕРНОВ**

**Аннотация.** Для управляемого эволюционного операторного уравнения второго рода в банаховом пространстве, рассматриваемого на конечном отрезке времени, получены условия сохранения глобальной разрешимости при малых (относительно изменения правой части при фиксированном состоянии) вариациях управления. Дополнительно устанавливаются: оценка приращения глобального решения при варьировании управления и условия единственности решения при произвольно фиксированном управлении. Наиболее существенные отличия от прежних результатов по теме сохранения глобальной разрешимости управляемых распределенных систем состоят в следующем. Решение абстрактного уравнения, представляющего управляемую распределенную систему эволюционного типа, может рассматриваться в произвольном пространстве $W[0;T]$ функций времени со значениями в банаховом пространстве $X$, а не обязательно в пространстве непрерывных функций со значениями в $X$ и не обязательно в каком-либо лебеговом пространстве. Оценка приращения решения при варьировании управления также получается по норме пространства $W[0;T]$. Кроме того, допускается, что правые части уравнений с частными производными, относящихся к управляемой распределенной системе, могут содержать, помимо самой функции состояния, обобщенные производные этой функции. В качестве примеров применения абстрактных результатов исследуется сохранение глобальной разрешимости нелинейной системы уравнений Навье–Стокса, уравнения Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса, а также некоторых сильно нелинейных псевдопараболических уравнений.

**Ключевые слова:** нелинейное эволюционное операторное уравнение второго рода в банаховом пространстве, сохранение глобальной разрешимости, нелинейная система уравнений Навье–Стокса, уравнение Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса, сильно нелинейные псевдопараболические уравнения.

**Mathematics Subject Classification:** 47J05, 47J35, 47N10

## 1. Введение

Пусть $X$ — банахово пространство. Следуя [1, глава IV, § 1], будем использовать следующие обозначения банаховых пространств функций, определенных на отрезке числовой оси $[0;T]$, со значениями в пространстве $X$.

$\mathbb{C}^k\big([0;T];X\big)$ для $k = 0,1,\ldots$ — множество всех функций $\varphi : [0;T] \to X$, обладающих непрерывными производными до порядка $k$ включительно, наделенное нормой $\|\varphi\|_{\mathbb{C}^k\left([0;T];X\right)} = \sum_{j=0}^{k} \max_{t\in[0;T]} \big\|\varphi^{(j)}(t)\big\|_X$.

A.V. Chernov, On preservation of global solvability of controlled second kind operator equation.



*Поступила 27 августа 2019 г.*

$L_q\big([0;T];X\big)$ для $q\in[1;\infty)$ — множество всех измеримых по Бохнеру функций $\varphi:[0;T]\to X$, для которых конечно значение $\int\limits_0^T\big\|\varphi(t)\big\|_X^q\,dt$. Об измеримости по Бохнеру см., например, [1, глава IV, § 1]. Норма определяется следующим образом:

$$\|\varphi\|_{L_q\left([0;T];X\right)}=\left(\int\limits_0^T\big\|\varphi(t)\big\|_X^q\,dt\right)^{1/q}.$$

$L_\infty\big([0;T];X\big)$ — множество всех существенно ограниченных измеримых по Бохнеру функций $\varphi:[0;T]\to X$. Норма: $\|\varphi\|_{L_\infty\left([0;T];X\right)}=\operatorname*{vrai\,sup}\limits_{t\in[0;T]}\big\|\varphi(t)\big\|_X$.

Кроме того, примем следующее соглашение. В записи вида «$v\in V$ — объект» слово «объект» относится ко всякому элементу $v$ множества $V$.

В данной статье для рассматриваемого на конечном отрезке времени $[0;T]$ управляемого эволюционного операторного уравнения второго рода в банаховом пространстве $X$ вида

$$\varphi=\mathcal{F}\big[f[u](\varphi)\big],\quad \varphi\in W[0;T]\subset L_q\big([0;T];X\big),$$

$u$ — управление, получены условия *устойчивости существования глобальных решений* (УСГР), иначе говоря, сохранения однозначной глобальной разрешимости при малых (относительно изменения правой части при фиксированном состоянии) вариациях управления. В частности, если имеется операторное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве $X$ вида [1, глава V, §1], с фиксированной правой частью $f\in L_2\big([0;T];X\big)$, то в роли оператора $\mathcal{F}$ будет выступать отображение, которое правой части $f$ ставит в соответствие решение $\varphi$ данного уравнения (при фиксированной начальной функции). Если же рассматривается аналогичное операторное дифференциальное уравнение с правой частью, зависящей от фазовой переменной и управления, то его уже можно представить операторным уравнением изучаемого вида.

Проблема УСГР актуальна при выводе необходимых условий оптимальности в задачах оптимального управления, вычислении градиентов функционалов в таких задачах и обосновании соответствующих численных методов оптимизации. В случае отсутствия информации об УСГР при варьировании оптимального управления, в частности, при выводе необходимых условий оптимальности обычно переходят к рассмотрению пар «управление – состояние», см., например, [2], [3, глава 2]. В результате уравнение состояния приходится учитывать как дополнительное фазовое ограничение особого типа. А это приводит к определенным техническим сложностям. Укажем, например, метод адаптированного штрафа, предложенный в [2]. В [2] приведен ряд нерешенных задач, то есть управляемых распределенных систем, для которых не удалось вывести необходимые условия оптимальности с помощью метода адаптированного штрафа. Между тем, в [4, глава 5, §2, п.2], [5, глава 3, §1] представлены некоторые задачи из этого ряда, необходимые условия оптимальности в которых удалось вывести с помощью использования теории УСГР. Дело в том, что при наличии информации об УСГР можно использовать альтернативный подход, основанный на рассмотрении функционалов оптимизационной задачи как функций, зависящих только от управлений, опираясь (при исследовании различных вопросов) на соответствующие теоремы функционального анализа или их обобщения, см., например, [6, 7]. В частности, можно использовать технику параметризации управления для численной оптимизации управляемых распределенных систем, см. [7]. Таким образом, наличие УСГР открывает дополнительное окно возможностей при выводе необходимых условий оптимальности в задачах оптимального управления и их численном решении.

Отметим, что нарушение глобальной разрешимости эволюционной управляемой системы, связанной с дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнением, весьма вероятно, когда порядок роста правой части соответствующего уравнения по фазовой переменной превышает линейный — см. на этот счет показательные примеры в [6, 8], [9, введение, п.2]. При наличии нелинейности в дифференциальном операторе эта ситуация усугубляется, см., например, [10, 11].

При исследовании различных задач управления (помимо простого постулирования глобальной разрешимости управляемой системы для всех допустимых управлений) различными исследователями используются, как правило, некоторые общие (основанные на теоремах Минти–Браудера, Лакса–Мильграма, Шаудера и т.д., см., например, [12]) или специфические результаты о достаточных условиях однозначной глобальной разрешимости, уже известные из теории дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений конкретного вида с неуправляемой правой частью, нелинейно зависящей от переменной состояния. Условиям глобальной разрешимости для уравнений с неуправляемой правой частью посвящена достаточно обширная литература, см., например, [13–25]. Между тем, при исследовании глобальной разрешимости начально-краевых задач с нелинейной правой частью, зависящей от управления, имеет смысл использовать информацию о факте и характере этой зависимости. В частности, может оказаться так, что наличие глобальной разрешимости или ее отсутствие существенным образом зависит от того, насколько широко варьируются управляемые параметры, входящие в нелинейную правую часть уравнения. Во многих ситуациях удается доказать, что если, например, система глобально разрешима для некоторого фиксированного управления, то она сохраняет это свойство для всех малых (в том или ином смысле) вариациях этого управления (при том, что для каких-то допустимых управлений глобальной разрешимости может и не быть). Это свойство в совокупности со свойством единственности решения как раз и называется устойчивостью существования глобальных решений (или, более общо, сохранением однозначной глобальной разрешимости), см., например, обзоры в [26–29].

Ранее при исследовании вопроса УСГР управляемых распределенных систем использовался метод, основанный на сведении таких систем к вольтерровому функционально-операторному (операторному) уравнению в лебеговом (или, более общо, в банаховом идеальном) пространстве измеримых функций, с последующим применением соответствующих абстрактных результатов. Подробнее об истории развития метода вольтерровых операторных уравнений для получения условий УСГР управляемых распределенных систем см. уже упомянутые обзоры в [26–29]. В работе [29] для начально-краевой задачи, связанной с управляемым полулинейным уравнением глобальной электрической цепи, получен признак УСГР, использующий ту же идею сведения к вольтерровому функционально-операторному уравнению (типа Гаммерштейна). Принципиальное отличие от прежних результатов состояло в том, что указанная задача не допускала сведения к абстрактному уравнению в банаховом идеальном пространстве; уравнение рассматривалось в пространстве вида $\mathbb{C}\big([0,T];X\big)$ с некоторым банаховым пространством $X$ функций, определенных на области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Вместе с тем, методика [29] применима лишь к полулинейным уравнениям. В [30] доказан признак тотального (по всем допустимым управлениям) сохранения глобальной разрешимости эволюционного операторного уравнения I рода общего вида с управляемой добавочной нелинейностью в банаховом пространстве. Методика [30] применима в том числе и к существенно нелинейным уравнениям в частных производных эволюционного типа. Суть признака [30] состояла в том, что тотальное сохранение глобальной разрешимости указанного уравнения обеспечивалась за счет предположения о глобальной разрешимости некоторого мажорантного (равномерно по всем управлениям) интегрального уравнения относительно неизвестной функции, зависящей лишь от переменной времени. При этом само мажорантное уравнение строилось на основе постулируемых оценок управляемой добавочной нелинейности.

Данная статья — это результат существенного переосмысления работ [29,30]. Во-первых, результаты [29, 30] можно переформулировать как признаки УСГР и ТСГР, соответственно, для эволюционного операторного уравнения второго рода, и такой подход на самом деле является более естественным — как в смысле формулировки условий, используемой методики доказательства, так и в смысле практических приложений. Во-вторых, пространство $\mathbb{C}([0;T];X)$, фигурирующее в указанных работах в качестве пространства, в котором происходит поиск решения, может оказаться плохо приспособленным для того, чтобы можно было удовлетворить сделанным предположениям. В-третьих, результаты [29,30] позволяют получить оценку решения лишь по норме пространства $\mathbb{C}([0;T];X)$, но для приложений может понадобиться оценка по норме того пространства $W[0;T]$ (скажем, пространства Соболева), в котором и требуется искать решение. В-четвертых, предполагаемые в указанных работах априорные поточечные (при $t\in[0;T]$) оценки решения для соответствующего уравнения с фиксированной правой частью, не зависящей от фазовой переменной, могут быть доступны не в виде интеграла с переменным верхним пределом (как предполагается), а в виде лишь оценок по норме $W[0;T]$. В-пятых, в [30] не предусматривается, что правая часть уравнения может содержать, помимо самой функции состояния, обобщенные производные этой функции. Именно доработка методики [29, 30] в соответствии со сделанными замечаниями и составляет основной результат данной статьи. В качестве примеров рассматриваются: управляемая нелинейная нестационарная система уравнений Навье–Стокса, уравнение Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса, а также некоторые сильно нелинейные псевдопараболические уравнения. Результаты работ [29,30] здесь не применимы (в силу сделанных выше замечаний), но результаты, установленные в данной статье, оказываются применимы.

Тем не менее, так же, как и в [29, 30], теорема о сохранении глобальной разрешимости доказывается путем последовательного продолжения решения уравнения вдоль временной шкалы подобно тому, как ранее использовалось продолжение вдоль вольтерровой цепочки оператора правой части уравнения типа Гаммерштейна, представляющего исследуемую управляемую систему. Единственность решения доказывается путем аналогичного продолжения оценки разности двух предполагаемых решений, отвечающих одному и тому же управлению.

## 2. Формулировка основных результатов

Пусть $X,Y$ — вещественные банаховы пространства, $T>0$, $W_0[0;T]$ — замкнутое множество в банаховом пространстве $W[0;T]$, элементами которого являются функции со значениями в $X$; в частности, может иметь место вложение $W[0;T]\subset L_q\big([0;T];X\big)$. Точнее говоря, мы предполагаем, что задана шкала банаховых пространств $W[0;\tau]$ и соответственно, замкнутых подмножеств $W_0[0;\tau]\subset W[0;\tau]$, $\tau\in(0;T]$. С точки зрения практических приложений, $W_0[0;T]$ — это совокупность функций из $W[0;T]$, которые удовлетворяют некоторому начальному условию (начально-краевым условиям), записанному в той или иной конкретной форме. Пусть, далее, $\mathcal{B}\big([0;T];Y\big)$ — некоторое линейное нормированное пространство измеримых по Бохнеру функций $t\in[0;T]\to z(t)\in Y$, $\mathcal{B}\big([\tau;\xi];Y\big)$ — соответствующее индуцированное пространство сужений на $[\tau;\xi]$, $0\leqslant\tau<\xi\leqslant T$, и выполнены следующие естественные предположения:

$$\|z\|_{\mathcal{B}\left([\tau;\xi];Y\right)}\leqslant\|z\|_{\mathcal{B}\left([0;T];Y\right)};\ \|z\|_{\mathcal{B}\left([0;\xi];Y\right)}\leqslant\|z\|_{\mathcal{B}\left([0;\tau];Y\right)}+\|z\|_{\mathcal{B}\left([\tau;\xi];Y\right)},\qquad\tau>0;$$

$$\big\|z(.)\big\|_Y\in\mathcal{B}[\tau;\xi]=\mathcal{B}\big([\tau;\xi];\mathbb{R}\big),\qquad\|z\|_{\mathcal{B}\left([\tau;\xi];Y\right)}=\big\|\,\|z\|_Y\big\|_{\mathcal{B}[\tau;\xi]},$$

причем операции сложения и умножения на число определены поточечным образом (в частности, в роли $\mathcal{B}[0;T]$ могут выступать $\mathbb{C}[0;T]$, $L_p[0;T]$, $p \in [1;+\infty]$ и т.п.). Будем предполагать, что задано семейство операторов $\mathcal{F}_\tau : \mathcal{B}\big([0;\tau];Y\big) \to W_0[0;\tau]$, $\tau \in (0;T]$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$, удовлетворяющее следующим условиям.

**G**$_1$) (*вольтерровость*). Для любых $\tau, \xi \in (0;T]$, $\tau \leqslant \xi$, $z_\tau \in \mathcal{B}\big([0;\tau];Y\big)$, $z_\xi \in \mathcal{B}\big([0;\xi];Y\big)$, и соответствующих образов $\varphi_\tau = \mathcal{F}_\tau z_\tau$, $\varphi_\xi = \mathcal{F}_\xi z_\xi$, из условия $z_\xi(t) = z_\tau(t)$ при п.в. $t \in [0;\tau]$, вытекает равенство $\varphi_\xi \Big|_{[0;\tau]} = \varphi_\tau$ в пространстве $W[0;\tau]$.

Тем самым, при любом $z \in \mathcal{B}\big([0;T];Y\big)$ уравнение вида

$$\varphi = \mathcal{F}[z] \tag{2.1}$$

имеет единственное локальное решение $\varphi_\tau \in W_0[0;\tau]$, которое определяется как $\varphi_\tau = \mathcal{F}_\tau\big[z \Big|_{[0;\tau]}\big]$. Это свойство позволяет строить решение путем продолжения с меньшего отрезка на больший отрезок.

**G**$_2$) Для любых $\tau, \xi \in [0;T]$, $\tau < \xi$, $z_j \in \mathcal{B}\big([0;\xi];Y\big)$, $z_1 \Big|_{[0;\tau]} = z_2 \Big|_{[0;\tau]}$ в случае $\tau > 0$, $\|z_j\|_{\mathcal{B}([0;\xi];Y)} \leqslant \omega$, и соответствующих $\varphi_j = \mathcal{F}_\xi[z_j]$, $j = 1, 2$, имеем:

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W[0;\xi]} \leqslant \mathcal{N}(\omega)\alpha_0(\xi - \tau)\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{B}([\tau;\xi];Y)},$$

где $\mathcal{N} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — неубывающая функция, $\alpha_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция, $\alpha_0(\delta) > 0$ при $0 < \delta < \delta_0$.

**G**$_3$) $\sup\limits_{\tau \in (0;T]} \big\|\mathcal{F}_\tau(0)\big\|_{W[0;\tau]} < +\infty$.

Теперь в правую часть добавим зависимость от фазовой переменной и от управления. А именно, будем рассматривать управляемый аналог уравнения (2.1):

$$\varphi = \mathcal{F}\big[f[u](\varphi)\big], \quad \varphi \in W[0;T]. \tag{2.2}$$

Здесь $u \in U$ — управление, $U \subset \mathcal{U}$ — заданное множество в некотором (вообще говоря, произвольном) пространстве $\mathcal{U}$; и предполагается, что $\forall\, u \in U$ определен оператор $f[u] = f_T[u]$, соотнесенный с семейством операторов $f_\tau[u] : W[0;\tau] \to \mathcal{B}\big([0;\tau];Y\big)$, $\tau \in (0;T]$, обладающим следующими свойствами.

**F**$_1$) Для любых $\tau, \xi \in (0;T]$, $\tau \leqslant \xi$, и $\psi_\xi \in W[0;\xi]$, $\psi_\xi \Big|_{[0;\tau]} = \psi_\tau \in W[0;\tau]$, имеем: $f_\xi[u](\psi_\xi)(t) = f_\tau[u](\psi_\tau)(t)$ для почти всех $t \in [0;\tau]$.

**F**$_2$) Для всех $\tau, \xi \in (0;T]$, $\tau \leqslant \xi$, $\psi_1, \psi_2 \in W_0[0;\xi]$, $\|\psi_i\|_{W[0;\xi]} \leqslant M$, $i = 1, 2$, имеем:

$$\big\|f_\xi[u](\psi_1) - f_\xi[u](\psi_2)\big\|_{\mathcal{B}([\tau;\xi];Y)} \leqslant \alpha_1(\xi - \tau)\beta_1(M)\|\psi_1 - \psi_2\|_{W[0;\xi]},$$

где $\alpha_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывная функция, $\beta_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — неубывающая функция.

**F**$_3$) Существует неубывающая функция $\beta_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что для любых

$$u, \overline{u} \in U, \qquad \tau, \xi \in (0;T], \qquad \tau < \xi, \qquad \gamma > 0, \qquad \varphi \in W_0[0;\tau],$$
$$\overline{\varphi} \in W_0[0;\xi], \qquad \|\varphi\|_{W[0;\tau]} \leqslant M, \qquad \|\overline{\varphi}\|_{W[0;\xi]} \leqslant M,$$

в случае

$$\rho_{\tau,\xi}(u, \overline{u}) = \big\|f_\xi[u](\overline{\varphi}) - f_\xi[\overline{u}](\overline{\varphi})\big\|_{\mathcal{B}([\tau;\xi];Y)} \leqslant \gamma$$

можно сконструировать функцию

$$\widetilde{z} = Z[\tau, \xi, \gamma, u, \overline{u}, \varphi, \overline{\varphi}] \in \mathcal{B}\big([0;\xi];Y\big)$$

такую, что

$$\widetilde{z}\Big|_{[0;\tau]} = f_\tau[u](\varphi), \qquad \big\|\widetilde{z} - f_\xi[\overline{u}](\overline{\varphi})\big\|_{\mathcal{B}\left([\tau;\xi];Y\right)} \leqslant \beta_0(M)\big\{\gamma + \big\|f_\tau[u](\varphi) - f_\xi[u](\overline{\varphi})\big\|_{\mathcal{B}\left([0;\tau];Y\right)}\big\}.$$

**Замечание 2.1.** *На первый взгляд, может создаться впечатление, что условие* $\mathbf{F}_3$) *выглядит слишком экзотически и труднопроверяемо. На самом деле, как показано далее, оно заведомо выполнено, например, в случаях лебеговых пространств* $\mathcal{B} = L_p$, $p \in [1;\infty]$, *и пространства непрерывных функций* $\mathcal{B} = \mathbb{C}$.

**Лемма 2.1.** *Пусть пространство* $\mathcal{B}\big([0;\xi];Y\big)$ *таково, что для характеристической функции* $\chi = \chi_{(\tau;\xi]}$ *и для любых* $z_1 \in \mathcal{B}\big([0;\tau];Y\big)$, $z_2 \in \mathcal{B}\big([0;\xi];Y\big)$ *и продолжения нулем* $z_{1,\xi}$ *функции* $z_1$ *на* $[0;\xi]$ *имеем:* $z_{1,\xi} \in \mathcal{B}\big([0;\xi];Y\big)$, $\chi z_2 \in \mathcal{B}\big([0;\xi];Y\big)$*; указанным свойством, очевидно, обладают лебеговы пространства* $L_p\big([0;\xi];Y\big)$, $p \in [1;\infty]$. *Тогда условие* $\mathbf{F}_3$) *выполнено.*

*Доказательство.* Достаточно положить

$$\widetilde{z}(t) = \begin{cases} f_\tau[u](\varphi)(t), & t \in [0;\tau], \\ f_\xi[u](\overline{\varphi})(t), & t \in (\tau;\xi]. \end{cases}$$

Ясно, что $\widetilde{z} = z_{1,\xi} + \chi z_2 \in \mathcal{B}\big([0;\xi];Y\big)$, где $z_1 = f_\tau[u](\varphi)$, $z_2 = f_\xi[u](\overline{\varphi})$. При этом

$$\widetilde{z}\Big|_{[0;\tau]} = z_1, \quad \big\|\widetilde{z} - f_\xi[\overline{u}](\overline{\varphi})\big\|_{\mathcal{B}\big([\tau;\xi];Y\big)} = \big\|f_\xi[u](\overline{\varphi}) - f_\xi[\overline{u}](\overline{\varphi})\big\|_{\mathcal{B}([\tau;\xi];Y)} \leqslant \gamma.$$

□

**Лемма 2.2.** *Пусть* $\mathcal{B}\big([0;\xi];Y\big) = \mathbb{C}\big([0;\xi];Y\big)$. *Тогда условие* $\mathbf{F}_3$) *выполнено.*

*Доказательство.* Обозначим

$$z = f_\tau[u](\varphi), \ \widehat{z} = f_\xi[u](\overline{\varphi}), \ \overline{z} = f_\xi[\overline{u}](\overline{\varphi}).$$

По условию,

$$\rho_{\tau,\xi}(u,\overline{u}) = \|\widehat{z} - \overline{z}\|_{\mathbb{C}\big([\tau;\xi];Y\big)} \leqslant \gamma, \quad \gamma > 0.$$

Так как $\widehat{z} \in \mathbb{C}\big([0;\xi];Y\big)$, то найдется $\eta \in (\tau;\xi)$ такое, что

$$\big\|\widehat{z}(t) - \widehat{z}(\tau)\big\|_Y \leqslant \gamma \quad \forall\, t \in [\tau;\eta].$$

Пусть $w : [\tau;\xi] \to [0;1] \subset \mathbb{R}$ — непрерывная функция такая, что $w(\tau) = 1$, $w(t) = 0$ для всех $t \in [\eta;\xi]$. Положим

$$\widetilde{z}(t) = \begin{cases} z(t), & t \in [0;\tau], \\ w(t)z(\tau) + \big(1 - w(t)\big)\widehat{z}(t), & t \in [\tau;\xi]. \end{cases}$$

По построению, $\widetilde{z} \in \mathbb{C}\big([0;\xi];Y\big)$. Рассмотрим

$$\|\widetilde{z} - \overline{z}\|_{\mathbb{C}\big([\tau;\xi];Y\big)} \leqslant \|\widetilde{z} - \widehat{z}\|_{\mathbb{C}\big([\tau;\xi];Y\big)} + \|\widehat{z} - \overline{z}\|_{\mathbb{C}\big([\tau;\xi];Y\big)} \leqslant \|\widetilde{z} - \widehat{z}\|_{\mathbb{C}\big([\tau;\eta];Y\big)} + \gamma,$$

так как $\widetilde{z}\,\big|_{[\eta;\xi]} = \widehat{z}\,\big|_{[\eta;\xi]}$ по свойствам функции $w(t)$. Для произвольного $t \in [\tau;\eta]$ оценим

$$\begin{aligned}\big\|\widetilde{z}(t) - \widehat{z}(t)\big\|_Y &= w(t)\big\|z(\tau) - \widehat{z}(t)\big\|_Y \\ &\leqslant \big\|z(\tau) - \widehat{z}(\tau)\big\|_Y + \big\|\widehat{z}(\tau) - \widehat{z}(t)\big\|_Y \leqslant \|z - \widehat{z}\|_{\mathbb{C}\big([0;\tau];Y\big)} + \gamma.\end{aligned}$$

Таким образом, получаем:

$$\|\widetilde{z} - \overline{z}\|_{\mathbb{C}\big([\tau;\xi];Y\big)} \leqslant \|z - \widehat{z}\|_{\mathbb{C}\big([0;\tau];Y\big)} + 2\gamma.$$

□

**Теорема 2.1.** *Пусть выполнены условия* $\mathbf{G}_1$) – $\mathbf{G}_3$), $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$), *а также равенство* $\alpha_0(0)\alpha_1(0) = 0$. *Тогда, каково бы ни было* $u \in U$, *уравнение* (2.2) *не может иметь более одного решения.*

**Теорема 2.2.** *Пусть выполнены условия* $\mathbf{G}_1)$ – $\mathbf{G}_3)$, $\mathbf{F}_1)$ – $\mathbf{F}_3)$, *а также равенство* $\alpha_0(0)\alpha_1(0) = 0$. *Предположим, управлению* $u = \overline{u} \in U$ *отвечает глобальное решение* $\varphi = \overline{\varphi} \in W[0;T]$ *уравнения* (2.2). *Тогда найдутся числа* $\varepsilon > 0$ *и* $C > 0$ *такие, что для всякого* $u \in U$ *такого, что*

$$\rho(u,\overline{u}) = \big\|f[u](\overline{\varphi}) - f[\overline{u}](\overline{\varphi})\big\|_{\mathcal{B}([0;T];Y)} \leqslant \varepsilon,$$

*существует единственное глобальное решение* $\varphi \in W[0;T]$ *уравнения* (2.2), *и более того,* $\|\varphi - \overline{\varphi}\|_{W[0;T]} \leqslant C\,\rho(u,\overline{u})$.

Доказательства теорем 2.1, 2.2 см. в разделе 3.

## 3. Доказательство основных результатов

Для любых $\tau,\xi \in (0;T]$, $\tau \leqslant \xi$, $\varphi \in W_0[0;\tau]$ определим $\Phi[\xi,\varphi]$ как множество всех $\eta \in W_0[0;\xi]$ таких, что

$$\inf_{\psi} \|\psi - \eta\|_{W[0;\xi]} = 0,$$

где inf берется по всем $\psi \in W_0[0;\xi]$ таким, что $\psi\Big|_{[0;\tau]} = \varphi$ в пространстве $W[0;\tau]$.

**Лемма 3.1.** *Для любых* $\tau,\xi \in (0;T]$, $\tau \leqslant \xi$, $\varphi \in W_0[0;\tau]$ *множество* $\Phi[\xi,\varphi]$ *замкнуто в пространстве* $W[0;\xi]$.

*Доказательство.* В случаях $\Phi[\xi,\varphi] = \emptyset$, а также конечного множества утверждение тривиально. Будем предполагать, что множество $\Phi[\xi,\varphi]$ бесконечно.

Пусть $\{\eta_m\} \subset \Phi[\xi,\varphi]$, $\|\eta_m - \eta_0\|_{W[0;\xi]} \to 0$ при $m \to \infty$. Поскольку множество $W_0[0;\xi]$ предполагается замкнутым в пространстве $W[0;\xi]$, то ясно, что $\eta_0 \in W_0[0;\xi]$. Зафиксируем произвольно число $\varepsilon > 0$ и найдем номер $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\|\eta_m - \eta_0\|_{W[0;\xi]} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \geqslant m_\varepsilon.$$

Согласно определению множества $\Phi[\xi,\varphi]$, существует $\psi_\varepsilon \in W_0[0;\xi]$ такое, что

$$\psi_\varepsilon\Big|_{[0;\tau]} = \varphi, \quad \|\psi_\varepsilon - \eta_{m_\varepsilon}\|_{W[0;\xi]} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оценим

$$\|\psi_\varepsilon - \eta_0\|_{W[0;\xi]} \leqslant \|\psi_\varepsilon - \eta_{m_\varepsilon}\|_{W[0;\xi]} + \|\eta_{m_\varepsilon} - \eta_0\|_{W[0;\xi]} < \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ это означает, что $\eta_0 \in \Phi[\xi,\varphi]$.

$\square$

**Лемма 3.2.** *Пусть выполнены условия* $\mathbf{F}_1)$, $\mathbf{F}_2)$. *Тогда для любых* $\tau,\xi \in (0;T]$, $\tau \leqslant \xi$, $\varphi \in W_0[0;\tau]$, *и соответственно,* $\psi_1,\psi_2 \in \Phi[\xi,\varphi]$, $u \in U$, *имеем:*

$$\big\|f_\xi[u](\psi_1) - f_\xi[u](\psi_2)\big\|_{\mathcal{B}\left([0;\tau];Y\right)} = 0. \tag{3.1}$$

*Более того, для* $\varphi_\xi \in W_0[0;\xi]$, $\varphi_\xi\Big|_{[0;\tau]} = \varphi_\tau \in W_0[0;\tau]$ *имеем:*

$$\big\|f_\xi[u](\psi_s) - f_\xi[u](\varphi_\xi)\big\|_{\mathcal{B}\left([0;\tau];Y\right)} \leqslant \big\|f_\tau[u](\varphi) - f_\tau[u](\varphi_\tau)\big\|_{\mathcal{B}\left([0;\tau];Y\right)}, \; s = 1,2. \tag{3.2}$$

*Доказательство.* 1. Докажем формулу (3.1). Пусть $\|\psi_s\|_{W[0;\xi]} \leqslant M$, $s = 1,2$. Выберем произвольно число $\varepsilon > 0$, и в соответствии с определением множества $\Phi[\xi,\varphi]$, найдем $\widetilde{\psi}_s \in W_0[0;\xi]$ такие, что

$$\widetilde{\psi}_s\Big|_{[0;\tau]} = \varphi, \; \delta_s = \|\widetilde{\psi}_s - \psi_s\|_{W[0;\xi]} \leqslant 1, \; \alpha_1(\xi)\beta_1(M+1)\delta_s \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \; s = 1,2.$$

Ясно, что в таком случае $\|\widetilde{\psi}_s\|_{W[0;\xi]} \leqslant M+1$, $s=1,2$. Пользуясь условиями $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$), имеем:

$$\begin{aligned}\Big\|f_\xi[u](\psi_1)-f_\xi[u](\psi_2)\Big\|_{\mathcal{B}\left([0;\tau];Y\right)} \leqslant&\Big\|f_\xi[u](\widetilde{\psi}_1)-f_\xi[u](\widetilde{\psi}_2)\Big\|_{\mathcal{B}\left([0;\tau];Y\right)}+\\ &+\sum_{s=1}^{2}\Big\|f_\xi[u](\widetilde{\psi}_s)-f_\xi[u](\psi_s)\Big\|_{\mathcal{B}\left([0;\tau];Y\right)}\\ \leqslant&\Big\|f_\tau[u](\varphi)-f_\tau[u](\varphi)\Big\|_{\mathcal{B}\left([0;\tau];Y\right)}+\alpha_1(\xi)\beta_1(M+1)\sum_{s=1}^{2}\delta_s\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

В силу произвольности выбора числа $\varepsilon$, получаем равенство (3.1).

2. Пусть $s\in\overline{1,2}$, $\|\psi_s\|_{W[0;\xi]}\leqslant M$, $\|\varphi_\xi\|_{W[0;\xi]}\leqslant M$. Докажем формулу (3.2). Выберем произвольно число $\varepsilon>0$, и в соответствии с определением множества $\Phi[\xi,\varphi]$, найдем $\widetilde{\psi}_s\in W_0[0;\xi]$ такое, что

$$\widetilde{\psi}_s\Big|_{[0;\tau]}=\varphi,\ \delta_s=\|\widetilde{\psi}_s-\psi_s\|_{W[0;\xi]}\leqslant 1,\ \alpha_1(\xi)\beta_1(M+1)\delta_s\leqslant\varepsilon.$$

Ясно, что в таком случае $\|\widetilde{\psi}_s\|_{W[0;\xi]}\leqslant M+1$. Пользуясь условиями $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$), имеем:

$$\begin{aligned}\Big\|f_\xi[u](\psi_s)-f_\xi[u](\varphi_\xi)\Big\|_{\mathcal{B}\left([0;\tau];Y\right)}\leqslant&\Big\|f_\xi[u](\widetilde{\psi}_s)-f_\xi[u](\psi_s)\Big\|_{\mathcal{B}\left([0;\tau];Y\right)}\\ &+\Big\|f_\xi[u](\widetilde{\psi}_s)-f_\xi[u](\varphi_\xi)\Big\|_{\mathcal{B}\left([0;\tau];Y\right)}\\ \leqslant&\alpha_1(\xi)\beta_1(M+1)\delta_s+\Big\|f_\tau[u](\varphi)-f_\tau[u](\varphi_\tau)\Big\|_{\mathcal{B}\left([0;\tau];Y\right)}\\ \leqslant&\varepsilon+\Big\|f_\tau[u](\varphi)-f_\tau[u](\varphi_\tau)\Big\|_{\mathcal{B}\left([0;\tau];Y\right)}.\end{aligned}$$

В силу произвольности выбора числа $\varepsilon$, получаем неравенство (3.2).

□

Далее во избежание излишней громоздкости индекс $\tau$ в обозначении $f_\tau[u]$ будем опускать, поскольку его значение будет легко понять из контекста.

*Доказательство теоремы 2.1.* Предположим, от противного, что управлению $u\in U$ отвечают два решения $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$ уравнения (2.2). Обозначим

$$z_j=f[u](\varphi_j),\quad j=1,2,\qquad \omega=\max_{j=1,2}\|z_j\|_{\mathcal{B}([0;T];Y)},\qquad \aleph_s=\max_{t\in[0;T]}\alpha_s(t),\quad s=0,1,$$

$$\mathcal{N}_\omega=\mathcal{N}(\omega),\qquad \gamma_0=\sup_{\tau\in(0;T]}\Big\|\mathcal{F}_\tau(0)\Big\|_{W[0;\tau]},\qquad M_0=\gamma_0+\mathcal{N}_\omega\omega\aleph_0.$$

Здесь $\gamma_0<\infty$ в силу условия $\mathbf{G}_3$). Заметим, что в соответствии с условием $\mathbf{G}_2$), для всех $\tau\in(0;T]$ имеем:

$$\begin{aligned}\Big\|\varphi_j\Big|_{[0;\tau]}\Big\|_{W[0;\tau]}\leqslant&\Big\|\mathcal{F}_\tau(0)\Big\|_{W[0;\tau]}+\Big\|\mathcal{F}_\tau[z_j\Big|_{[0;\tau]}]-\mathcal{F}_\tau(0)\Big\|_{W[0;\tau]}\\ \leqslant&\gamma_0+\mathcal{N}_\omega\aleph_0\|z_j\|_{\mathcal{B}\left([0;T];Y\right)}\leqslant M_0,\quad j=1,2.\end{aligned}$$

В силу условий $\mathbf{G}_2$), $\mathbf{F}_2$), функция $\alpha=\alpha_0(.)\alpha_1(.)$ непрерывна и, по условию теоремы, такова, что $\alpha(0)=0$. Поэтому найдется число $\delta\in(0;\delta_0)$ такое, что $\mathcal{N}_\omega\alpha(\delta)\beta_1(M_0)\leqslant\dfrac{1}{2}$. Выберем произвольное разбиение отрезка $[0;T]$ вида

$$0=t_0<t_1<\ldots<t_k=T,\qquad (t_i-t_{i-1})\leqslant\delta,\qquad i=\overline{1,k}.$$

Обозначим

$$z_{j,i}=z_j\Big|_{[0;t_i]},\qquad \varphi_{j,i}=\varphi_j\Big|_{[0;t_i]}\in W[0;t_i],$$

в соответствии с условием $\mathbf{G}_1$).

Рассмотрим отрезок $[0;t_1]$. Согласно условию $\mathbf{G}_1$), $\varphi_{s,1}=\mathcal{F}_{t_1}[z_{s,1}]$ в пространстве $W[0;t_1]$, $s=1,2$. Докажем, что $\varphi_{1,1}=\varphi_{2,1}$ в пространстве $W[0;t_1]$. Обозначим $\eta_1=\varphi_{1,1}-\varphi_{2,1}$. Согласно условию $\mathbf{G}_2$),

$$\|\eta_1\|_{W[0;t_1]}\leqslant \mathcal{N}_\omega\alpha_0(\delta)\|z_{1,1}-z_{2,1}\|_{\mathcal{B}([0;t_1];Y)},$$

где по условиям $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$),

$$\begin{aligned}\|z_{1,1}-z_{2,1}\|_{\mathcal{B}([0;t_1];Y)} =&\big\|f[u](\varphi_{1,1})-f[u](\varphi_{2,1})\big\|_{\mathcal{B}([0;t_1];Y)}\\ \leqslant&\alpha_1(\delta)\beta_1(M_0)\big\|\varphi_{1,1}-\varphi_{2,1}\big\|_{W[0;t_1]}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\eta_1\|_{W[0;t_1]}\leqslant \mathcal{N}_\omega\alpha(\delta)\beta_1(M_0)\|\eta_1\|_{W[0;t_1]}\leqslant \frac{1}{2}\,\|\eta_1\|_{W[0;t_1]}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\,\|\eta_1\|_{W[0;t_1]}\leqslant 0,$$

то есть, $\eta_1=0$, или $\varphi_{1,1}=\varphi_{2,1}$ в пространстве $W[0;t_1]$.

Действуя по индукции, предположим, мы уже доказали, что $\varphi_{1,j-1}=\varphi_{2,j-1}$ в пространстве $W[0;t_{j-1}]$, $j\in\overline{2,k}$. Исходя из этого предположения, докажем, что $\varphi_{1,j}=\varphi_{2,j}$ в пространстве $W[0;t_j]$. Согласно условию $\mathbf{G}_1$), $\varphi_{s,j}=\mathcal{F}_{t_j}[z_{s,j}]$ в пространстве $W[0;t_j]$, $s=1,2$. Обозначим $\eta_j=\varphi_{1,j}-\varphi_{2,j}$. Согласно предположению индукции и условию $\mathbf{F}_1$), имеем:

$$\|z_{1,j}-z_{2,j}\|_{\mathcal{B}([0;t_{j-1}];Y)}=\big\|f[u](\varphi_{1,j-1})-f[u](\varphi_{2,j-1})\big\|_{\mathcal{B}([0;t_{j-1}];Y)}=0.$$

Тогда по условию $\mathbf{G}_2$),

$$\|\eta_j\|_{W[0;t_j]}\leqslant \mathcal{N}_\omega\alpha_0(\delta)\|z_{1,j}-z_{2,j}\|_{\mathcal{B}([t_{j-1};t_j];Y)}.$$

Здесь по условию $\mathbf{F}_2$),

$$\|z_{1,j}-z_{2,j}\|_{\mathcal{B}([t_{j-1};t_j];Y)}=\big\|f[u](\varphi_{1,j})-f[u](\varphi_{2,j})\big\|_{\mathcal{B}([t_{j-1};t_j];Y)}\leqslant \alpha_1(\delta)\beta_1(M_0)\big\|\varphi_{1,j}-\varphi_{2,j}\big\|_{W[0;t_j]}.$$

Следовательно,

$$\|\eta_j\|_{W[0;t_j]}\leqslant \mathcal{N}_\omega\alpha(\delta)\beta_1(M_0)\|\eta_j\|_{W[0;t_j]}\leqslant \frac{1}{2}\,\|\eta_j\|_{W[0;t_j]}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\,\|\eta_j\|_{W[0;t_j]}\leqslant 0,$$

то есть $\eta_j=0$, или $\varphi_{1,j}=\varphi_{2,j}$ в пространстве $W[0;t_j]$.

По индукции, делаем вывод, что $\varphi_1=\varphi_2$ в пространстве $W[0;T]$. □

*Доказательство теоремы 2.2.* Пусть число $M>0$ произвольно фиксировано,

$$\gamma_0=\sup_{\tau\in(0;T]}\big\|\mathcal{F}_\tau(0)\big\|_{W[0;\tau]}<\infty$$

в соответствии с условием $\mathbf{G}_3$); $\aleph_s=\max\limits_{t\in[0;T]}\alpha_s(t)$, $s=0,1$,

$$\overline{z}=f[\overline{u}](\overline{\varphi}),\quad \gamma_1=\|\overline{z}\|_{\mathcal{B}\left([0;T];Y\right)},\quad M_0=\gamma_0+\mathcal{N}(\gamma_1)\gamma_1\aleph_0.$$

Заметим, что в соответствии с условиями $\mathbf{G}_2$), $\mathbf{F}_1$), для всех $\tau\in(0;T]$ имеем:

$$\begin{aligned}\big\|\overline{\varphi}\,\big|_{[0;\tau]}\big\|_{W[0;\tau]}\leqslant&\|\mathcal{F}_\tau(0)\|_{W[0;\tau]}+\Big\|\mathcal{F}_\tau\big[\overline{z}\,\big|_{[0;\tau]}\big]-\mathcal{F}_\tau(0)\Big\|_{W[0;\tau]}\\ \leqslant&\gamma_0+\mathcal{N}(\gamma_1)\aleph_0\|\overline{z}\|_{\mathcal{B}\left([0;\tau];Y\right)}\leqslant M_0.\end{aligned}$$

Обозначим

$$\aleph_2 = \aleph_1\beta_1(M_1)\big\{1+\beta_0(M_1)\big\}, \qquad \mathcal{N}_\omega = \max\big\{1,\mathcal{N}(\omega)\big\},$$
$$M_1 = M + M_0, \qquad \omega = \gamma_1 + \big(\beta_0(M_1)+1+\aleph_2\big)\,M.$$

Выберем число $\sigma > 0$ так, чтобы $\sigma\mathcal{N}_\omega < 1$. После этого, пользуясь непрерывностью функции $\alpha = \alpha_0(.)\alpha_1(.)$, см. предположения $\mathbf{G}_2$), $\mathbf{F}_2$), а также условием $\alpha(0) = 0$, подберем число $\delta \in (0;\delta_0)$ так, чтобы

$$\alpha(\delta)\beta_1(M_1) < \sigma.$$

Выберем произвольное разбиение отрезка $[0;T]$ вида

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T, \quad (t_i - t_{i-1}) \leqslant \delta, \quad i = \overline{1,k}.$$

Обозначим

$$\overline{z}_i = \overline{z}\,\Big|_{[0;t_i]}, \quad \overline{\varphi}_i = \overline{\varphi}\,\Big|_{[0;t_i]} = \mathcal{F}_{t_i}[\overline{z}_i] \in W_0[0;t_i],$$

согласно условию $\mathbf{G}_1$). Заметим, более того, что согласно условию $\mathbf{F}_1$),

$$\overline{\varphi}_i = \mathcal{F}_{t_i}\Big[f[\overline{u}](\overline{\varphi}_i)\Big], \quad i = \overline{1,k}.$$

Определим функцию $\ell(c) = \mathcal{N}_\omega\aleph_0\big[\beta_0(M_1)+1+\aleph_2 c\big]$ и числовые последовательности

$$C_i = \left(1 + \frac{1}{1-\sigma\mathcal{N}_\omega}\right)\ell(C_{i-1}), \quad \pi_i = \frac{\ell(C_{i-1})}{1-\sigma\mathcal{N}_\omega}, \quad i = \overline{1,k}, \quad C_0 = 0.$$

Выберем произвольно управление $u \in U$ так, чтобы

$$0 \leqslant \rho(u,\overline{u}) \leqslant M, \quad C_k\rho(u,\overline{u}) \leqslant M.$$

Покажем, что при таком выборе уравнение (2.2) имеет решение.

Прежде всего, рассмотрим случай $\rho(u,\overline{u}) = 0$. Тогда $\varphi = \overline{\varphi}$ является решением уравнения (2.2). Действительно, согласно условию $\mathbf{G}_2$),

$$\begin{aligned}\Big\|\overline{\varphi} - \mathcal{F}\big[f[u](\overline{\varphi})\big]\Big\|_{W[0;T]} =& \Big\|\mathcal{F}\big[f[\overline{u}](\overline{\varphi})\big] - \mathcal{F}\big[f[u](\overline{\varphi})\big]\Big\|_{W[0;T]} \\ \leqslant& \mathcal{N}_\omega\aleph_0\big\|f[u](\overline{\varphi}) - f[\overline{u}](\overline{\varphi})\big\|_{\mathcal{B}\left([0;T];Y\right)} = \mathcal{N}_\omega\aleph_0\rho(u,\overline{u}) = 0.\end{aligned}$$

Здесь мы учитывали, что

$$\big\|f[u](\overline{\varphi}) \pm \overline{z}\big\|_{\mathcal{B}\left([0;T];Y\right)} \leqslant \big\|\overline{z}\big\|_{\mathcal{B}\left([0;T];Y\right)} + \rho(u,\overline{u}) = \gamma_1 \leqslant \omega.$$

Поэтому далее будем рассматривать случай $\rho(u,\overline{u}) > 0$. Дальнейшее доказательство проведем в несколько этапов. При этом будем рассматривать локальные аналоги уравнения (2.2):

$$\varphi = \mathcal{F}_{t_j}\big[f[u](\varphi)\big], \quad \varphi \in W[0;t_j]. \qquad (\mathcal{E}_j)$$

Разрешимость уравнений $(\mathcal{E}_j)$ в соответствующих пространствах $W[0;t_j]$ будем доказывать индукцией по $j = \overline{1,k}$.

1. Докажем существование функции $\varphi = \varphi_1 \in W_0[0;t_1]$, являющейся решением уравнения $(\mathcal{E}_1)$ и удовлетворяющей оценке:

$$\|\varphi_1 - \overline{\varphi}_1\|_{W[0;t_1]} \leqslant C_1\rho(u,\overline{u}).$$

Определим множество $\Psi_1$ как множество всех $\psi \in W_0[0;t_1]$ таких, что

$$\Big\|\psi - \mathcal{F}_{t_1}[\widetilde{z}]\Big\|_{W[0;t_1]} \leqslant \pi_1\rho(u,\overline{u}), \quad \widetilde{z} = f[u](\overline{\varphi}_1).$$

a) Покажем, что $\Psi_1 \neq \emptyset$. Действительно, $\psi = \mathcal{F}_{t_1}[\widetilde{z}] \in \Psi_1$.

б) Покажем, что множество $\Psi_1$ замкнуто в пространстве $W[0;t_1]$. Пусть $\{\eta_m\} \subset \Psi_1$, причем

$$\|\eta_m - \eta_0\|_{W[0;t_1]} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty, \quad \eta_0 \in W[0;t_1].$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}\big\|\eta_0 - \mathcal{F}_{t_1}[\widetilde{z}]\big\|_{W[0;t_1]} &\leqslant \|\eta_0 - \eta_m\|_{W[0;t_1]} + \big\|\eta_m - \mathcal{F}_{t_1}[\widetilde{z}]\big\|_{W[0;t_1]} \\ &\leqslant \|\eta_m - \eta_0\|_{W[0;t_1]} + \pi_1\rho(u,\overline{u}).\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, заключаем, что

$$\big\|\eta_0 - \mathcal{F}_{t_1}[\widetilde{z}]\big\|_{W[0;t_1]} \leqslant \pi_1\rho(u,\overline{u}).$$

С учетом замкнутости множества $W_0[0;t_1]$ в пространстве $W[0;t_1]$, это означает, что $\eta_0 \in \Psi_1$. Таким образом, множество $\Psi_1$ замкнуто в $W[0;t_1]$.

в) Определим оператор $F_1 : \Psi_1 \to W_0[0;t_1]$ с помощью формулы

$$\eta = F_1[\varphi] = \mathcal{F}_{t_1}[z], \quad \text{где} \quad z = f[u](\varphi), \quad \varphi \in \Psi_1.$$

Покажем, что $\eta \in \Psi_1$. Согласно условию $\mathbf{F}_1$),

$$\|\widetilde{z} - \overline{z}_1\|_{\mathcal{B}\left([0;t_1];Y\right)} = \big\|f[u](\overline{\varphi}_1) - f[\overline{u}](\overline{\varphi}_1)\big\|_{\mathcal{B}\left([0;t_1];Y\right)} \leqslant \rho(u,\overline{u}).$$

Следовательно,

$$\|\widetilde{z}\|_{\mathcal{B}\left([0;t_1];Y\right)} \leqslant \gamma_1 + M \leqslant \omega; \quad \|\overline{z}_1\|_{\mathcal{B}\left([0;t_1];Y\right)} \leqslant \gamma_1 \leqslant \omega.$$

Оценим

$$\|\varphi - \overline{\varphi}_1\|_{W[0;t_1]} \leqslant \big\|\varphi - \mathcal{F}_{t_1}[\widetilde{z}]\big\|_{W[0;t_1]} + \big\|\mathcal{F}_{t_1}[\widetilde{z}] - \mathcal{F}_{t_1}[\overline{z}_1]\big\|_{W[0;t_1]}.$$

Отсюда, пользуясь определением множества $\Psi_1$ и условием $\mathbf{G}_2$), получаем:

$$\|\varphi - \overline{\varphi}_1\|_{W[0;t_1]} \leqslant \pi_1\rho(u,\overline{u}) + \mathcal{N}_\omega\aleph_0\|\widetilde{z} - \overline{z}_1\|_{\mathcal{B}\left([0;t_1];Y\right)} \leqslant \big[\pi_1 + \ell(0)\big]\,\rho(u,\overline{u}),$$

то есть

$$\|\varphi - \overline{\varphi}_1\|_{W[0;t_1]} \leqslant C_1\rho(u,\overline{u}) \leqslant M.$$

Следовательно,

$$\|\varphi\|_{W[0;t_1]} \leqslant \|\overline{\varphi}_1\|_{W[0;t_1]} + M \leqslant M_0 + M = M_1.$$

Согласно условию $\mathbf{F}_2$),

$$\begin{aligned}\|z\|_{\mathcal{B}\left([0;t_1];Y\right)} &= \big\|f[u](\varphi) \pm f[u](\overline{\varphi}_1)\big\|_{\mathcal{B}\left([0;t_1];Y\right)} \\ &\leqslant \aleph_1\beta_1(M_1)\|\varphi - \overline{\varphi}_1\|_{W[0;t_1]} + \|\widetilde{z}\|_{\mathcal{B}\left([0;t_1];Y\right)} \leqslant \aleph_1\beta_1(M_1)\,M + M + \gamma_1 \leqslant \omega.\end{aligned}$$

Пользуясь теперь условиями $\mathbf{G}_2$), $\mathbf{F}_2$), получаем:

$$\begin{aligned}\big\|\eta - \mathcal{F}_{t_1}[\widetilde{z}]\big\|_{W[0;t_1]} &= \big\|\mathcal{F}_{t_1}[z] - \mathcal{F}_{t_1}[\widetilde{z}]\big\|_{W[0;t_1]} \\ &\leqslant \mathcal{N}_\omega\alpha_0(\delta)\big\|f[u](\varphi) - f[u](\overline{\varphi}_1)\big\|_{\mathcal{B}\left([0;t_1];Y\right)} \leqslant \mathcal{N}_\omega\alpha(\delta)\beta_1(M_1)\|\varphi - \overline{\varphi}_1\|_{W[0;t_1]},\end{aligned}$$

откуда, с учетом того, что $\sigma\mathcal{N}_\omega < 1$, следует

$$\big\|\eta - \mathcal{F}_{t_1}[\widetilde{z}]\big\|_{W[0;t_1]} \leqslant \big[\sigma\mathcal{N}_\omega\pi_1 + \ell(C_0)\big]\,\rho(u,\overline{u}) = \pi_1\rho(u,\overline{u}).$$

Следовательно, $\eta \in \Psi_1$. Таким образом, $F_1 : \Psi_1 \to \Psi_1$.

г) Установим сжимаемость оператора $F_1$ на множестве $\Psi_1$. Выберем произвольно $\psi_1$, $\psi_2 \in \Psi_1$ и положим

$$z_s = f[u](\psi_s)(t), \quad t \in [0;t_1], \quad \eta_s = F_1[\psi_s] = \mathcal{F}_{t_1}[z_s] \in \Psi_1, \quad s = 1,2.$$

Аналогично пункту 1,в), имеем:

$$\|z_s\|_{\mathcal{B}([0;t_1];Y)} \leqslant \omega, \quad \|\eta_s\|_{W[0;t_1]} \leqslant M_1, \quad s = 1,2.$$

Пользуясь условием $\mathbf{G}_2$), оценим

$$\|\eta_1-\eta_2\|_{W[0;t_1]} \leqslant \mathcal{N}_\omega \alpha_0(\delta)\,\|z_1-z_2\|_{\mathcal{B}([0;t_1];Y)},$$

где, согласно условию $\mathbf{F}_2$),

$$\|z_1-z_2\|_{\mathcal{B}([0;t_1];Y)} \leqslant \alpha_1(\delta)\beta_1(M_1)\|\psi_1-\psi_2\|_{W[0;t_1]},$$

следовательно,

$$\|\eta_1-\eta_2\|_{W[0;t_1]} \leqslant \mathcal{N}_\omega \alpha(\delta)\beta_1(M_1)\,\|\psi_1-\psi_2\|_{W[0;t_1]} \leqslant \mathcal{N}_\omega\sigma\,\|\psi_1-\psi_2\|_{W[0;t_1]},$$

где $\mathcal{N}_\omega\sigma<1$. Это означает, что оператор $F_1$ является сжимающим на множестве $\Psi_1$.

д) Согласно принципу сжимающих отображений, заключаем, что уравнение $(\mathcal{E}_1)$ имеет единственное решение в множестве $\Psi_1$, то есть решение $\varphi_1\in W_0[0;t_1]$, удовлетворяющее оценке:

$$\big\|\varphi_1-\mathcal{F}_{t_1}[\widetilde{z}]\big\|_{W[0;t_1]} \leqslant \pi_1\,\rho(u,\overline{u}).$$

Как уже было показано в пункте 1,в), из того факта, что $\varphi_1\in\Psi_1$, вытекают неравенства:

$$\|\varphi_1-\overline{\varphi}_1\|_{W[0;t_1]} \leqslant C_1\,\rho(u,\overline{u}), \quad \|\varphi_1\|_{W[0;t_1]} \leqslant M_1.$$

2. Действуя по индукции, предположим, что мы уже доказали существование решения $\varphi_{j-1}\in W_0[0;t_{j-1}]$ уравнения $(\mathcal{E}_{j-1})$, $j\in\overline{2,m}$, удовлетворяющего оценкам:

$$\|\varphi_{j-1}\|_{W[0;t_{j-1}]} \leqslant M_1, \|\varphi_{j-1}-\overline{\varphi}_{j-1}\|_{W[0;t_{j-1}]} \leqslant C_{j-1}\,\rho(u,\overline{u}).$$

Исходя из этого предположения, докажем, что аналогичное утверждение справедливо также и для уравнения $(\mathcal{E}_j)$.

Определим множество $\Psi_j$ как множество всех $\psi\in\Phi[t_j,\varphi_{j-1}]$ таких, что

$$\big\|\psi-\mathcal{F}_{t_j}[\widetilde{z}]\big\|_{W[0;t_j]} \leqslant \pi_j\,\rho(u,\overline{u}), \qquad \widetilde{z}=Z[t_{j-1},t_j,\gamma,u,\overline{u},\varphi_{j-1},\overline{\varphi}_j], \tag{3.3}$$

см. условие $\mathbf{F}_3$):

$$\widetilde{z}\in\mathcal{B}\big([0;t_j];Y\big), \qquad \widetilde{z}\,\big|_{[0;t_{j-1}]}=f[u](\varphi_{j-1}), \qquad \gamma=\rho(u,\overline{u}).$$

а) Покажем, что $\Psi_j\neq\emptyset$. Действительно, $\psi=\mathcal{F}_{t_j}[\widetilde{z}]\in W_0[0;t_j]$, удовлетворяет оценке (3.3) и при этом по условию $\mathbf{G}_1$)

$$\psi\Big|_{[0;t_{j-1}]}=\mathcal{F}_{t_{j-1}}\big[\widetilde{z}\,\big|_{[0;t_{j-1}]}\big]=\mathcal{F}_{t_{j-1}}\big[f[u](\varphi_{j-1})\big]=\varphi_{j-1},$$

следовательно, $\psi\in\Phi[t_j,\varphi_{j-1}]$, и таким образом, $\psi\in\Psi_j$.

б) С учетом леммы 3.1, замкнутость множества $\Psi_j$ доказывается совершенно аналогично тому, как это было сделано для множества $\Psi_1$.

в) Определим оператор $F_j:\Psi_j\to W_0[0;t_j]$ с помощью формулы

$$\eta=F_j[\varphi]=\mathcal{F}_{t_j}[z], \quad \text{где} \quad z=f[u](\varphi), \quad \varphi\in\Psi_j.$$

Покажем, что $\eta\in\Psi_j$. Согласно (3.3) и условиям $\mathbf{F}_3$), $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$),

$$\begin{aligned}\|\widetilde{z}-\overline{z}_j\|_{\mathcal{B}\left([t_{j-1};t_j];Y\right)} &\leqslant \beta_0(M_1)\Big(\rho(u,\overline{u})+\big\|f[u](\varphi_{j-1})-f[u](\overline{\varphi}_{j-1})\big\|_{\mathcal{B}\left([0;t_{j-1}];Y\right)}\Big)\\ &\leqslant \beta_0(M_1)\Big\{\rho(u,\overline{u})+\beta_1(M_1)\aleph_1\|\varphi_{j-1}-\overline{\varphi}_{j-1}\|_{W[0;t_{j-1}]}\Big\}.\end{aligned}$$

Аналогично, по условиям $\mathbf{F}_2$), $\mathbf{F}_1$),

$$\begin{aligned}\|\widetilde{z}-\overline{z}_j\|_{\mathcal{B}\left([0;t_{j-1}];Y\right)} &=\big\|f[u](\varphi_{j-1})-f[\overline{u}](\overline{\varphi}_{j-1})\pm f[u](\overline{\varphi}_{j-1})\big\|_{\mathcal{B}\left([0;t_{j-1}];Y\right)}\\ &\leqslant \beta_1(M_1)\aleph_1\|\varphi_{j-1}-\overline{\varphi}_{j-1}\|_{W[0;t_{j-1}]}+\rho(u,\overline{u}).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\widetilde{z}-\overline{z}_j\|_{\mathcal{B}\left([0;t_j];Y\right)} \leqslant \big\{\beta_0(M_1)+1\big\}\rho(u,\overline{u})+\aleph_2\|\varphi_{j-1}-\overline{\varphi}_{j-1}\|_{W[0;t_{j-1}]},$$

и согласно предположению индукции,

$$\|\widetilde{z}-\overline{z}_j\|_{\mathcal{B}\left([0;t_j];Y\right)} \leqslant \Big\{\beta_0(M_1)+1+\aleph_2 C_{j-1}\Big\}\,\rho(u,\overline{u}) = \frac{\ell(C_{j-1})}{\mathcal{N}_\omega\aleph_0}\,\rho(u,\overline{u}).$$

В частности, учитывая, что

$$C_{j-1}\rho(u,\overline{u})\leqslant C_k\rho(u,\overline{u})\leqslant M, \qquad \rho(u,\overline{u})\leqslant M,$$

имеем:

$$\|\widetilde{z}-\overline{z}_j\|_{\mathcal{B}\left([0;t_j];Y\right)} \leqslant \big[\beta_0(M_1)+1+\aleph_2\big]\,M.$$

Следовательно,

$$\|\widetilde{z}\|_{\mathcal{B}\left([0;t_j];Y\right)} \leqslant \gamma_1+\big[\beta_0(M_1)+1+\aleph_2\big]\,M\leqslant\omega, \qquad \|\overline{z}_j\|_{\mathcal{B}\left([0;t_j];Y\right)}\leqslant\gamma_1\leqslant\omega.$$

Оценим

$$\|\varphi-\overline{\varphi}_j\|_{W[0;t_j]}\leqslant\big\|\varphi-\mathcal{F}_{t_j}[\widetilde{z}]\big\|_{W[0;t_j]}+\big\|\mathcal{F}_{t_j}[\widetilde{z}]-\mathcal{F}_{t_j}[\overline{z}_j]\big\|_{W[0;t_j]}.$$

Отсюда, пользуясь определением множества $\Psi_j$ и условием $\mathbf{G}_2$), получаем:

$$\|\varphi-\overline{\varphi}_j\|_{W[0;t_j]}\leqslant\pi_j\rho(u,\overline{u})+\mathcal{N}_\omega\aleph_0\|\widetilde{z}-\overline{z}_j\|_{\mathcal{B}\left([0;t_j];Y\right)}\leqslant\big[\pi_j+\ell(C_{j-1})\big]\,\rho(u,\overline{u}), \tag{3.4}$$

то есть

$$\|\varphi-\overline{\varphi}_j\|_{W[0;t_j]}\leqslant C_j\rho(u,\overline{u})\leqslant M.$$

Следовательно,

$$\|\varphi\|_{W[0;t_j]}\leqslant\|\overline{\varphi}_j\|_{W[0;t_j]}+M\leqslant M_0+M=M_1.$$

Согласно условиям $\mathbf{F}_2$), $\mathbf{F}_1$),

$$\begin{aligned}\|z\|_{\mathcal{B}\left([0;t_j];Y\right)} =&\big\|f[u](\varphi)\pm f[u](\overline{\varphi}_j)\big\|_{\mathcal{B}\left([0;t_j];Y\right)}\leqslant\aleph_1\beta_1(M_1)\|\varphi-\overline{\varphi}_j\|_{W[0;t_j]}\\ &+\big\|f[u](\overline{\varphi}_j)\pm f[\overline{u}](\overline{\varphi}_j)\big\|_{\mathcal{B}\left([0;t_j];Y\right)}\leqslant\aleph_1\beta_1(M_1)\,M+M+\gamma_1\leqslant\omega.\end{aligned}$$

Поскольку

$$\varphi\in\Phi[t_j,\varphi_{j-1}], \qquad \psi=\mathcal{F}_{t_j}[\widetilde{z}]\in\Phi[t_j,\varphi_{j-1}]$$

(см. пункт 2,a)), то по лемме 3.2, см. (3.1),

$$z\,\Big|_{[0;t_{j-1}]}=f[u](\varphi)\,\Big|_{[0;t_{j-1}]}=f[u](\psi)\,\Big|_{[0;t_{j-1}]}.$$

При этом, как уже было показано в пункте 2,a), $\psi\,\Big|_{[0;t_{j-1}]}=\varphi_{j-1}$. Стало быть, согласно условию $\mathbf{F}_1$),

$$z\,\Big|_{[0;t_{j-1}]}=f[u](\varphi_{j-1})=\widetilde{z}\,\Big|_{[0;t_{j-1}]}. \tag{3.5}$$

С учетом этого, пользуясь теперь условиями $\mathbf{G}_2$), $\mathbf{F}_2$), получаем:

$$\begin{aligned}\big\|\eta-\mathcal{F}_{t_j}[\widetilde{z}]\big\|_{W[0;t_j]} =&\big\|\mathcal{F}_{t_j}[z]-\mathcal{F}_{t_j}[\widetilde{z}]\big\|_{W[0;t_j]}\\ \leqslant&\mathcal{N}_\omega\alpha_0(\delta)\big\|f[u](\varphi)-f[u](\overline{\varphi}_j)\big\|_{\mathcal{B}\left([t_{j-1};t_j];Y\right)}\leqslant\mathcal{N}_\omega\alpha(\delta)\beta_1(M_1)\|\varphi-\overline{\varphi}_j\|_{W[0;t_j]},\end{aligned}$$

откуда, в силу (3.4), и учитывая, что $\alpha(\delta)\beta_1(M_1)\leqslant\sigma$, $\sigma\mathcal{N}_\omega<1$,

$$\big\|\eta-\mathcal{F}_{t_j}[\widetilde{z}]\big\|_{W[0;t_j]}\leqslant\big[\sigma\mathcal{N}_\omega\pi_j+\ell(C_{j-1})\big]\,\rho(u,\overline{u})=\pi_j\rho(u,\overline{u}).$$

Таким образом, $\eta$ удовлетворяет оценке вида (3.3).

Покажем, что $\eta\in\Phi[t_j,\varphi_{j-1}]$. Действительно, в силу (3.5), условия $\mathbf{G}_1$) и предположения индукции, получаем, что это свойство выполняется в усиленной форме:

$$\eta\,\Big|_{[0;t_{j-1}]}=\mathcal{F}_{t_{j-1}}\Big[z\,\big|_{[0;t_{j-1}]}\Big]=\mathcal{F}_{t_{j-1}}\Big[f[u](\varphi_{j-1})\Big]=\varphi_{j-1}. \tag{3.6}$$

Таким образом, $\eta \in \Psi_j$, следовательно, $F_j : \Psi_j \to \Psi_j$.

г) Установим сжимаемость оператора $F_j$ на множестве $\Psi_j$. Выберем произвольно $\psi_1$, $\psi_2 \in \Psi_j$ и положим

$$z_s = f[u](\psi_s), \quad \eta_s = F_j[\psi_s] = \mathcal{F}_{t_j}[z_s], \quad s = 1, 2.$$

Аналогично пункту 2,в), имеем:

$$\|z_s\|_{\mathcal{B}([0;t_j];Y)} \leqslant \omega, \quad \|\eta_s\|_{W[0;t_j]} \leqslant M_1, \quad s = 1, 2.$$

С учетом леммы 3.2, см. (3.1), имеем:

$$z_1 \Big|_{[0;t_{j-1}]} = f[u](\psi_1) \Big|_{[0;t_{j-1}]} = f[u](\psi_2) \Big|_{[0;t_{j-1}]} = z_2 \Big|_{[0;t_{j-1}]},$$

так как $\psi_s \in \Phi[t_j, \varphi_{j-1}]$, $s = 1, 2$. Поэтому, пользуясь условиями $\mathbf{G}_2$), $\mathbf{F}_2$), получаем:

$$\begin{aligned}\|\eta_1 - \eta_2\|_{W[0;t_j]} \leqslant& \mathcal{N}_\omega \alpha_0(\delta) \, \|z_1 - z_2\|_{\mathcal{B}([t_{j-1};t_j];Y)} = \mathcal{N}_\omega \alpha_0(\delta) \, \|f[u](\psi_1) - f[u](\psi_2)\|_{\mathcal{B}([t_{j-1};t_j];Y)} \\ \leqslant& \mathcal{N}_\omega \alpha(\delta) \beta_1(M_1) \, \|\psi_1 - \psi_2\|_{W[0;t_j]} \leqslant \mathcal{N}_\omega \sigma \|\psi_1 - \psi_2\|_{W[0;t_j]},\end{aligned}$$

где $\mathcal{N}_\omega \sigma < 1$. Это означает, что оператор $F_j$ является сжимающим на множестве $\Psi_j$.

д) Согласно принципу сжимающих отображений, заключаем, что уравнение $(\mathcal{E}_j)$ имеет единственное решение в множестве $\Psi_j$, то есть решение $\varphi_j \in \Phi[t_j, \varphi_{j-1}]$, удовлетворяющее оценкам:

$$\|\varphi_j - \overline{\varphi}_j\|_{W[0;t_j]} \leqslant C_j \, \rho(u, \overline{u}), \quad \|\varphi_j\|_{W[0;t_j]} \leqslant M_1,$$

которые получаются аналогично (3.4), исходя из того только, что $\varphi_j \in \Psi_j$. Кроме того, аналогично соотношению (3.6), получаем: $\varphi_j \Big|_{[0;t_{j-1}]} = \varphi_{j-1}$.

3. По индукции делаем вывод, что аналогичное утверждение справедливо и при $j = k$. А это означает, что уравнение (2.2) имеет решение $\varphi \in W_0[0;T]$, удовлетворяющее оценкам:

$$\|\varphi\|_{W[0;T]} \leqslant M_1, \quad \|\varphi - \overline{\varphi}\|_{W[0;T]} \leqslant C_k \, \rho(u, \overline{u}).$$

Единственность решения в пространстве $W[0;T]$ следует из теоремы 2.1.

□

## 4. Пример: начально-краевая задача для системы Навье–Стокса

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega = S \in \mathbb{C}^2$, $T > 0$, $p, r \geqslant 1$, $Q_T = \Omega \times [0;T]$. Помимо стандартных пространств Лебега $L_p(\Omega)$, $L_p(Q_T)$ и анизотропных пространств Лебега $L_{p,r}(Q_T) = L_r\big([0;T]; L_p(\Omega)\big)$, следуя [31], будем также использовать следующие функциональные пространства.

1) Пространство Соболева $W[0;T] = W_p^{2,1}(Q_T)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{W[0;T]} = \sum_{|\mu| \leqslant 2} \|\partial^\mu \varphi\|_{p,Q_T} + \|\partial_t \varphi\|_{p,Q_T},$$

где $\|.\|_{p,Q_T} = \|.\|_{L_p(Q_T)}$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ — мультииндекс,

$$|\mu| = \sum_{i=1}^{3} \mu_i, \quad \partial^\mu \varphi = \frac{\partial^{|\mu|} \varphi}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \partial x_3^{\mu_3}}, \quad \partial_t \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

с обобщенными производными. Будем также использовать следующее обозначение нормы: $\|.\|_{p,r,Q_T} = \|.\|_{L_{p,r}(Q_T)}$.

2) $\mathring{J}_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ — замыкание множества гладких финитных соленоидальных векторов, равных нулю на $S$, в норме $W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ (см. [31, с.177]). Эквивалентной нормой в $\mathring{J}_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ является

$$|||\varphi|||_{p,\Omega} = \inf_{\psi} \|\psi\|_{W[0;1]},$$

где inf берется по всем продолжениям $\psi(x,t)$ (которые, как устанавливается, всегда существуют) вектора $\varphi(x)$ (из данного класса) на множество $Q_1$.

3) Классы $G_p(\Omega)$ и $\overset{\circ}{J}_p(\Omega)$ — см. [31, с.161]. Всякий гладкий финитный вектор $f(x)$ можно представить в виде суммы двух ортогональных в $L_2(\Omega)$ слагаемых:

$$f(x)=\nabla\varphi(x)+g(x),\quad \text{где}\quad \nabla\cdot g=0,\quad g\cdot n(x)\Big|_S=0, \tag{4.1}$$

$n(x)$ — вектор внешней нормали;

$$\Delta\varphi=\nabla\cdot f(x),\quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S=f\cdot n\Big|_S,$$

причем $\nabla\varphi$ и $g$ для всех $\nabla\Phi\in L_{p'}(\Omega)$ удовлетворяют тождествам:

$$(\nabla\varphi,\nabla\Phi)=(f,\nabla\Phi),\quad (g,\nabla\Phi)=0, \tag{4.2}$$

где

$$(\varphi,\psi)=\int\limits_\Omega \varphi\cdot\psi\,dx=\sum_{i=1}^3\int\limits_\Omega \varphi_i(x)\psi_i(x)\,dx.$$

Через $G_p(\Omega)$ обозначается множество всех $\nabla\varphi\in L_p(\Omega)$, а через $\overset{\circ}{J}_p(\Omega)$ — множество всех векторов $g\in L_p(\Omega)$, удовлетворяющих тождеству (4.2). Отметим, что в [31] обозначения $L_p^3(\Omega)$ (пространство вектор-функций) и $L_p(\Omega)$ (пространство скалярных функций) не различаются. Поэтому для лучшего согласования с текстом [31] мы тоже будем использовать это соглашение.

4) Классы $G_p(Q_T)$ и $\overset{\circ}{J}_p(Q_T)$ — подпространства $L_p(Q_T)$, состоящие из векторов, при п.в. $t\in[0;T]$ принадлежащих $G_p(\Omega)$ и $\overset{\circ}{J}_p(\Omega)$, соответственно. Соотношение (4.1) означает, что

$$L_p(\Omega)=G_p(\Omega)\oplus\overset{\circ}{J}_p(\Omega),\quad L_p(Q_T)=G_p(Q_T)\oplus\overset{\circ}{J}_p(Q_T).$$

Следуя [31], будем использовать обозначения: $P_G$ — оператор проектирования $L_p(Q_T)\to G_p(Q_T)$, $P_J$ — оператор проектирования $L_p(Q_T)\to\overset{\circ}{J}_p(Q_T)$.

Прежде всего, следуя [31], рассмотрим начально-краевую задачу для линеаризованной системы Навье–Стокса:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\nu\Delta\varphi+a(x,t)\varphi+\sum_{k=1}^3 a_k(x,t)\varphi_{x_k}+\nabla\mathcal{P}=z(x,t),\ x\in\Omega,\ t\in[0;T], \tag{4.3}$$

$$\nabla\cdot\varphi=0,\quad \text{то есть}\quad \operatorname{div}\varphi=0, \tag{4.4}$$

$$\varphi\Big|_{x\in S}=0,\quad t\in[0;T];\quad \varphi\Big|_{t=0}=\varphi_0(x),\quad x\in\Omega. \tag{4.5}$$

Здесь $\varphi(x,t)=\big(\varphi_1(x,t),\varphi_2(x,t),\varphi_3(x,t)\big)$ — поле скоростей жидкости, $\mathcal{P}(x,t)$ — давление, $\varphi$ и $\mathcal{P}$ — неизвестные; $a(x,t)$, $a_k(x,t)$ — заданные матрицы такие, что

$$\|a\|_{s,\sigma,Q_T}+\sum_{j=1}^3\|a_j\|_{s_1,\sigma_1,Q_T}\leqslant M,$$

где

$$\|a\|_{s,\sigma,Q_T}=\max_{k,m}\|a^{k,m}\|_{s,\sigma,Q_T},\qquad \frac{3}{2s}+\frac{1}{\sigma}<1,\qquad \frac{3}{2s_1}+\frac{1}{\sigma_1}<\frac12;$$

$z=(z_1,z_2,z_3)\in L_p(Q_T)$ — плотность внешних сил, $\nu$ — коэффициент вязкости. В [31] решение задачи (4.3) – (4.5) строится двумя способами: 1) как предел по норме соответствующего пространства классических решений, [31, § 4]; 2) как решение задачи Коши для эволюционного операторного дифференциального уравнения в пространстве $\overset{\circ}{J}_p(\Omega)$. Но результат (в плане условий существования, единственности и оценки решений) в итоге получается один и тот же.

При заданной функции $z \in L_p(Q_T)$ имеем: $z = P_G z + P_J z$, откуда $P_G z$ по умолчанию присоединяется к вектору $\nabla\mathcal{P}$, и после этого $z$ в правой части трактуется как $P_J z$. Отметим, что оператор $P_J$ является ограниченным — см. [31, теорема 2.2 и замечания на с.170, 171].

Решение задачи (4.3)–(4.5) понимаем в смысле [31, § 5], и в соответствии с этим, ищем его как пару $\varphi \in W[0;T]$, $\nabla\mathcal{P} \in L_p(Q_T)$. Справедливо следующее утверждение [31, теорема 4.2, с.177; следствие 2, с.179; § 5].

**Лемма 4.1.** *При сделанных выше предположениях для любой пары $z \in L_p(Q_T)$, $\varphi_0 \in \overset{\circ}{J}{}_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ задача (4.3)–(4.5) имеет единственное решение $\varphi \in W[0;T]$, $\nabla\mathcal{P} \in L_p(Q_T)$, и справедлива оценка*

$$\|\varphi\|_{W[0;T]} + \|\nabla\mathcal{P}\|_{p,Q_T} \leqslant C_1\big(1 + e^{\gamma T}\big)\big\{|||\varphi_0|||_{p,\Omega} + \|z\|_{p,Q_T}\big\}, \tag{4.6}$$

*где константы $C_1$, $\gamma > 0$ не зависят от $T$, $\varphi_0$, $z$.*

**Замечание 4.1.** *При доказательстве оценки (4.6) в [31] неявно используется без каких-либо пояснений неравенство вида (при $\gamma > c_2$):*

$$qb^{q-1}(c_1 a + c_2 b) \leqslant \gamma q b^q + c_3 a^q \quad \forall\, a, b > 0. \tag{4.7}$$

В следующем утверждении устанавливается его справедливость.

**Лемма 4.2.** *Пусть $\gamma > c_2$, $c_1, c_2 > 0$, $q \geqslant 1$. Тогда найдется константа $c_3 = c_3(q, \gamma, c_1, c_2) > 0$ такая, что неравенство (4.7) выполняется для всех $a, b \geqslant 0$.*

*Доказательство.* В случаях $a = 0$, $b = 0$, $q = 1$ утверждение леммы 4.2 тривиально. Поэтому будем предполагать, что $a > 0$, $b > 0$, $q > 1$. Рассмотрим левую часть неравенства (4.7):

$$qb^{q-1}(c_1 a + c_2 b) = \gamma q b^q + (\gamma - c_2) q b^{q-1}\left(\frac{c_1}{\gamma - c_2}\, a - b\right).$$

Обозначим $\beta = \dfrac{c_1}{\gamma - c_2}$. Нам достаточно доказать, что

$$\beta a b^{q-1} - b^q \leqslant \alpha a^q,$$

то есть

$$\beta\left(\frac{a}{b}\right) \leqslant \alpha\left(\frac{a}{b}\right)^q + 1 \quad \forall\, a, b > 0, \tag{4.8}$$

при некотором $\alpha > 0$. В этом случае неравенство (4.7) будет выполнено при $c_3 = \alpha q(\gamma - c_2)$.

Рассмотрим функцию $f(t) = 1 + t^q - \beta t$. Ясно, что $f(0) = 1 > 0$, и по теореме об устойчивости знака непрерывной функции, существует $\bar{t} > 0$: $f(t) > 0$ для всех $t \in [0; \bar{t}]$.

Дальше рассмотрим два случая:

1) $t = \dfrac{a}{b} < \bar{t}$. Тогда (4.8) выполняется при $\alpha = 1$, а тем самым, выполняется (4.7).

2) $t = \dfrac{a}{b} \geqslant \bar{t}$, то есть $b \leqslant \dfrac{a}{\bar{t}}$. Следовательно,

$$qb^{q-1}\big(c_1 a - (\gamma - c_2) b\big) \leqslant q b^{q-1} c_1 a \leqslant \frac{q}{\bar{t}^{q-1}}\, c_1 a^q,$$

то есть (4.7) выполняется при $c_3 = \dfrac{qc_1}{\bar{t}^{q-1}}$.

Таким образом, можно взять $c_3 = \max\left\{q(\gamma - c_2), \dfrac{qc_1}{\bar{t}^{q-1}}\right\}$.

□

Из утверждения и доказательства теоремы 2.1 из [31, с.156] и доказательства леммы 10.1 из [31, с.221], очевидно, что справедливо следующее утверждение.

**Лемма 4.3.** *Пусть $\tau \in (0;\tau]$, $\varphi \in W[0;\tau]$. Если $q_1, r_1, q_2, r_2 \geqslant p > 1$ таковы, что выполняются условия*

$$\rho_1 = 1 - \frac{5}{2p} + \frac{3}{2q_1} + \frac{1}{r_1} \geqslant 0, \qquad \rho_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2p} + \frac{3}{2q_2} + \frac{1}{r_2} \geqslant 0, \tag{4.9}$$

*(при $p_i = \infty$ или $r_i = \infty$ неравенства предполагаются строгими, $i = 1,2$), то имеют место оценки*

$$\|\varphi_i\|_{q_1,r_1,Q_\tau} \leqslant c\big\{\|\varphi\|_{W[0;\tau]} + |||\varphi(.,0)|||_{p,\Omega}\big\}, \tag{4.10}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \|\varphi_{x_i}\|_{q_2,r_2,Q_\tau} \leqslant c\big\{\|\varphi\|_{W[0;\tau]} + |||\varphi(.,0)|||_{p,\Omega}\big\}. \tag{4.11}$$

*Здесь константа $c$ не зависит от $\tau$, $\varphi$ (зависит от области $\Omega$).*

Пусть $\tau \in (0;T]$, $\varphi_0 \in \overset{\circ}{J}{}_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ — произвольно фиксированы. Обозначим $Y = L_p(\Omega)$; $W_0[0;\tau]$ — множество всех $\varphi \in W[0;\tau]$ таких, что

$$|||\varphi(.,0) - \varphi_0|||_{p,\Omega} = 0.$$

Ясно, что

$$L_p(Q_\tau) = L_p\big([0;\tau];Y\big) \equiv \mathcal{B}\big([0;\tau];Y\big).$$

Числа $q_1, r_1, q_2, r_2$ считаем выбранными так, как указано в лемме 4.3. Оператор $\mathcal{F}_\tau : L_p(Q_\tau) \to W_0[0;\tau]$ определим следующим образом. По заданному $z \in L_p(Q_\tau)$ находим пару $\varphi \in W_0[0;\tau]$ и $\nabla\mathcal{P} \in L_p(Q_\tau)$ как решение задачи (4.3)–(4.5) при $T = \tau$. После этого полагаем $\mathcal{F}_\tau[z] = \varphi$. В силу интегрального представления [31, (5.5)] ясно, что условие $\mathbf{G}_1$) выполняется. Предположение $\mathbf{G}_2$) выполняется согласно лемме 4.1 при $\mathcal{N}(\omega) = \mathcal{N} = C_1(1 + e^{\gamma T})$, $\alpha_0 \equiv 1$. Выполнение предположения $\mathbf{G}_3$) очевидно, поскольку, согласно лемме 4.1,

$$\|\mathcal{F}_\tau(0)\|_{W[0;\tau]} \leqslant \mathcal{N}|||\varphi_0|||_{p,\Omega}.$$

Далее рассмотрим задачу (4.4) – (4.5) для (сначала — неуправляемой) нелинейной системы Навье–Стокса

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \nu\Delta\varphi + a(x,t)\varphi + \sum_{k=1}^{3} a_k(x,t)\varphi_{x_k} + \nabla\mathcal{P} = f[\varphi](x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{4.12}$$

где

$$f[\varphi](x,t) = g(x,t) - \sum_{k=1}^{3} \varphi_k\varphi_{x_k}, \quad g \in L_p(Q_T), \quad p \geqslant \frac{5}{3}.$$

Получим необходимые нам оценки для правой части $f$. При этом будем использовать некоторые элементы построений, проведенных в [31, § 10]. Найдем числа $\sigma$, $q \geqslant 1$, исходя из условий:

$$\max\left\{\frac{7}{2p} - \frac{3}{2}, 0\right\} \leqslant \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{p}, \tag{4.13}$$

$$1 + \frac{3}{2pq} - \frac{5}{2p} > 0, \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{2pq'} - \frac{5}{2p} > 0, \tag{4.14}$$

где $q'$ — сопряженное к $q$. Покажем, что система (4.13), (4.14) непротиворечива. Возьмем, например, $q = 2$. Тогда $q' = 2$, и условие (4.14) принимает вид:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4p} - \frac{5}{2p} > 0 \Leftrightarrow 2p + 3 - 10 > 0 \Leftrightarrow p > \frac{7}{2}.$$

Соответственно,

$$\frac{7}{2p} - \frac{3}{2} < 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2},$$

и (4.13) конкретизируется как
$$0 \leqslant \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{p} \Leftrightarrow \sigma > p.$$
Из (4.14), согласно лемме 4.3, следует, что для $\varphi \in W[0;\tau]$, $r \in (1;\infty)$ имеем:
$$\varphi \in L_{pq,\sigma r}(Q_\tau), \quad \varphi_{x_k} \in L_{pq',\sigma r'}(Q_\tau).$$
Обозначим
$$H[\varphi] = H[\varphi,\varphi], \quad H[\varphi,\psi] = \sum_{k=1}^{3} \varphi_k \psi_{x_k}, \quad \varphi,\psi \in W[0;\tau].$$
Для $H = H[\varphi,\psi]$, пользуясь неравенством Гельдера, оценим:
$$\|H\|_{p,Q_\tau}^p = \int_0^\tau dt \int_\Omega |H|^p\,dx \leqslant \left(\int_0^\tau 1^{\xi'}\,dt\right)^{\frac{1}{\xi'}} \left(\int_0^\tau \left\{\int_\Omega |H|^p\,dx\right\}^{\xi}\right)^{\frac{1}{\xi}},$$
где
$$\xi = \frac{\sigma}{p} \quad \Rightarrow \quad \xi' = \frac{\xi}{\xi-1} = \frac{\sigma}{\sigma-p}.$$
Таким образом,
$$\|H\|_{p,Q_\tau}^p \leqslant \tau^{1-\frac{p}{\sigma}} \left(\int_0^\tau \|H\|_{p,\Omega}^\sigma\,dt\right)^{\frac{p}{\sigma}},$$
откуда
$$\|H\|_{p,Q_\tau} \leqslant \tau^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}} \|H\|_{p,\sigma,Q_\tau} \leqslant \tau^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}} \sum_{k=1}^{3} \|\varphi_k \psi_{x_k}\|_{p,\sigma,Q_\tau}.$$
По неравенству Гельдера
$$\big\|(\varphi_k \psi_{x_k})(.,t)\big\|_{p,\Omega}^p \leqslant \left(\int_\Omega |\varphi_k|^{pq}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |\psi_{x_k}|^{pq'}\,dx\right)^{\frac{1}{q'}},$$
следовательно,
$$\big\|(\varphi_k \psi_{x_k})(.,t)\big\|_{p,\Omega} \leqslant \|\varphi_k\|_{pq,\Omega} \|\psi_{x_k}\|_{pq',\Omega}.$$
Таким образом,
$$\begin{aligned}\|\varphi_k \psi_{x_k}\|_{p,\sigma,Q_\tau}^\sigma &= \int_0^\tau \|\varphi_k \psi_{x_k}\|_{p,\Omega}^\sigma\,dt \leqslant \int_0^\tau \|\varphi_k\|_{pq,\Omega}^\sigma \|\psi_{x_k}\|_{pq',\Omega}^\sigma\,dt \\ &\leqslant \left(\int_0^\tau \|\varphi_k\|_{pq,\Omega}^{\sigma r}\,dt\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^\tau \|\psi_{x_k}\|_{pq',\Omega}^{\sigma r'}\,dt\right)^{\frac{1}{r'}},\end{aligned}$$
то есть справедлива

**Лемма 4.4.** *Для любых $\varphi$, $\psi \in W[0;\tau]$ справедливы оценки*
$$\|\varphi_k \psi_{x_k}\|_{p,\sigma,Q_\tau} \leqslant \|\varphi_k\|_{pq,\sigma r,Q_\tau} \|\psi_{x_k}\|_{pq',\sigma r',Q_\tau}, \tag{4.15}$$
$$\|H\|_{p,Q_\tau} \leqslant \tau^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}} \sum_{k=1}^{3} \|\varphi_k\|_{pq,\sigma r,Q_\tau} \|\psi_{x_k}\|_{pq',\sigma r',Q_\tau}. \tag{4.16}$$

Непосредственно из леммы 4.4 следует

**Лемма 4.5.** *Пусть* $\tau,\xi\in(0;T]$, $\tau\leqslant\xi$, $\varphi,\psi\in W[0;\xi]$. *Тогда*

$$\|H\|_{L_p\left([\tau;\xi];Y\right)}\leqslant c(\xi-\tau)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}}\sum_{k=1}^{3}\|\psi_{x_k}\|_{pq',\sigma r',Q_\tau}\big\{\|\varphi\|_{W[0;\tau]}+|||\varphi(.,0)|||_{p,\Omega}\big\},$$

$$\|H\|_{L_p\left([\tau;\xi];Y\right)}\leqslant c(\xi-\tau)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}}\sum_{k=1}^{3}\|\varphi_k\|_{pq,\sigma r,Q_\tau}\big\{\|\psi\|_{W[0;\tau]}+|||\psi(.,0)|||_{p,\Omega}\big\}.$$

Рассмотрим разность

$$H[\varphi]-H[\psi]=\sum_{k=1}^{3}\big(\varphi_k\varphi_{x_k}-\psi_k\psi_{x_k}\big)=H[\varphi-\psi,\varphi]+H[\psi,\varphi-\psi].$$

Таким образом, непосредственно из лемм 4.3, 4.5 вытекает

**Лемма 4.6.** *Пусть* $0\leqslant\tau\leqslant\xi\leqslant T$, $\varphi,\psi\in W_0[0;\xi]$,

$$\|\varphi\|_{W[0;\xi]}\leqslant M,\quad \|\psi\|_{W[0;\xi]}\leqslant M.$$

*Тогда*

$$\big\|H[\varphi]-H[\psi]\big\|_{L_p\left([\tau;\xi];Y\right)}\leqslant\alpha_1(\xi-\tau)\beta_1(M)\|\varphi-\psi\|_{W[0;\tau]},\tag{4.17}$$

*где* $\alpha_1(\delta)=\delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}}$, $\beta_1(M)=3c^2\big(M+|||\varphi_0|||_{p,\Omega}\big)$.

**Замечание 4.2.** *Неравенство* (4.17) *из утверждения леммы 4.6 означает, что* $H[\varphi]$ *удовлетворяет условию* $\mathbf{F}_2$). *Выполнение условия* $\mathbf{F}_1$) *очевидно. Условие* $\mathbf{F}_3$) *выполнено согласно лемме 2.1.*

Пусть теперь имеется управляемый оператор

$$g=g[u](\varphi)(x,t),\quad u\in U,$$

удовлетворяющий условиям $\mathbf{F}_1$) – $\mathbf{F}_2$) с параметрами $\alpha_1=\alpha_g$, $\beta_1=\beta_g$. В частности, с физической точки зрения, представляет интерес управление плотностью внешних сил по принципу обратной связи с линейным шаблоном: $g=u_1(x,t)+u_2(x,t)\varphi(x,t)$. Соответствующая задача может рассматриваться как задача с программным управлением $u=(u_1,u_2)$. Ясно, что в случае $u_1\in L_p(Q_T)$, $u_2\in L_{pq',\sigma r'}(Q_T)$ можно получить оценки такого же типа, которые были получены выше для функции $H[\varphi]$.

Рассмотрим оператор правой части: $f[u](\varphi)=g[u](\varphi)-H[\varphi]$. Очевидно, что $f[u]$ удовлетворяет условиям $\mathbf{F}_1$) – $\mathbf{F}_2$). Условие $\mathbf{F}_3$) выполнено согласно лемме 2.1.

Рассмотрим задачу (4.4) – (4.5) для управляемой нелинейной системы Навье–Стокса

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\nu\Delta\varphi+a(x,t)\varphi+\sum_{k=1}^{3}a_k(x,t)\varphi_{x_k}+\nabla\mathcal{P}=f[u](\varphi)(x,t),\ (x,t)\in Q_T.\tag{4.18}$$

Итак, мы установили, что при сделанных предположениях задача (4.4) – (4.5) для уравнения (4.18) обладает свойством УСГР.

Заметим, что в [31, § 10] однозначная разрешимость задачи (4.4) – (4.5) для неуправляемого уравнения вида (4.12) была доказана лишь при условии, что финальное время $T$ достаточно мало.

Вообще, за исключением некоторых частных случаев (отсутствие вынуждающих сил $g=0$, задачи с осевой симметрией и т.д.), и даже для этих частных случаев, вопросы глобальной разрешимости и единственности решений нелинейных нестационарных систем Навье–Стокса исследовались, главным образом, по отдельности (в различных классах), см., например, [32–39]. Выделение одного класса, в котором одновременно удалось бы доказать глобальную разрешимость и единственность решения системы в общем случае, до сих пор является актуальной проблемой.

Отметим, наконец, [3, глава 3, §,4–5; глава 4], где рассматривалась задача (4.4)–(4.5) для уравнения вида (4.12) при $a = 0$, $a_k = 0$, $k = \overline{1,3}$, в котором функция $g(t, x)$ понималась как управление (в задаче о минимизации работы при разгоне покоящейся $\varphi_0 = 0$ жидкости до заданной скорости). Была доказана всюду плотность множества управлений, для которых существует единственное глобальное решение (при произвольно фиксированном $T > 0$), в пространстве правых частей. Там же было отмечено, что единственность решения удается доказать именно лишь в классе достаточно гладких функций (например, $W[0;T]$), но в таком классе существование решения при произвольном $T > 0$, вообще говоря, не доказано (задача некорректно поставлена).

## 5. Пример: уравнение Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$. Следуя [11], введем следующие обозначения.

$\mathbb{H}_0^m(\Omega)$ — гильбертово пространство измеримых функций, имеющих нулевой след на $\partial\Omega$, у которых при $m \in \mathbb{N}$ существуют обобщенные производные до порядка $m$ включительно из пространства $L_2(\Omega)$, со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{\mathbb{H}_0^m} = \sum_{|\mu| \leqslant m} (\partial^\mu \varphi, \partial^\mu \psi)_2,$$

где $(.,.)_2$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$;

$\mathbb{H}^{-m}(\Omega)$ — гильбертово пространство, сопряженное к $\mathbb{H}_0^m(\Omega)$, каждый элемент которого можно представить в виде

$$\varphi = \sum_{|\mu| \leqslant m} \partial^\mu g_\mu, \quad g_\mu \in L_2(\Omega);$$

так написано в [11]. Здесь имеется в виду, что $\varphi$ — линейный непрерывный функционал на $\mathbb{H}_0^m(\Omega)$, действие которого на элемент $\psi \in \mathbb{H}_0^m(\Omega)$ обозначается как $\langle \varphi, \psi \rangle$, называется «скобкой двойственности» между пространствами $\mathbb{H}_0^m(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-m}(\Omega)$, и вычисляется по формуле:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{|\mu| \leqslant m} (-1)^{|\mu|} (g_\mu, \partial^\mu \psi)_2 = \sum_{|\mu| \leqslant m} (-1)^{|\mu|} \int\limits_\Omega g_\mu \, \partial^\mu \psi \, dx.$$

Подробнее см., например, в [40, п.1.2.16].

$\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$ — банахово пространство измеримых функций, у которых существуют обобщенные производные до порядка $k$ включительно из пространства $L_p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, с нормой

$$\|\varphi\|_{k,p} = \sum_{|\mu| \leqslant k} \|\partial^\mu \varphi\|_p,$$

где $\|.\|_p$ — норма в $L_p(\Omega)$;

$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$ — банахово пространство элементов из $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$, имеющих нулевой след на $\partial\Omega$;

$\mathbb{W}^{-k,p'}(\Omega)$ — банахово пространство, сопряженное к $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$, $p' = \dfrac{p}{p-1}$, элементы которого можно представить в виде:

$$\varphi = \sum_{|\mu| \leqslant k} \partial^\mu g_\mu, \quad g_\mu \in L_{p'}(\Omega);$$

$\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(m,\delta)}$ — граница области $\Omega$ может быть в окрестности каждой точки $x \in \partial\Omega$ представлена локальными координатами:

$$\xi_i = \Phi_i(\xi_1, \ldots, \xi_{\ell-1}, \eta), \quad i = \overline{1, \ell-1},$$

причем функции $\Phi_i$ являются $m$ раз непрерывно дифференцируемыми по всем переменным, и $\Phi_i^{(m)}$, $m \in \mathbb{Z}_+^\ell$, являются гельдеровыми с показателем $\delta \in (0; 1]$.

Положим $Y = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $Y^- = \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Следуя [11, § 11], рассмотрим первую начально-краевую задачу для (сначала — неуправляемого) трехмерного уравнения Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса (ББМБ):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\varphi - \varphi) + \Delta\varphi + \varphi\varphi_{x_1} + \varphi^3 = 0,\ (x,t) \in Q_T = \Omega \times (0;T], \tag{5.1}$$

$$\varphi(x,t)\,\big|_{\partial\Omega} = 0; \quad \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{5.2}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0;1]$. Как указано в [11, § 11], данная задача возникает при исследовании нестационарных процессов в полупроводниках при наличии источников и внешнего постоянного, однородного, электрического поля. Сильное обобщенное решение задачи (5.1), (5.2) определяется как функция класса $\mathbb{C}^{(1)}\big([0;T];Y\big)$, удовлетворяющая условиям:

$$\big\langle \Delta\varphi' - \varphi' + \Delta\varphi + \varphi\varphi_{x_1} + \varphi^3, w\big\rangle = 0 \quad \forall w \in Y, \quad t \in [0;T];$$

$$\varphi(0) = \varphi_0 \in Y,$$

где $\langle .,. \rangle$ — скобка двойственности между пространствами $Y$ и $Y^-$; оператор $A_1 = -\Delta\varphi : Y \to Y^-$ понимается в смысле:

$$\langle A_1\varphi, \psi\rangle = (\nabla\varphi, \nabla\psi)_2 \quad \forall\, \varphi, \psi \in Y.$$

Следуя [11], обозначим

$$A\varphi = -\Delta\varphi + \varphi,\ F_1(\varphi) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\varphi^2}{\partial x_1},\ F_2(\varphi) = \varphi^3,\ F(\varphi) = \varphi + F_1(\varphi) + F_2(\varphi),$$

и сведем задачу (5.1), (5.2) к абстрактной задаче Коши для операторного дифференциального уравнения:

$$A\,\frac{d\varphi}{dt} + A\varphi = F(\varphi), \quad \varphi(0) = \varphi_0 \in Y.$$

Как указано в [11, § 11], оператор $A : Y \to Y^-$ обладает обратным липшиц-непрерывным оператором:

$$\|A^{-1}z_1 - A^{-1}z_2\|_Y \leqslant \|z_1 - z_2\|_{Y^-} \quad \forall\, z_1, z_2 \in Y^-,$$

и более того, указанная задача Коши эквивалентна абстрактному интегральному уравнению:

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-t} + \int_0^t ds\, e^{-(t-s)} A^{-1} F(\varphi), \quad \varphi \in L_\infty\big([0;T];Y\big). \tag{5.3}$$

Рассмотрим соответствующее уравнение с фиксированной правой частью $z \in L_\infty\big([0;T];Y\big)$:

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-t} + \int_0^t ds\, e^{-(t-s)} z(s), \quad \varphi \in L_\infty\big([0;T];Y\big). \tag{5.4}$$

Ясно, что при любом $\tau \in (0;T]$

$$\|\varphi\|_{L_\infty\left([0;\tau];Y\right)} \leqslant \|\varphi_0\|_Y + \int_0^\tau \|z(s)\|_Y\, ds. \tag{5.5}$$

Формула (5.4) при каждом $\tau \in (0;T]$ определяет оператор

$$\mathcal{F}_\tau : W[0;\tau] \to W_0[0;\tau],$$

где мы формально приняли обозначения

$$W_0[0;\tau] = W[0;\tau] = L_\infty\big([0;\tau];Y\big).$$

Условие $\mathbf{G}_1$) выполняется очевидным образом, см. (5.4). Если $z_1$, $z_2 \in W[0;\xi]$, $z_1 \big|_{[0;\tau]} = z_2 \big|_{[0;\tau]}$, то в силу (5.4), (5.5), получаем:

$$\big\|\mathcal{F}_\xi[z_1] - \mathcal{F}_\xi[z_2]\big\|_{W[0;\xi]} \leqslant \int\limits_\tau^\xi \big\|z_1(s) - z_2(s)\big\|_Y \, ds \leqslant (\xi - \tau)\|z_1 - z_2\|_{L_\infty\left([\tau;\xi];Y\right)}.$$

Это означает, что условие $\mathbf{G}_2$) выполнено при $\mathcal{N} \equiv 1$, $\alpha_0(t) = t$. Условие $\mathbf{G}_3$) тоже выполнено, поскольку $\mathcal{F}_\tau(0) = \varphi_0$.

Определим оператор $G(\varphi) = A^{-1}F(\varphi)$. Как видно из [11, § 11], $G(\varphi)$ можно рассматривать как оператор $G : W[0;\tau] \to W[0;\tau]$, и более того, справедливы оценки:

$$\big\|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)\big\|_{Y^-} \leqslant \mu(M)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_Y \quad \forall\, \varphi_i \in Y, \quad \|\varphi_i\|_Y \leqslant M, \quad i = 1, 2;$$
$$\big\|G(\varphi_1) - G(\varphi_2)\big\|_Y \leqslant \mu(M)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_Y \quad \forall\, \varphi_i \in Y, \quad \|\varphi_i\|_Y \leqslant M, \quad i = 1, 2.$$

Стало быть,

$$\big\|G(\varphi_1) - G(\varphi_2)\big\|_{L_\infty\left([\tau;\xi];Y\right)} \leqslant \mu(M)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W[0;\tau]}$$

для всех $\varphi_i \in W[0;\tau]$, $\|\varphi_i\|_{W[0;\tau]} \leqslant M$, $i = 1, 2$. Таким образом, оператор $G$ удовлетворяет условию $\mathbf{F}_2$) при $\alpha_1 \equiv 1$, $\beta_1(M) = \mu(M)$. Выполнение условия $\mathbf{F}_1$) очевидно, поскольку справа нет явной зависимости от переменной времени $t$ (кроме неявной — в аргументе $\varphi$). Выполнение условия $\mathbf{F}_3$) вытекает непосредственно из леммы 2.1. Уравнение (5.3) равносильно уравнению

$$\varphi = \mathcal{F}_T\big[G(\varphi)\big], \quad \varphi \in W[0;T].$$

И как было показано, все условия $\mathbf{G}_1$) – $\mathbf{G}_3$), $\mathbf{F}_1$) – $\mathbf{F}_3$) для него выполнены. Отметим, что [11, § 11]

$$\mathcal{F}_\tau : L_\infty\big([0;\tau];Y\big) \to \mathbb{AC}\big([0;\tau];Y\big), \qquad \mathcal{F}_\tau : \mathbb{C}\big([0;\tau];Y\big) \to \mathbb{C}^{(1)}\big([0;\tau];Y\big),$$
$$\mathcal{F}_\tau G : L_\infty\big([0;\tau];Y\big) \to \mathbb{AC}\big([0;\tau];Y\big), \qquad \mathcal{F}_\tau G : \mathbb{AC}\big([0;\tau];Y\big) \to \mathbb{C}^{(1)}\big([0;\tau];Y\big).$$

Поэтому решение на самом деле принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}\big([0;\tau];Y\big)$.

Рассмотрим теперь соответствующий управляемый аналог

$$A\,\frac{d\varphi}{dt} + A\varphi = F(\varphi) + g[u](\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{C}^{(1)}\big([0;T];Y\big),$$

равносильный уравнению

$$\varphi = \mathcal{F}_T\big[f[u](\varphi)\big], \quad \varphi \in W[0;T],$$

где $f[u](\varphi) = A^{-1}\big[F(\varphi) + g[u](\varphi)\big]$. Будем предполагать, что

$$g[u] : Y \to Y^-, \quad g[u] : L_\infty\big([0;\tau];Y\big) \to L_\infty\big([0;\tau];Y^-\big), \quad \tau \in (0;T],$$

$$g[u] : \mathbb{AC}\big([0;T];Y\big) \to \mathbb{AC}\big([0;T];Y^-\big), \quad u \in U,$$

$$\big\|g[u](\varphi_1) - g[u](\varphi_2)\big\|_{Y^-} \leqslant \mu_g(M) \quad \forall\, \varphi_i \in Y, \quad \|\varphi_i\|_Y \leqslant M, \quad i = 1, 2.$$

Тогда условия $\mathbf{F}_1$) – $\mathbf{F}_3$) оператором $f[u](\varphi)$ удовлетворяются аналогично тому, как это было для $G(\varphi)$, $\alpha_1 \equiv 1$, $\beta_1(M) = \mu(M) + \mu_g(M)$. Таким образом, согласно теореме 2.2, имеет место свойство УСГР.

Отметим, что в [11] для задачи (5.1), (5.2) были доказаны локальная разрешимость и существование максимального решения, а также указан способ вычисления отрезка $[T_1;T_2]$ такого, что при $T \in (0;T_1)$ существует единственное глобальное решение, а при $T \geqslant T_2$ происходит разрушение решения.

## 6. Пример: сильно нелинейные псевдопараболические уравнения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — поверхностно односвязная ограниченная область. Следуя [11, п.8.1], рассмотрим в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0;T] \ni (x,t)$ (сначала — неуправляемые) начально-краевые задачи для сильно нелинейных псевдопараболических уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\Delta\varphi - \varphi) + \varphi\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \varphi^3 = 0; \\ \varphi\,\big|_{\partial\Omega} = 0,\ t \in [0;T];\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x),\ x \in \Omega;\ \partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}; \end{cases} \tag{6.1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(-\Delta^2\varphi + \Delta\varphi) + \varphi\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \mathrm{div}\,(|\nabla\varphi|^2\nabla\varphi) = 0; \\ \varphi\,\big|_{\partial\Omega} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\,\big|_{\partial\Omega} = 0,\ t \in [0;T];\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x),\ x \in \Omega;\ \partial\Omega \in \mathbb{C}^{(4,\delta)}; \end{cases} \tag{6.2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(-\Delta^2\varphi + \Delta\varphi) + \sum\limits_{i=1}^{3} b_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}\prod\limits_{j\neq i}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j} - \mathrm{div}\,(|\nabla\varphi|^2\nabla\varphi) = 0; \\ \varphi\,\big|_{\partial\Omega} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\,\big|_{\partial\Omega} = 0,\ t \in [0;T];\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x),\ x \in \Omega;\ \partial\Omega \in \mathbb{C}^{(4,\delta)}; \end{cases} \tag{6.3}$$

где $b_1 + b_2 + b_3 = 0$, $\delta \in (0;1]$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$.

В [11, п.8.1] задачи (6.1) – (6.3) были представлены в виде следующих задач Коши для абстрактных дифференциальных уравнений первого порядка с операторными коэффициентами, соответственно,

$$A_1\,\frac{d\varphi}{dt} = F_3(\varphi) - F_1(\varphi), \quad \varphi(0) = \varphi_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \tag{6.4}$$

$$A_2\,\frac{d\varphi}{dt} = F_4(\varphi) - F_1(\varphi), \quad \varphi(0) = \varphi_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega), \tag{6.5}$$

$$A_2\,\frac{d\varphi}{dt} = F_4(\varphi) - F_2(\varphi), \quad \varphi(0) = \varphi_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega). \tag{6.6}$$

Здесь

$$A_1\varphi = -\Delta\varphi : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),\ A_2\varphi = \Delta^2\varphi - \Delta\varphi : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega),$$

$$\langle A_1\varphi, \psi\rangle_1 = (\nabla\varphi, \nabla\psi)_2 = \int\limits_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla\psi\,dx,$$

$$\langle A_2\varphi, \psi\rangle_2 = (\nabla\varphi, \nabla\psi)_2 + (\Delta\varphi, \Delta\psi)_2 = \int\limits_\Omega \big[\nabla\varphi\cdot\nabla\psi + \Delta\varphi\,\Delta\psi\big]\,dx,$$

$\langle .,.\rangle_m$ — скобка двойственности между $\mathbb{H}_0^m(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-m}(\Omega)$, $(.,.)_p$ — скобка двойственности между $L_p(\Omega)$ и $L_{p'}(\Omega)$, $p' = \dfrac{p}{p-1}$;

$$F_1(\varphi) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\varphi^2}{\partial x_1} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset L_4(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$F_2(\varphi) = \sum_{i=1}^{3} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}\prod_{j\neq i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega),$$

$$F_3(\varphi) = \varphi^3 : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset L_4(\Omega) \to L_{4/3}(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$F_4(\varphi) = -\mathrm{div}\,(|\nabla\varphi|^2\nabla\varphi) : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-2}(\Omega).$$

Далее в [11, п.8.1] каждая из задач (6.4) – (6.6) переписывается в виде задачи Коши для абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения в банаховом пространстве $Y$:

$$A\,\frac{d\varphi}{dt} = F(\varphi), \quad \varphi(0) = \varphi_0 \in Y, \tag{6.7}$$

где $A : Y \to Y^*$, $F : Y \to Y^*$, причем (как доказывается в [11, п.8.1]),

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\|_{Y^*} \geqslant m\|\varphi_1 - \varphi_2\|_Y, \ \forall \varphi_i \in Y, \ i = 1, 2,$$

$$\big\|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)\big\|_{Y^*} \leqslant \mu(M)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_Y \ \forall \varphi_i \in Y, \ \|\varphi_i\|_Y \leqslant M, \ i = 1, 2,$$

и оператор $A$ имеет обратный липшицево-непрерывный оператор $A^{-1} : Y^* \to Y$:

$$\big\|A^{-1}z_1 - A^{-1}z_2\big\|_Y \leqslant m^{-1}\|z_1 - z_2\|_{Y^*} \quad \forall z_1, z_2 \in Y^*.$$

Для (6.4) $Y = \mathbb{H}^1_0(\Omega)$, для (6.5) и (6.6) $Y = \mathbb{H}^2_0(\Omega)$. В свою очередь (как показано там же), задача (6.7) равносильна следующей

$$\frac{d\varphi}{dt} = G(\varphi)(t), \quad t \in (0; T]; \quad \varphi(0) = \varphi_0 \in Y; \quad \varphi \in \mathbb{C}^{(1)}\big([0; T]; Y\big), \tag{6.8}$$

где $G(\varphi) = A^{-1}F(\varphi) : \mathbb{C}\big([0; T]; Y\big) \to \mathbb{C}\big([0; T]; Y\big)$. Наконец, задача (6.8) равносильна абстрактному интегральному уравнению:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int\limits_0^t ds\, G(\varphi)(s), \quad t \in [0; T]; \quad \varphi \in \mathbb{C}\big([0; T]; Y\big). \tag{6.9}$$

Для произвольного $\tau \in (0; T]$ рассмотрим соответствующий аналог с фиксированной правой частью $z \in \mathbb{C}\big([0; \tau]; Y\big)$:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int\limits_0^t z(s)\, ds, \quad t \in [0; \tau]; \quad \varphi \in \mathbb{C}\big([0; \tau]; Y\big). \tag{6.10}$$

Формула (6.10) определяет оператор $\mathcal{F}_\tau : \mathbb{C}\big([0; \tau]; Y\big) \to W[0; \tau]$, $\varphi = \mathcal{F}_\tau[z]$, где $W[0; \tau] = \mathbb{C}\big([0; \tau]; Y\big)$. В качестве $W_0[0; \tau]$ можно взять множество всех $\varphi \in W[0; \tau]$ таких, что $\varphi(0) = \varphi_0$.

Условие $\mathbf{G}_1$) выполняется очевидным образом, см. (6.10). Если $z_1$, $z_2 \in W[0; \xi]$, $z_1 \big|_{[0;\tau]} = z_2 \big|_{[0;\tau]}$, то в силу (6.10), получаем:

$$\big\|\mathcal{F}_\xi[z_1] - \mathcal{F}_\xi[z_2]\big\|_{W[0;\xi]} \leqslant \int\limits_\tau^\xi \big\|z_1(s) - z_2(s)\big\|_Y\, ds \leqslant (\xi - \tau)\|z_1 - z_2\|_{\mathbb{C}\left([\tau;\xi];Y\right)}.$$

Это означает, что условие $\mathbf{G}_2$) выполнено при $\mathcal{N} \equiv 1$, $\alpha_0(t) = t$. Условие $\mathbf{G}_3$) тоже выполнено, поскольку $\mathcal{F}_\tau(0) = \varphi_0$.

Оператор $G(\varphi)$, очевидно, удовлетворяет условию $\mathbf{F}_1$), так как в определяющей его формуле нет явной зависимости от переменной времени. Пусть

$$\varphi_i \in W[0; \xi], \qquad \|\varphi_i\|_{\mathbb{C}\left([0;\xi];Y\right)} \leqslant M, \qquad i = 1, 2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \big\|G(\varphi_1)(t) - G(\varphi_2)(t)\big\|_Y &\leqslant m^{-1}\big\|F(\varphi_1)(t) - F(\varphi_2)(t)\big\|_{Y^*} \\ &\leqslant m^{-1}\mu(M)\big\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\big\|_Y \qquad \forall\, t \in [0; \xi]. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что

$$\big\|G(\varphi_1) - G(\varphi_2)\big\|_{\mathbb{C}\left([\tau;\xi];Y\right)} \leqslant m^{-1}\mu(M)\big\|\varphi_1 - \varphi_2\big\|_{\mathbb{C}\left([\tau;\xi];Y\right)}.$$

Таким образом, условие $\mathbf{F}_2$) выполняется при $\alpha_1 \equiv 1$, $\beta_1(M) = m^{-1}\mu(M)$. Выполнение условия $\mathbf{F}_3$) следует непосредственно из леммы 2.2.

Рассмотрим теперь соответствующий управляемый аналог

$$A\,\frac{d\varphi}{dt} = F(\varphi) + g[u](\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{C}^{(1)}\big([0;T];Y\big),$$

равносильный уравнению

$$\varphi = \mathcal{F}_T\big[f[u](\varphi)\big], \quad \varphi \in W[0;T],$$

где $f[u](\varphi) = A^{-1}\big[F(\varphi) + g[u](\varphi)\big]$. Будем предполагать, что

$$g[u] : Y \to Y^*,\ g[u] : \mathbb{C}\big([0;\tau];Y\big) \to \mathbb{C}\big([0;\tau];Y^*\big),\ \tau \in (0;T],\ u \in U,$$

$$\big\|g[u](\varphi_1) - g[u](\varphi_2)\big\|_{Y^*} \leqslant \mu_g(M) \quad \forall\,\varphi_i \in Y, \quad \|\varphi_i\|_Y \leqslant M, \quad i = 1,2.$$

Тогда условия $\mathbf{F}_1$) – $\mathbf{F}_3$) оператором $f[u](\varphi)$ удовлетворяются аналогично тому, как это было для $G(\varphi)$, $\alpha_1 \equiv 1$, $\beta_1(M) = m^{-1}(\mu(M)+\mu_g(M))$. Таким образом, согласно теореме 2.2, имеет место свойство УСГР.

Отметим, что в [11, § 8] для задач (6.1) – (6.3) были доказаны локальная разрешимость и существование максимального решения, а также указан способ вычисления отрезка $[T_1;T_2]$ такого, что при $T \in (0;T_1)$ существует единственное глобальное решение, а при $T \geqslant T_2$ происходит разрушение решения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М.: Мир. 1978.
2. Лионс Ж.-Л. *Управление сингулярными распределенными системами.* М.: Наука. 1987.
3. Фурсиков А.В. *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения.* Новосибирск: Научная книга. 1999.
4. Сумин В.И. *Функциональные вольтерровы уравнения в математической теории оптимального управления распределенными системами.* Нижний Новгород: ННГУ. 1998. Дис. докт. физ.-мат. наук.
5. Чернов А.В. *Вольтерровы операторные уравнения и их применение в теории оптимизации гиперболических систем.* Нижний Новгород: ННГУ. 2000. Дис. канд. физ.-мат. наук.
6. Сумин В.И. *Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **30**:1, 3–21 (1990).
7. Чернов А.В. *О гладких конечномерных аппроксимациях распределенных оптимизационных задач с помощью дискретизации управления* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **53**:12, 2029–2043 (2013).
8. Калантаров В.К., Ладыженская О.А. *О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов* // Записки научных семинаров ЛОМИ. **69**, 77–102 (1977).
9. Сумин В.И. *Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть I.* Н.Новгород: ННГУ. 1992.
10. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука. 1973.
11. Корпусов М.О., Свешников А.Г. *Разрушение решений сильно нелинейных уравнений псевдопараболического типа* // Современная математика и ее приложения. **40**, 3–138 (2006).
12. F. Tröltzsch *Optimal control of partial differential equations: theory, methods and applications*, Graduate Studies in Mathematics **112**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2010).

13. C. Carasso, E.H. Hassnaoui *Mathematical analysis of the model arising in study of chemical reactions in a catalytic cracking reactor* // Math. Comput. Modelling **18**: 2, 93–109 (1993).
14. T. Kobayashi, H. Pecher, Y. Shibata *On a global in time existence theorem of smooth solutions to a nonlinear wave equation with viscosity* // Math. Ann. **296**: 2, 215–234 (1993).
15. P. Biler, D. Hilhorst, T. Nadzieja *Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles. II* // Colloq. Math. **67**: 2, 297–308 (1994).
16. B. Hu, H.-M. Yin *Global solutions and quenching to a class of quasilinear parabolic equations* // Forum Math. **6**: 3, 371–383 (1994).
17. G. Lu *Global existence and blow-up for a class of semilinear parabolic systems: a Cauchy problem* // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. **24**: 8, 1193–1206 (1995).
18. T. Yamazaki *Scattering for a quasilinear hyperbolic equation of Kirchhoff type* // J. Differ. Equations **143**: 1, 1–59 (1998).
19. F. Catalano *The nonlinear Klein-Gordon equation with mass decreasing to zero* // Adv. Differ. Equ. **7**: 9, 1025–1044 (2002).
20. M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J.A. Soriano *On existence and asymptotic stability of solutions of the degenerate wave equation with nonlinear boundary conditions* // J. Math. Anal. Appl. **281**: 1, 108–124 (2003).
21. A. Rozanova-Pierrat *Qualitative analysis of the Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov (KZK) equation* // Math. Models Methods Appl. Sci. **18**: 5, 781–812 (2008).
22. X. Zhao *Self-similar solutions to a generalized Davey-Stewartson system* // Math. Comput. Modelling **50**: 9–10, 1394–1399 (2009).
23. M.O. Korpusov, A.V. Ovchinnikov, A.G. Sveshnikov *On blow up of generalized Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov equation* // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods **71**: 11, 5724–5732 (2009).
24. A.M. Blokhin, D.L. Tkachev *Asymptotic stability of the stationary solution for a new mathematical model of charge transport in semiconductors* // Q. Appl. Math. **70**: 2, 357–382 (2012).
25. H. Saito *Global solvability of the Navier-Stokes equations with a free surface in the maximal regularity $L_p - L_q$ class* // J. Differ. Equations **264**: 3, 1475–1520 (2018).
26. Сумин В.И. *Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения* // Вестник ННГУ. Математика. 1, 91–107 (2003).
27. Сумин В.И., Чернов А.В. *Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределенных систем* / Тр. Междунар. конф. «Динамика систем и процессы управления», посвященной 90-летию со дня рожд. акад. Н. Н. Красовского (Екатеринбург, Россия, 15–20 сентября 2014 г.). ИММ УрО РАН – УРФУ, Екатеринбург, 293–300 (2015).
28. Чернов А.В. *О тотально глобальной разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна с варьируемым линейным оператором* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. **25**: 2, 230–243 (2015).
29. A.V. Chernov *Preservation of the Solvability of a Semilinear Global Electric Circuit Equation* // Comput. Math. Math. Phys. **58**: 12, 2018–2030 (2018).
30. Чернов А.В. *О тотальном сохранении однозначной глобальной разрешимости операторного уравнения первого рода с управляемой добавочной нелинейностью* // Изв. вузов. Математика. 11, 60–74 (2018).
31. Солонников В.А. *Оценки решений нестационарной системы Навье–Стокса* // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Записки научных семинаров ЛОМИ. **38**, 153–231 (1973).

32. J. Leray *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace* // Acta Math. **63**: 1, 193–248 (1934).
33. Киселев А.А., Ладыженская О.А. *О существовании и единственности решения нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости* // Изв. АН СССР. Сер. матем. **21**: 5, 655–680 (1957).
34. G. Prodi *Un teorema di unicità per le equazioni di Navier–Stokes* // Ann. Mat. Pura Appl. **48**:4, 173–182 (1959).
35. J. Serrin *The initial value problem for the Navier–Stokes equations* // Nonlinear Problems, Univ. of Wisconsin Press, Madison, WI, 69–98 (1963).
36. H. Kozono, H. Sohr *Remarks on uniqueness of weak solutions to the Navier–Stokes equations* // Analysis **16**: 3, 255–271 (1996).
37. Ладыженская О.А. *Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье–Стокса, существование и гладкость* // Успехи матем. наук. **58**: 2(350), 45–78 (2003).
38. H. Jia, V. Sverak *Are the incompressible 3d Navier–Stokes equations locally ill-posed in the natural energy space?* // J. Funct. Anal. **268**: 12, 3734–3766 (2015).
39. G.A. Seregin, T.N. Shilkin *Liouville-type theorems for the Navier–Stokes equations* // Russ. Math. Surveys **73**:4, 661–724 (2018).
40. Карчевский М.М., Павлова М.Ф. *Уравнения математической физики. Дополнительные главы.* Казань: КГУ. 2012.



Андрей Владимирович Чернов,
Нижегородский гос. ун-т им. Н.И. Лобачевского,
пр-т Гагарина, 23,
603950, г. Нижний Новгород, Россия;
Нижегородский гос. технический ун-т им. Р.Е. Алексеева,
ул. Минина, 24,
603950, г. Нижний Новгород, Россия,
E-mail: chavnn@mail.ru