ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 1 (2020). С. 3-12.

УДК 517.9

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОБРАТИМЫМ ОПЕРАТОРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ

М.С. БИЧЕГКУЕВ

Аннотация. Работе рассматривается интегро-дифференциальное уравнение с необратимым оператором при производной в пространстве равномерно непрерывных ограниченных функций, интегральная часть которого представляет собой свертку операторнозначной борелевской меры с компактным носителем и векторной непрерывной ограниченной функции. Получены достаточные условия (спектральные условия) почти периодичности на бесконечности ограниченных решений данного уравнения.

В основе приведенных результатов лежит доказанное утверждение о том, что если правая часть рассматриваемого уравнения принадлежит $C_0(\mathbb{J}, X)$ – пространству стремящихся к нулю на бесконечности функций, то спектр Берлинга каждого слабого решения содержится в сингулярном множестве характеристического уравнения. В частности, для уравнений вида $\mu * x = \psi$, где функция $\psi \in C_0(\mathbb{J}, X)$ и носитель $\mathrm{supp}\mu$ скалярной меры μ компактен, установлено, что каждое классическое решение является почти периодической на бесконечности. Получено, что если сингулярное множество характеристической функции рассматриваемого уравнения не имеет предельных точек на $\mathbb{R}$, то каждое слабое решение является почти периодической на бесконечности.

Исследована структура ограниченных решений в терминах медленно меняющихся на бесконечности функций.

Приведены приложения к нелинейным интегро-дифференциальным уравнениям. Получено, что ограниченное решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения, когда правая часть – убывающее на бесконечности отображение, а сингулярное множество характеристической функции не имеет конечных предельных точек на $\mathbb{R}$, является почти периодической на бесконечности функцией.

Основные результаты статьи получены на основе методов абстрактного гармонического анализа. Существенно используется спектральная теория банаховых модулей.

Ключевые слова: почти периодическая на бесконечности функция, банахово пространство почти периодических на бесконечности функций, спектр Берлинга, периодическая по Бору функция.

Mathematics Subject Classification: 47G20

1. Введение. Основные результаты

Созданная Г. Бором [1] теория почти периодических функций нашла многочисленные приложения (см. [2]–[14]) в исследовании вопросов почти периодичности (по Бору) ограниченных решений разнообразных классов уравнений (дифференциальных, разностных и т.д.]). Обычно рассматривались различные классы линейных уравнений с

M.S. Bichegkuev, Almost periodic on infinity solutions to integro-differential equations with non-invertible operator at derivative.

Поступила 30 апреля 2019 г.

почти периодическими (в смысле Бора) коэффициентами и почти периодической правой частью. Однако, ограниченное решение простейшего дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = Ax(t) + \psi(t), t \geqslant 0$, рассматриваемого в конечномерном линейном пространстве (A — линейный оператор), с непрерывной исчезающей на бесконечности функцией $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ не почти периодична в обычном смысле.

В статьях А.Г. Баскакова [17], [18] был введен в рассмотрение новый класс непрерывных почти периодических функций (они назывались *почти периодическими на бесконечности*), который содержит почти периодические функции Бора, и такому классу функций принадлежат ограниченные решения разнообразных классов уравнений, в том числе только что приведенное уравнение.

В данной статье получены достаточные условия (спектральные условия) почти периодичности на бесконечности достаточно обширного класса интегро-дифференциальных уравнений с необратимым оператором при производной. Основные результаты статьи содержатся в теоремах 1 – 4 и теореме 7. Они получены с использованием методов абстрактного гармонического анализа. Существенно используется спектральная теория банаховых модулей (см. [11], [12], [19], [20]) над банаховой алгеброй $L^1(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ суммируемых на $\mathbb{R}$ комплекснозначных функций со сверткой

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)ds,\ t \in \mathbb{R}, f, g \in L^1(\mathbb{R})$$

в качестве умножения.

Вначале введем в рассмотрение основные функциональные пространства и несколько (эквивалентных) определений почти периодических на бесконечности функций.

Пусть X — комплексное банахово пространство и $LB(X)$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X.

Пусть $\mathbb{J}$ — один из промежутков $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ или $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Символом $C_b = C_b(\mathbb{J}, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{J}$ функций со значениями в X с нормой

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{J}} \|x(t)\|_X.$$

Через $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ обозначим замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций из $C_b(\mathbb{J}, X), C_0 = C_0(\mathbb{J}, X)$ – замкнутое подпространство, стремящихся к нулю на бесконечности функций из $C_b(\mathbb{J}, X)$.

В банаховом пространстве $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ рассмотрим сильно непрерывную полугруппу операторов $S : \mathbb{J} \to LB(C_{b,u})$, действующих по правилу

$$(S(t)x)(\tau) = x(t+\tau), t, \tau \in \mathbb{J},\ x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X). \tag{1}$$

Отметим, что S — группа, если $\mathbb{J} = \mathbb{R}$.

Определение 1. *(см.* [17],[18]*). Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется медленно меняющейся на бесконечности, если $(S(t)x - x) \in C_0(\mathbb{J}, X)$ для любого $t \in \mathbb{J}$. Множество медленно меняющихся на бесконечности функций обозначим символом $C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$.*

Примерами таких функций являются: 1) $x_1(t) = \sin \ln(1+t^2), t \in \mathbb{R}$; 2) $x_2(t) = \operatorname{arctg} t$, $t \in \mathbb{R}$; 3) $x_3 : \mathbb{R}_+ \to X, x_3(t) = c + x_0(t), t \geqslant 0$,где c_0 — вектор из банахово пространства X и x_0 — любая функция из $C_0(\mathbb{R}_+, X)$; 4) любая непрерывно дифференцируемая функция из $C_b(\mathbb{R}, X)$ со свойством $\dot{x} \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

Отметим, что множество $C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$ образует замкнутое подпространство в банаховом пространстве $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$.

В статьях [17], [18] было дано определение почти периодической на бесконечности функции. Имеется несколько подходов к их определению. Первое определение основано на понятии ε-периода (сравни [2]).

Определение 2. *Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{J}$ называется ε-периодом на бесконечности функции $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$, если существует число $a(\varepsilon) \geqslant 0$ такое, что $\sup\limits_{|t|\geqslant a(\varepsilon)} \|x(t+\omega) - x(t)\| < \varepsilon$. Множество ε-периодов на бесконечности функции x обозначим символом $\Omega_\infty(x;\varepsilon)$.*

Определение 3. *Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется почти периодической на бесконечности, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x;\varepsilon)$ ее ε-периодов обладает свойством: существует число $l(\varepsilon) > 0$ такое, что каждый интервал из $\mathbb{J}$ длины $l(\varepsilon)$ содержит хотя бы один ε-период на бесконечности функции x.*

Из этого определения (соответствующего определению Бора [1] почти периодической функции) следует, что каждая непрерывная почти периодическая (по Бору) функция $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$ является почти периодической на бесконечности.

Далее приведем ряд определений из теории банаховых модулей, используемых при дальнейшем изложении. Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство. В роли банаховой алгебры рассматривается пространство $L^1(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ со сверткой

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)ds,\ t \in \mathbb{R},\ f, g \in L^1(\mathbb{R}),$$

в качестве умножения. Если $T : \mathbb{R} \to LB(\mathcal{X})$ — сильно непрерывное изометрическое представление группы $\mathbb{R}$, то формулой (см.[19], [20])

$$fx = \int_{\mathbb{R}} f(s)T(-s)xds,\ f \in L^1(\mathbb{R}), x \in \mathcal{X},$$

пространство $\mathcal{X}$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля, которую обозначают также символом $(\mathcal{X}, T)$.

В частности, структурой банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля наделяется банахово пространство $C_{b,u}(\mathbb{R}, \mathcal{X}) = C_{b,u}$ с помощью группы изометрий сдвигов функций

$$S : \mathbb{R} \to LB(C_{b,u}), (S(t)x)(s) = x(s+t),\ t, s \in \mathbb{R}, x \in C_{b,u}.$$

Таким образом, модульная структура на $C_{b,u}$ определяется сверткой функций

$$(f * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)x(s)xds = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)(S(-\tau)x)(t)d\tau,\ t \in \mathbb{R},$$

для любых $f \in L^1(\mathbb{R}), x \in C_{b,u}$.

Определение 4. *Вектор x из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X}, T)$ называется почти периодическим, если множество векторов $\{T(t)x : t \in \mathbb{R}\}$ (орбита вектора x) предкомпактно в $\mathcal{X}$.*

Множество почти периодических векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ образует замкнутый подмодуль, обозначаемый далее символом $AP\mathcal{X}$. В частности, $APC_{b,u}(\mathbb{R}, X) = AP(\mathbb{R}, X)$ — банахово пространство непрерывных почти периодических функций Бора относительно группы сдвигов $S(t), t \in \mathbb{R}$.

В дальнейшем символом $\mathcal{X}$ обозначается фактор-пространство
$C_{b,u}(\mathbb{R}_+, X)/C_0(\mathbb{R}_+, X)$.

В банаховом пространстве $\mathcal{X}$ корректно определяется группа изометрий $\tilde{S} : \mathbb{R} \to LB(\mathcal{X})$, действующих по правилу

$$\tilde{S}(t)\tilde{x} = \widetilde{S(t)x},\ t \in \mathbb{R}, \tilde{x} \in \mathcal{X},$$

где $S(t)x$ – сдвиг функции x влево (см. (1)) для $t \geqslant 0$, а для $t < 0$ символ $\widetilde{S(t)x}$ обозначает класс эквивалентности, содержащий непрерывную функцию вида

$$x_t(s) = \begin{cases} x(s+t), & \text{при } s+t \geqslant 0, \\ -t^{-1}sx(0), & \text{при } s+t \leqslant 0, s \geqslant 0. \end{cases}$$

Структура банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля на $\mathcal{X}$ определяется по представлению $\tilde{S}$, т.е. формулой

$$f\tilde{x} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\tilde{S}(-\tau)\tilde{x}d\tau,\ f \in L^1(\mathbb{R}), \tilde{x} \in \mathcal{X}.$$

Замечание 1. *Непосредственно из определения модульной структуры на факторпространстве $\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{R}_+, X)/C_0(\mathbb{R}_+, X)$ следует, что для любых функций $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+, X)$ имеет место равенство*

$$\widetilde{fx} = (\widetilde{f * y)}|_{\mathbb{R}_+}$$

для любого продолжения $y \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ функции x на $\mathbb{R}$ со свойством: $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = 0$.

Определение 5. *Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется почти периодической на бесконечности, если класс эквивалентности $\tilde{x} = x + C_0(\mathbb{J}, X)$ является почти периодическим вектором из пространства $\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X)$ изометрического представления $\tilde{S} : \mathbb{R} \to LB(\mathcal{X})$ (т.е. $\{\tilde{S}(t)\tilde{x} : t \in \mathbb{R}\}$ — предкомпактное множество в факторпространстве $\mathcal{X}$ или, что эквивалентно, $t \mapsto \tilde{S}(t)\tilde{x} : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ есть непрерывная почти периодическая функция).*

Определение 6. *Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется почти периодической на бесконечности, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и медленно меняющиеся на бесконечности функции $x_1, \ldots, x_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$ такие, что*

$$\sup_{t\in\mathbb{J}} \left\| x(t) - \sum_{k=1}^{n} x_k(t)e^{i\lambda_k t} \right\| < \varepsilon.$$

Непосредственно из определений 5 и 6 следует их эквивалентность (см.[17], [18]).

Далее символом $AP(\mathbb{J}, X)$ обозначим банахово пространство почти периодических функций, а символом $AP_\infty(\mathbb{J}, X)$ – банахово пространство почти периодических на бесконечности функций из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$.

Ясно, что имеют место включения $C_0(\mathbb{J}, X) \subset C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X) \subset AP_\infty(\mathbb{J}, X)$.

Символом $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}dt,\ \lambda \in \mathbb{R},$$

функции $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Определение 7. *Спектром Берлинга вектора x из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X}, \widetilde{S})$ называется множество*

$$\Lambda(x) = \{\lambda_0 \in \mathbb{R} : fx \neq 0 \ \ \textit{для любой функции} \ \ f \in L^1(\mathbb{R}) \ \ \textit{c} \ \ \widehat{f}(\lambda_0) \neq 0\}.$$

Из определения следует, что $\Lambda(x) = \mathbb{R}\backslash\{\mu_0 \in \mathbb{R} : \exists f \in L^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f}(\mu_0) \neq 0$ и $fx = 0\}$.

Если $\mathcal{X}_0$ – замкнутый подмодуль $\mathcal{X}$, то фактор-пространство $\mathcal{X}/\mathcal{X}_0$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем с модульной структурой, определяемой для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $\tilde{x} = x + \mathcal{X}_0$ формулой

$$f\tilde{x} = fx + \mathcal{X}_0 = \widetilde{fx}.$$

Определение 8. *Пусть функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$. Спектром Берлинга функции x на бесконечности называется спектр Берлинга $\Lambda(\widetilde{x})$, где $\widetilde{x} = x + C_0(\mathbb{J}, X)-$ класс эквивалентности из $\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X)$ и обозначается символом $\Lambda_\infty(x)$.*

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) + (\mu * x)(t) = \psi(t), t \in \mathbb{J}, \tag{2}$$

где операторы $B, A \in LB(X, Y)$, $\mu : \sigma \to LB(X, Y)-$ борелевская мера с компактным носителем ($\sigma-$ алгебра борелевских множеств из $\mathbb{J}$) и $\psi \in C_{b,u}(\mathbb{J}, Y)$. Здесь и далее символом $LB(X, Y)$ обозначается банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X со значениями в Y. Оператор B не обязательно является обратимым. Свертка $\mu * x$ меры μ и функции $x \in C_b(\mathbb{J}, Y)$ определяется формулой

$$(\mu * x)(t) = \int\limits_{\mathbb{J}} \mu(ds)x(t - s),\ t \in \mathbb{J}.$$

Такая форма записи свертки объясняется операторозначностью меры μ.

Определение 9. *Операторнозначная функция*

$$H : \mathbb{R} \to LB(X, Y), H(\lambda) = iB\lambda + A + \widehat{\mu}(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

где $\widehat{\mu}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mu(dt)e^{-i\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R}$, – преобразование Фурье меры μ, называется характеристической функцией, отвечающей операторному уравнению (2).

Замечание 2. *Поскольку носитель $supp\mu$ меры μ компактен (т.е. $supp\mu$ содержится в некотором отрезке $[a, b]$), то из представления*

$$\widehat{\mu}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mu(dt)e^{-i\lambda t} = \int\limits_a^b \mu(dt)e^{-i\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R},$$

следует, что функция $\widehat{\mu} : \mathbb{R} \to LB(X, Y)$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$. Более того, она допускает расширение на $\mathbb{C}$ до целой функции экспоненциального типа не выше $\max\{|b|, |a|\}$.

Определение 10. *Множество*

$$s(H) = \{\lambda \in \mathbb{R} : H(\lambda) - \textit{необратимый оператор из}\, LB(X, Y)\}$$

назовем сингулярным множеством характеристической функции H. Множество $\rho(H) = \mathbb{R} \setminus s(H)$ назовем регулярным множеством функции H.

Замечание 3. *Пусть $t_k, k \geqslant 1, -$некоторая последовательность точек из отрезка $[a, b]$ и $A_k, k \geqslant 1, -$ последовательность операторов из банахова пространства $LB(X, Y)$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k\geqslant 1} \|A_k\| < \infty$. Тогда мера $\mu = \sum\limits_{k\geqslant 1} A_k\delta_{t_k}$, где δ_k — мера Дирака, сосредоточенная в точке t_k, удовлетворяет вышеприведенным требованиям. Ее преобразование Фурье имеет вид $\widehat{\mu}(\lambda) = \sum\limits_{k\geqslant 1} A_k e^{-i\lambda t_k}$. Таким образом, μ является почти периодической операторнозначной функцией. В данном случае характеристическая функция*

$H(\lambda)$, отвечающая уравнению (2) с так выбранной мерой μ, имеет вид

$$H(\lambda) = iB\lambda + A + \sum_{k\geqslant 1} A_k e^{-i\lambda t_k}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Если $B = 0$, то уравнение (2) становится разностным уравнением вида

$$Ax(t) + \sum_{k\geqslant 1} A_k x(t - t_k) = \psi(t), t \in \mathbb{J}.$$

Замечание 4. *В рассматриваемый класс уравнений включается ряд уравнений с частными производными, где $A : D(A) \subset Y \to Y-$ линейный замкнутый оператор и B – оператор, подчиненный оператору A. В этом случае $X = D(A)$ с нормой графика оператора A. Если $\mu = 0$, то уравнение (2) приобретает вид*

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = \psi(t), t \in \mathbb{J}.$$

Характеристической функцией, отвечающей этому уравнению, является операторный пучок

$$H(\lambda) = i\lambda B + A, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Сингулярное множество такой характеристической функции имеет вид

$$s(H) = \{\lambda \in \mathbb{R} : i\lambda B + A - \text{необратимый оператор}\}.$$

Используя терминологию [10]–[12], получаем, что множество $s(H)$ совпадает с множеством $\sigma(A, -B) \cap (i\mathbb{R})$, где $\sigma(A, -B)$ – спектр упорядоченной пары $A, -B$ (спектр операторного пучка $A + \lambda B, \lambda \in \mathbb{R}$).

Многие из полученных результатов могут быть обобщены на дифференциальные включения, определенные линейным отношением на банаховом пространстве (см.[21]–[24]).

Замечание 5. *Уравнение в свертках вида $\mu * x = \psi$ (случай $B = 0, A = 0$) рассматривалось в статье* [10]. *В ней были получены достаточные условия асимптотической почти периодичности решения этого уравнения с комплексной мерой. Напомним, что функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+, X)$ называется асимптотически почти периодической, если она представлена в виде суммы двух функций, одна из которых почти периодична по Бору, а вторая функция принадлежит пространству $C_0(\mathbb{R}_+, X)$. Ясно, что такие функции являются почти периодическими на бесконечности. Критерии асимптотической почти периодичности ограниченных решений уравнений параболического типа рассматривались в статьях* [13]–[15] *(см. также монографию* [3]*).*

Определение 11. *Классическим решением интегро-дифференциального уравнения (2) называется непрерывно дифференцируемая функция $x_0 \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ такая, что $\dot{x}_0 \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ и удовлетворяет уравнению (2). Функция $y_0 \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется слабым решением интегро-дифференциального уравнения (2), если она является равномерным пределом некоторой последовательности классических решений уравнения (2).*

Следующие четыре теоремы являются одними из основных результатов статьи.

Теорема 1. *Для любой функции $\psi \in C_0(\mathbb{J}, X)$ и для каждого слабого решения x_0 уравнения (2) имеет место включение*

$$\Lambda_\infty(x_0) \subset s(H). \tag{3}$$

Эта теорема служит основой для доказательства большинства утверждений данной статьи.

Теорема 2. *Пусть сингулярное множество $s(H)$ характеристической функции H не имеет конечных предельных точек на $\mathbb{R}$ и функция $\psi \in C_0(\mathbb{J}, X)$. Тогда каждое слабое решение $x_0 \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ является почти периодической на бесконечности функцией.*

Непосредственно из теоремы 2 следует

Теорема 3. *Пусть сингулярное множество $s(H)$ характеристической функции H не имеет конечных предельных точек на $\mathbb{R}$. Тогда каждое слабое решение $x_0 \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ однородного уравнения (2) является почти периодической на бесконечности функцией.*

Теорема 4. (О структуре ограниченных решений) *Пусть множество $s(H) = \{\lambda_k : k \geqslant 1\}$ не имеет конечных предельных точек на $\mathbb{R}$ и $x_0 \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ – слабое решение уравнения (2) с функцией $\psi \in C_0(\mathbb{J}, X)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют медленно меняющиеся на бесконечности функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$ такие, что*

$$\sup_{t\in\mathbb{J}} \left\| x_0(t) - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) e^{i\lambda_k t} \right\| < \varepsilon.$$

2. Доказательство основных результатов

Имеет место следующая

Лемма 1. *Функция $x_0 \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+, X)$ почти периодична на бесконечности тогда и только тогда, когда почти периодична на бесконечности функция $y_0 \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ со следующими свойствами: 1) y_0 – непрерывное продолжение x_0 на $\mathbb{R}$; 2)$supp\, y_0 \cap \mathbb{R}_-$ – компактное множество, где $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$.*

Доказательство. Для произвольного $\omega > 0$ существуют числа $a(\omega) > 0$ и $b(\omega) > 0$ такие, что имеет место равенство

$$\sup_{t\geqslant a(\omega)} \|x_0(t+\omega) - x_0(t)\| = \sup_{t\notin[-b(\omega),a(\omega)]} \|y_0(t\pm\omega) - y_0(t)\|.$$

Непосредственно из этого равенства следует, что

$$\Omega_\infty(x_0, \varepsilon) = \Omega_\infty(y_0, \varepsilon) \cap \mathbb{R}_+,$$
$$\Omega_\infty(y_0, \varepsilon) = \Omega_\infty(x_0, \varepsilon) \cup (-\Omega(x_0, \varepsilon)),$$

для любого $\varepsilon > 0$. □

Доказательство теоремы 1. Предположим сначала, что x_0– классическое решение уравнения (2). Пусть $\lambda_0 \in \rho(H) = \mathbb{R}\backslash s(H)$. Функция $H(\lambda) = i\lambda B + A + \hat{\mu}(\lambda), \lambda \in \mathbb{C}$, является целой функцией. Поэтому из обратимости $H(\lambda_0)$ следует существование числа $\delta > 0$ такого, что интервал $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ содержится в регулярном множестве $\rho(H)$ функции H (число δ определяется из условия $\sup_{|\lambda-\lambda_0|<\delta} \|H(\lambda) - H(\lambda_0)\| \cdot \|H(\lambda_0)\|^{-1} < 1$.) Таким образом, $H(\lambda), \lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$, – обратимые операторы.

Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию f_0 из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ со свойствами:

1) $\widehat{f_0}(\lambda_0) \neq 0; 2)$ $\mathrm{supp}\widehat{f_0} \subset (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$. Тогда функция

$$\widehat{F}(\lambda) = \begin{cases} \widehat{f_0}(\lambda) H(\lambda)^{-1}, & \text{при } \lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta), \\ 0, & \text{при } \lambda \notin (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta), \end{cases}$$

является бесконечно дифференцируемой и имеет компактный носитель. Она является преобразованием Фурье суммируемой операторнозначной функции $F : \mathbb{R} \to LB(Y, X)$ вида

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda, t \in \mathbb{R}.$$

Вначале рассмотрим случай $\mathbb{J} = \mathbb{R}$. Применим к обеим частям равенства

$$B\dot{x}_0 + Ax_0 + \mu * x_0 = \psi$$

оператор свертки с функцией F. В итоге будем иметь равенство (используются простейшие свойства преобразования Фурье)

$$(B\dot{F} + AF + \mu * F) * x_0 = F * \psi.$$

Следовательно, имеет место соотношение

$$\Phi * x_0 = F * \psi = \varphi \in C_0(\mathbb{R}, X),$$

где $\Phi : \mathbb{R} \to LB(Y, X)$ – суммируемая операторнозначная функция вида $\Phi = B\dot{F} + AF + \mu * F$. Ее преобразование Фурье имеет вид

$$\widehat{\Phi}(\lambda) = i\lambda B\widehat{F}(\lambda) + A\widehat{F}(\lambda) + \widehat{\mu}(\lambda)\widehat{F}(\lambda) =$$

$$= \begin{cases} H(\lambda)\widehat{F}(\lambda), & \text{при } \lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta), \\ 0, & \text{при } \lambda \notin (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta), \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Поскольку $\widehat{f_0}(\lambda)I = H(\lambda)\widehat{F}(\lambda)$, где $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ и I – тождественный оператор из $LB(Y)$, имеет место равенство

$$f_0 * x_0 = \varphi \in C_0(\mathbb{R}, X).$$

Ввиду того, что $\widehat{f_0}(\lambda_0) \neq 0$, то непосредственно из определения спектра Берлинга на бесконечности получаем, что $\lambda_0 \in \Lambda_\infty(x_0)$. Таким образом, доказано включение (3).

Пусть теперь $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$ и $x_0 \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+, X)$ – решение уравнения (2). Определим функцию $y_0 \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ как в лемме, тогда имеет место равенство

$$B\dot{y}_0(t) + Ay_0(t) + (\mu * y_0)(t) = \psi_1(t), t \in \mathbb{R},$$

где $\psi_1 \in C_{b,u}(\mathbb{R}, Y), \psi_1(t) = \psi(t)$ при $t \geqslant \max\{0, b\}$. Функция $\psi_1 : \mathbb{R} \to Y$ имеет на полуоси $(-\infty, b]$ компактный носитель (учитывается компактность носителя меры μ). Поэтому функция ψ_1 принадлежит пространству $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ в силу леммы 1. Из замечания 1 следует равенство $\Lambda_\infty(y_0) = \Lambda_\infty(x_0)$. Следовательно, $\Lambda_\infty(x_0) \subset s(H)$.

Пусть x_0– слабое решение уравнения (2) и пусть (x_n)–последовательность классических решений, которая равномерно сходится к x_0. По доказанному $x_n \in AP_\infty(\mathbb{J}, X), n \in \mathbb{Z}$, и, следовательно, в силу замкнутости $AP_\infty(\mathbb{J}, X)$ функция $x_0 \in AP_\infty(\mathbb{J}, X)$. □

Далее используется следующая

Теорема 5. *Пусть для функции $x_0 \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ спектр Берлинга на бесконечности $\Lambda_\infty(x_0)$ не имеет предельных точек на $\mathbb{R}$. Тогда функция $x_0 \in AP_\infty(\mathbb{J}, X)$.*

Более абстрактный вариант этой теоремы содержится в статье [11].

Доказательство теоремы 2. Из теоремы 1 следует включение $\Lambda_\infty(x_0) \subset s(H)$. Поскольку множество $s(H)$ не имеет предельных точек на $\mathbb{R}$, то согласно теореме 5 функция $x \in AP_\infty(\mathbb{J}, X)$. □

Доказательство теоремы 4. Из теорем 1 и 2 следует, что функция $x_0 \in AP_\infty(\mathbb{J}, X)$ и спектр $\Lambda(\widetilde{x}_0) \subset s(H) = \{\lambda_k : k \geqslant 1\}$. Далее из статей [17] и [18] следует, что ряд Фурье почти периодической на бесконечности функции имеет вид $x(t) = \sum\limits_{k \geqslant 1} \psi_k(t) e^{i\lambda_k t}$, где $\psi_k, k \geqslant 1$, – медленно меняющиеся на бесконечности функции. Из теоремы об аппроксимации для почти периодической на бесконечности функции (см. [18]) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$ такие, что справедливо неравенство (3). □

Рассмотрим уравнение

$$\mu * x = \psi, \tag{4}$$

где функция $\psi \in C_0(\mathbb{J}, X)$ и носитель $\mathrm{supp}\mu$ скалярной меры μ компактен. В этом случае, характеристическая функция этого уравнения имеет вид

$$H(\lambda) = \widehat{\mu}(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Поэтому $s(H) = \mathrm{supp}\widehat{\mu}$. Поскольку $\widehat{\mu}$ допускает расширение на всю комплексную плоскость до целой функции экспоненциального типа, то согласно теореме единственности для аналитических функций множество $s(H)$ не может иметь конечных предельных точек на $\mathbb{R}$. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 6. *Каждое классическое решение $x_0 \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ уравнение (4) является почти периодической на бесконечности функцией.*

3. Почти периодические на бесконечности решения нелинейных уравнений

Определение 12. *Непрерывное отображение $\varphi : \mathbb{J} \times X \to \mathbb{Y}$ назовем убывающей на бесконечности, если*

$$\lim_{|t|\to\infty} \sup_{\|x\|\leqslant R} \|\varphi(t,x)\| = 0$$

для любого $R > 0$.

Теорема 7. *Пусть $x_0 \in C_{b,u}(\mathbb{J}, Y)$ ограниченное решение нелинейного дифференциального уравнения*

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) + (\mu * x)(t) = \varphi(t, x), \tag{5}$$

где φ – убывающее на бесконечности отображение и множество $s(H)$ не имеет конечных предельных точек на $\mathbb{R}$. Тогда x_0 – почти периодическая на бесконечности функция.

Доказательство. Поскольку x_0 – решение уравнения (5), то x_0 – решение линейного неоднородного интегро-дифференциального уравнения (2), где $\psi(t) = \varphi(t, x_0(t)), t \in \mathbb{J}$. Из определения 12 следует, что функция ψ принадлежит подпространству $C_0(\mathbb{J}, Y)$. Таким, образом, для функции x_0 выполнено условие теоремы 3. □

Непосредственно из теоремы 7 вытекает

Следствие 1. *Пусть выполнено условие теоремы 7, причем отображение $\varphi : \mathbb{J}\times X \to Y$ имеет вид $\varphi(t,x) = \varphi_0(t)g(x)$, где $g : X \to Y$ – непрерывное отображение, ограниченное на ограниченных множествах, и $\varphi \in C_0(\mathbb{J}, X)$. Тогда x_0 – почти периодическая на бесконечности функция.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бор Г. *Почти периодические функции.* ОГИЗ, 1934. 128 с.
2. Левитан Б.М., Жиков В.В. *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения.* М., Изд-во Московского университета, 1978 г. 205 с.
3. W. Arendt, C.J.K. Batty *Vector-valued Laplace Transforms and Cachy Problems* Basel: Birkhuser, 2011. — 553p.
4. Левитан Б.М. *Об интегрировании почти периодических функций со значениями из банахова пространства.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. Т. 30. 1966. С. 1101–1110.
5. L. Amerio, G. Prouse *Almost-periodic functions and functional equations* Springer Science & Business Media, 2013. 184p.
6. R. Doss *On almost periodic solutions of integro-differential* // Ann.Math.Soc., V. 81. 1965. P. 117–123.

7. C. Foias, S. Zaidman *Almost-periodic solutions of parabolic sistem* // Ann. Scuola Norm.Pisa V. 3. № 3. 1963. P. 247–262.
8. B.M. Lewitan *On a integral equation with almost periodic solutions* // Bull.Amer. Math. Soc. V. 43. 1937. P. 677–679.
9. L.H. Loomis *Spectral characterization of almost periodic functions* // Ann. Math. V. 72. № 2. 1960. P. 362–368.
10. O. Staffans *On asymptotically almost periodic solutions of a convolution equation* // Trans.Amer. Math. Soc. V. 226. № 2. 1981. P. 603–616.
11. А.Г. Баскаков *Спектральные критерии почти периодичности линейных функциональных уравнений* // Матем. Заметки. Т. 24. № 2. 1978. С. 206–195.
12. Баскаков А.Г. *Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторной функций* // Матем. сб. Т. 124. № 5. 1984. С. 68–95.
13. Yu.I. Lyubich, Q.Ph. V$\widetilde{u}$ *Asymptotic stability of linear differential equations in Banach spaces* // Studia Math. V. 88. № 1. 1988. P. 37–42.
14. W. Arendt, C.J.K. Batty *Tauberian theorems and stability of oneparameter semigroups* // Trans.Amer.Math. V. 306. № 2. 1988. P. 837–852.
15. B. Basit *Harmonic analysis and asymptotic behavior of solutions to the abstract Cauchy problem* // Semigroup Forum. V. 54. 1997. P. 58–74.
16. S. Bochner, J von Neuman *On compact solution of operational differential equations* // Ann of Math. V. 36. № 1. 1935. p. 255–291
17. Баскаков А.Г. *Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве* // Матем. заметки. Т. 97. № 2. 2015. С. 174–190.
18. Баскаков А.Г. *Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений* // Успехи матем.наук. Т. 68. № 1. 2013. С. 77–128.
19. Баскаков А.Г. *О спектральном синтезе в банаховых модулях над коммутативными банаховыми алгебрами* // Матем. заметки. Т. 34. № 4. 1983. С. 573–585.
20. Баскаков А.Г. *Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов* // Функциональный анализ СМФН, МАИ, М., Т. 9. 2004. С. 3–151.
21. Баскаков А.Г., Чернышов К.И. *Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов* // Матем. сб. Т. 193. № 11. 2002. С. 3–42.
22. Баскаков А.Г. *Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов* // Матем. заметки. Т. 84. N 2. 2008. С. 175–192.
23. М.С. Бичегкуев *К теории бесконечно дифференцируемых полугрупп операторов* // Алгебра и анализ. Т. 22. № 2. 2010. С. 1–13.
24. М.С. Бичегкуев *Преобразования Ляпунова дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами* // Матем. заметки. Т. 124. N 5. 2016. С. 68–95.

Маирбек Сулейманович Бичегкуев,
Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова,
ул.Ватутина, 44-46,
362025, г. Владикавказ, Россия
E-mail: `bichegkuev@yandex.ru`