ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 4 (2019). С. 79-91.

УДК 517.518

ОБ ОЦЕНКЕ ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ФАЗОЙ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Ш.А. МУРАНОВ

Аннотация. Рассматриваются оценки преобразования Фурье мер, сосредоточенных на аналитических гиперповерхностях, содержащих множитель гашения. В качестве гасителя естественно выбирается степень гауссовой кривизны гиперповерхности. Известно, что если степень гауссовой кривизны достаточно большое положительное число, то преобразование Фурье соответствующей меры убывает оптимально. С.Д. Согги и И.М. Стейном поставлена задача о минимальной степени гауссовой кривизны, гарантирующей оптимальное убывание преобразования Фурье. В статье приведено решение задачи С.Д. Согги и И.М. Стейна об оптимальном убывании преобразования Фурье мер с множителем гашения для частного класса семейств аналитических поверхностей трехмерного евклидова пространства. Отметим, что степень, указанная в работе, точна не только для семейства аналитических гиперповерхностей, но и для фиксированной аналитической гиперповерхности. Доказательство основных результатов опирается на методы теории аналитических функций, точнее на утверждения типа подготовительной теоремы Вейерштрасса. Как показал Д.М. Оберлин, аналогичные утверждения для бесконечно-гладких гиперповерхностей не имеют место.

Ключевые слова: осцилляторные интегралы, преобразование Фурье, множитель гашения, максимальный оператор.

Mathematics Subject Classification: 35D05; 35D10; 35G05

1. Введение

В связи с проблемой об ограничении максимальных операторов, ассоциированных с гиперповерхностью $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$, С.Д. Согги и И.М. Стейном [1] введены следующие демпфированные осцилляторные интегралы:

$$\widehat{\mu}_q(\xi) := \int_S e^{i(\xi,x)}|K(x)|^q\psi(x)d\sigma(x), \tag{1.1}$$

где $K(x)$ – гауссова кривизна гиперповерхности в точке $x \in S$, $\psi \in C_0^\infty(S)$ – неотрицательная гладкая функция с компактным носителем, (x,ξ) – скалярное произведение векторов x и ξ, $d\sigma(x)$ – поверхностная мера. Они доказали, что если $q \geqslant 2n$, то интеграл (1.1) убывает в порядке $O(|\xi|^{-\frac{n}{2}})$ (при $|\xi| \to +\infty$), т.е. убывает оптимально. Отметим, что если гауссова кривизна не обращается в нуль, то преобразование Фурье поверхностной меры убывает в порядке $O(|\xi|^{-\frac{n}{2}})$ (при $|\xi| \to +\infty$), причем для ненулевой меры быстрее убывать не может, что означает оптимальность порядка убывания. Для семейства гладких гиперповерхностей $S(\eta) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, гладко зависящих от параметров $\eta \in \mathbb{R}^m$, естественно определяется мера $d\mu(\eta) := \psi(x,\eta)d\sigma(x,\eta)$ и соответствующие осцилляторные интегралы с множителем гашения:

$$\widehat{\mu}_q(\xi) = \int_{S(\eta)} e^{i(x,\xi)}|K(x,\eta)|^q\psi(x,\eta)d\sigma(x,\eta), \tag{1.2}$$

Sh.A. Muranov, On estimates for oscillatory integrals with phase depending on parameters.

Работа поддержана КОНИД при Министерстве ВССО РУзб (грант ОТ-Ф4-69).

Поступила 8 октября 2018 г.

где для каждого фиксированного η, $d\sigma(x,\eta)$ – поверхностная мера на $S(\eta)$.

Постановка задачи. Найти минимальное значение q такое, что справедлива следующая оценка:

$$|\widehat{\mu}_q(\xi)| \leqq A|\xi|^{-\frac{n}{2}}.$$

Аналогичная задача для фиксированной гиперповерхности S поставлена в работе [1] Согги и Стейна. Решение поставленной задачи в одномерном случае, точнее, когда S – кривая, заданная полиномом, вытекает из результатов Д. Оберлина [2]. Фактически результаты Д. Оберлина связаны с семейством кривых.

В данной работе мы представим решение задачи С.Д. Согги и И.М. Стейна для частного класса аналитических поверхностей трехмерного пространства, зависящих от параметров.

Функция $(x,\tau)\,|_{S_{(\eta)}}$ (где $\tau \in S^2$, т.е. τ – любой вектор, принадлежащий единичной сфере с центром в начале координат) – сужение семейства функций (зависящее от τ и η) (x,τ) на поверхности $S(\eta) \subset \mathbb{R}^3$, называется фазовой функцией.

Например, если $S = \{(x_1,x_2,\Psi(x_1,x_2,\eta))\}$, где $\Psi(x_1,x_2,\eta) = x_1^2 + x_2^4 + \eta x_2^2$, то $(x,\tau)\,|_{S_{(\eta)}} = \tau_1 x_1 + \tau_2 x_2 + \tau_3 \Psi(x_1,x_2,\eta)$ является фазовой функцией, соответствующей S.

Пусть $y = \Phi(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ – некоторая функция с критической точкой $x = x^0$. Если в некоторой окрестности $\Omega(x^0)$ точки x^0, $\Phi(x)$ с помощью диффеоморфной замены $\varphi : \Sigma \mapsto \Omega(x^0)$ (где $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ окрестность нуля) приводится к виду:

$$\Phi(\varphi(z)) = \Phi(x^0) \pm z_1^{k+1} \pm z_2^2 \pm z_3^2 \pm \cdots \pm z_n^2,$$

то $x = x^0$ называется критической точкой типа A_k [3].

Следующая теорема доказана в работе [4] (также см. [5]).

Теорема 1.1. *Пусть $q \geqslant 1$ фиксированное вещественное число и $S(\eta) \subset \mathbb{R}^3$ – семейство аналитических гиперповерхностей, зависящих от параметра $\eta \in \mathbb{R}^m$. Если фазовая функция, соответствующая гиперповерхности $S(0)$, имеет особенность типа A_k $(1 \leqslant k < \infty)$ в точке $(0,0,0) \in S(0)$, тогда существует окрестность нуля $V \times U \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^m$ такая, что при любой функции $\psi \in C_0^\infty(V \times U)$, для интеграла (1.2) справедлива следующая оценка:*

$$|\widehat{\mu}_q(\xi)| \leqslant \frac{C||\psi(\cdot,\eta)||_{C^2}}{|\xi|},$$

где C – фиксированное положительное число.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1.2. *Пусть $q \geqslant 1$ фиксированное вещественное число, $S(\eta) \subset \mathbb{R}^3$ – семейство аналитических гиперповерхностей, удовлетворяющих следующим условиям:*

1. Гиперповерхность $S(0)$ содержит начало координат $\mathbb{R}^3$, и хотя бы одна из главных кривизн поверхности $S(0)$ в начале координат отлична от нуля.

2. Гауссова кривизна $K(x,\eta)$ на гиперповерхности $S(\eta)$ удовлетворяет условию: $K \not\equiv 0$.

Тогда существует окрестность начала координат $V \times U \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^m$ такая, что при любой функции $\psi \in C_0^\infty(V \times U)$, для интеграла (1.2) справедлива следующая оценка:

$$|\widehat{\mu}_q(\xi)| \leqslant \frac{C||\psi(\cdot,\eta)||_{C^2}}{|\xi|},$$

где C – фиксированное положительное число.

2. Вспомогательные утверждения

Согласно условиям теоремы 1.2, можем считать, что $\psi(x,\eta)$ имеет достаточно малый носитель. Более того, будем считать, что $S(\eta)$ задается в виде графика некоторой аналитической функции $x_3 = f(x_1,x_2,\eta)$, определенной в малой окрестности начала координат:

$$S(\eta) := \{(x_1,x_2) \in V_1 \subset \mathbb{R}^2 : x_3 = f(x_1,x_2,\eta), \eta \in U\},$$

$$\text{причем} \quad f(0,0,0)=0,\ \nabla_x f(0,0,0)=0.$$

Действительно, пусть $S(\eta)$ семейство аналитических гиперповерхностей, зависящих от $\eta \in U \subset \mathbb{R}^m$. Тогда, после возможного применения евклидова движения, мы можем предполагать, что $S(0)$ содержит начало координат, и касательная плоскость $T_0S(0)$ в начале координат задается уравнением: $x_3=0$.

Поэтому $S(0)$ в окрестности точки $(0,0,0)$ определяется уравнением $F(x_1,x_2,x_3)=0$, где F – вещественно-аналитическая функция удовлетворяющая условиям: $F(0,0,0)=0$, $\frac{\partial F(0,0,0)}{\partial x_1}=\frac{\partial F(0,0,0)}{\partial x_2}=0$ и $\frac{\partial F(0,0,0)}{\partial x_3}\neq 0$. Согласно теореме о неявной функции уравнение $F(x_1,x_2,x_3)=0$ в окрестности нуля имеет аналитическое решение $x_3=\Phi(x_1,x_2)$. Таким образом $\Phi(x_1,x_2)$ аналитическая функция удовлетворяющая условиям: $\Phi(0,0)=0$, $\nabla\Phi(0,0)=0$. Аналогично для семейства $S(\eta)$ существует функция $f(x_1,x_2,\eta)$ такая, что в окрестности нуля $S(\eta)$ задается уравнением $x_3=f(x_1,x_2,\eta)$ и $f(x_1,x_2,\eta)$ удовлетворяет условиям: $f(x_1,x_2,0)=\Phi(x_1,x_2)$. (Более подробно см.[6], стр.57)

Отметим, что функция (x,τ) не имеет стационарных точек при $\tau\neq 0$, так как $(x,\tau)_x=\tau$. Но ее сужение на S имеет стационарные, т.е. критические точки (см.[7] гл. III, §4, стр.139). Это те точки $x(\tau)$, в которых гиперповерхность $(x,\tau)=const$ касается S.

Лемма 2.1. *Стационарная точка $x(\tau)\in S$ невырождена тогда и только тогда, когда гауссова кривизна гиперповерхности S в этой точке отлична от нуля.*

Лемма 2.1 доказана в [7](см. гл. III, §4, стр.144).

Отметим, если гауссова кривизна $K(0,0,0)\neq 0$, то, согласно лемме 2.1, фазовая функция $(x,\tau)\mid_{S(\eta)}$ в малой окрестности точки $(0,0,0)$ имеет лишь невырожденные критические точки. Так как если гауссова кривизна отлична от нуля в окрестности нуля $V\times U$, то $|K(x,\eta)|^q\psi(x,\eta)\in C_0^\infty(V\times U)$. Поэтому, согласно лемме Морса (см. [7], стр. 66, лемма 3.3), она приводится к сумме квадратов и для интеграла $\widehat{\mu}_q(\xi)$ справедливо соотношение: $\widehat{\mu}_q(\xi)=O(|\xi|^{-1})$ (при $|\xi|\longrightarrow\infty$). Следовательно, в этом случае утверждение теоремы 1.2 справедливо. В дальнейшем будем предполагать, что $K(0,0,0)=0$.

Прежде чем доказать теорему 1.2, рассмотрим некоторые необходимые вспомогательные утверждения.

Лемма 2.2. *Пусть $g=g(x)$ вещественнозначная непрерывно дифференцируемая функция, определенная на $[c,d]$. Если для любого $(x,\eta)\in[c,d]\times U$ выполняется неравенство $|g'|\geqslant\delta>0$ и функции $a(\cdot,\eta)$, $g'(\cdot,\eta)$ имеют ограниченную вариацию на $[c,d]$, то справедлива следующая оценка:*

$$\left|\int_c^d e^{i\lambda g(x,\eta)}a(x,\eta)dx\right|\leqslant\frac{C\|\frac{a(\cdot,\eta)}{g'}\|_V}{|\lambda|},\tag{2.1}$$

где $\|a(\cdot,\eta)\|_V:=|a(c,\eta)|+V_c^d[a(\cdot,\eta)]$ и $V_c^d[a(\cdot,\eta)]$ полная вариация функции a на $[c,d]$.

Доказательство. Сначала запишем интеграл в виде:

$$\int_c^d e^{i\lambda g(x,\eta)}a(x,\eta)dx=\int_c^d\frac{a(x,\eta)}{i\lambda g'(x,\eta)}d\left(e^{i\lambda g(x,\eta)}\right).$$

Далее, используя формулу интегрирования по частям для интеграла Стильтеса, получим следующую оценку

$$\left|\int_c^d e^{i\lambda g(x,\eta)}a(x,\eta)dx\right|\leqslant\left|\frac{a(d,\eta)}{i\lambda g'(d,\eta)}e^{i\lambda g(d,\eta)}-\frac{a(c,\eta)}{i\lambda g'(c,\eta)}e^{i\lambda g(c,\eta)}\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{i\lambda}\int_c^d e^{i\lambda g(x,\eta)}d\left(\frac{a(x,\eta)}{g'(x,\eta)}\right)\right|.$$

Наконец, заметим, что $max_{x\in[c,d]}|a(x,\eta)|\leqslant||a(\cdot,\eta)||_V$, и поэтому если $a(x,\eta)$ и $g'(x,\eta)$ функции с ограниченной вариацией, то придем к выполнению оценки (2.1).

Лемма 2.2 является аналогом утверждения II предложения 2 монографии [8] (стр.332–333) (а также см. [9] и [10]). □

В этой работе используются следующие технические леммы, доказанные в работе [11]:

Лемма 2.3. *Пусть $f \not\equiv 0$ вещественно-аналитическая функция в нуле $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$, такая, что $f(0,0)=0$. Существуют вещественно-аналитическое многообразие Y и отображение $\pi : Y \mapsto \mathbb{R}^m$, которое является собственным отображением, что для любой точки $y^0 \in Y$ существует карта $(\varphi_1,\dots,\varphi_m)$ с центром в точке y^0, для которой справедливо следующее соотношение:*

$$f(x_2,\pi(y)) = \varphi_1^{\alpha_1}(y)\varphi_2^{\alpha_2}(y)\dots\varphi_m^{\alpha_m}(y)b(x_2,y)p(x_2,y), \tag{2.2}$$

где $b(x_2,y)$, $b(0,y^0)\neq 0$ – вещественно-аналитическая функция, $p(x_2,y)$ – унитарный псевдополином, т.е.

$$p(x_2,y) = x_2^{m_1} + \tau_1(y)x_2^{m_1-1} + \tau_2(y)x_2^{m_1-2} + \dots + \tau_{m_1}(y),$$

здесь $\tau_1,\dots,\tau_{m_1}$ – вещественно-аналитические функции в точке y^0 и $\tau_\ell(y^0) = 0$, $\ell = 1,\dots,m_1$.

Лемма 2.4. *Пусть $f : (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m, 0) \mapsto (\mathbb{R},0)$ – вещественно-аналитическая функция в начале координат. Существует окрестность нуля $W\times U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ такая, что для любого фиксированного положительного числа q функция $|f(\cdot,\eta)|^q$ имеет ограниченную вариацию по W, причем полная вариация этой функции $V_W[|f(\cdot,\eta)|^q]$ является ограниченной функцией в U.*

А также нам понадобится следующая лемма:

Лемма 2.5. *Пусть $f(x,\eta)$ – вещественно-аналитическая функция в начале координат и $q\geqslant 1$ – фиксированное число. Тогда существует окрестность нуля $W\times U$ в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ и выполняется следующее тождество*

$$|x|g(x,\eta) = |f(x,\eta)|^q - |f(0,\eta)|^q,$$

где функция $g(x,\eta)$ имеет ограниченную вариацию по W и ее полная вариация ограничена в U.

Доказательство. Фактически лемма 2.5 является аналогом леммы 3.3 в работе [11]. Ради удобства читателей приведем подробное доказательство этой леммы.

Сначала предположим, что $f(x,\eta)$ многочлен. Скажем, $f(x,\eta) := Q(x,\eta) = x^\ell + \eta_1 x^{\ell-1} + \dots + \eta_\ell$, и коэффициенты многочлена ограничены; $|\eta|\leqslant 1$.

Покажем, что функция

$$g(x,\eta) = \frac{|Q(x,\eta)|^q - |\eta_\ell|^q}{|x|}$$

имеет ограниченную вариацию по отрезку $[-1,1]$, и ее полная вариация $V_{-1}^1[g(\cdot,\eta)]$ – ограничена константой, зависящей лишь от ℓ и q. Легко доказать, что $g(x,\eta)$ – кусочно-монотонная функция. Действительно, пусть $x>0$ и $Q(x,\eta)>0$. Тогда числитель и знаменатель дифференцируемы. Вычислим производную функции $g(x,\eta)$ по x и получим

$$g'(x,\eta) = \frac{xq(Q(x,\eta))^{q-1}Q'(x,\eta) - ((Q(x,\eta))^q - |\eta_\ell|^q)}{x^2}.$$

Теперь покажем, что числитель имеет не более 2ℓ нулей. Вычислим производную числителя и, приравнивая ее к нулю, получим

$$qx(Q(x,\eta))^{q-2}((q-1)(Q'(x,\eta))^2 + Q(x,\eta)Q''(x,\eta)) = 0.$$

Последнее уравнение имеет не более, чем $2\ell-2$ корней, так как $Q'(x,\eta))^2 + Q(x,\eta)Q''(x,\eta)$ многочлен степени $2\ell-2$.

Поэтому числитель не может иметь более чем $2\ell-2$ нулей при $Q>0$. Аналогично рассматривается случай $Q(x,\eta)<0$ или $x<0$. Отсюда следует, что уравнение $g'(x,\eta)=0$ имеет не более, чем $4\ell-4$ корней.

Так как $q\geqslant 1$, то при $x,y\in[-1,1]$ мы имеем очевидное неравенство:
$||x|^q-|y|^q|\leqslant C(q)|x-y|$, где $C(q)$ – некоторое положительние число, зависящее лишь от $q\geqslant 1$. Отсюда вытекает, что функция $g(x,\eta)$ ограничена числом $C(q)\frac{\ell(\ell-1)}{2}$ при $|x|\leqslant 1$. Действительно,

$$|x||g(x,\eta)|\leqslant ||Q(x,\eta)|^q-|Q(0,\eta)|^q|\leqslant C(q)|Q(x,\eta)-Q(0,\eta)|\leqslant C(q)\max_{-1\leqslant\zeta\leqslant 1}|Q'(\zeta,\eta)||x|$$

и следовательно,

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|g(x,\eta)|\leqslant C(q)\max_{-1\leqslant\zeta\leqslant 1}|Q'(\zeta,\eta)|\leqslant C(q)\frac{\ell(\ell-1)}{2}.$$

Тогда имеем

$$V_{-1}^{1}[g(x,\eta)]\leqslant(4\ell-4)\max_{[-1,1]}|g(x,\eta)|\leqslant C(q)2\ell(\ell-1)^2.$$

Таким образом, полная вариация функции g по отрезку $[-1,1]$ оценивается константой, зависящей только от ℓ и q.

Пусть теперь $f(x,\eta)$ – любая вещественно-аналитическая функция. В этом случае, используя лемму 2.3, приводим нашу функцию к виду

$$f(x,\pi(y))=\varphi_1^{\alpha_1}(y)\varphi_2^{\alpha_2}(y)\dots\varphi_m^{\alpha_m}(y)b(x,y)Q(x,y),$$

где b – вещественно-аналитическая функция, удовлетворяющая условию $b(0,0)\neq 0$, и $Q(x,y)$ – некоторый псевдополином. В этом случае мы имеем соотношение

$$|b(x,y)Q(x,y)|^q-|b(0,y)Q(0,y)|^q=|Q(x,y)|^q(|b(x,y)|^q-|b(0,y)|^q)+$$
$$+|b(0,y)|^q(|Q(x,y)|^q-|Q(0,y)|^q).$$

Заметим, что функция $\frac{|b(x,y)|^q-|b(0,y)|^q}{|x|}$ имеет ограниченную вариацию, так как $b(0,0)\neq 0$. А также, согласно лемме 2.4, $|Q(x,y)|^q$ имеет ограниченную вариацию в координатной окрестности V при $q\geqslant 1$.

Наконец, заметим, что $\pi:Y\mapsto U$ – собственное аналитическое отображение [13]. Поэтому $\pi^{-1}(\overline{U})\subset Y$ компакное множество. Следовательно, для произвольной точки $y^0\in\pi^{-1}(\overline{U})$ можем найти координатную окрестность $V\subset Y$ точки y^0 такую, что при $y\in V$ имеем соотношение

$$f(x,\pi(y))=\varphi_1^{\alpha_1}(y)\varphi_2^{\alpha_2}(y)\dots\varphi_m^{\alpha_m}(y)b(x,y)Q(x,y),$$

где $(\varphi_1,\dots,\varphi_m)$ – локальные координаты с центром y^0, т.е. $\varphi_j(y^0)=0$, $j=1,\dots,m$, $b(x,y)$ – вещественно-аналитическая функция, удовлетворяющая условию $b(x,y)\neq 0$ при $(x,y)\in W\times V$, а $Q(x,y)$ – псевдополином и $\alpha_j\geqslant 0$ $(j=1,\dots,m)$ целые числа.

Согласно доказанному, $f(x,\pi(y))$ в окрестности $W\times V$ удовлетворяет утверждениям леммы 2.5. Так как $\pi^{-1}(\overline{U})$ компактное множество, мы можем выбрать конечное покрытие $\pi^{-1}(\overline{U})$ и окрестность нуля $W\subset\mathbb{R}$ такие, что утверждения леммы 2.5 справедливы при $(x,y)\in W\times\pi^{-1}(\overline{U})$. Поэтому выполняются утверждения леммы 2.5 на множестве $W\times U\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$. Отсюда приходим к доказательству леммы 2.5.

□

Теперь приведем аналог леммы Эрдейи [14]:

Лемма 2.6. *Если $F(x,s)$ – гладкая функция, определенная в малой окрестности начала координат $W\times U\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ и удовлетворяющая условиям:*

$$F'(0,s)=0,\quad F''(0,s)\neq 0\ \ \text{для любого}\ \ s\in U\ \ \text{и}\ \ a\in C_0^\infty(W\times U),$$

то при $0 \leqslant q \leqslant 1$ *выполняется неравенство:*

$$\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |x|^q e^{i\lambda F(x,s)} a(x,s)dx\right| \leqslant \frac{C_q\|a(\cdot,s)\|_V}{|\lambda|^{\frac{q+1}{2}}},$$

где ε *– достаточно малое положительное число.*

Доказательство. При доказательстве леммы используем лемму Морса с параметрами (см. [7], стр. 66, лемма 3.3). Согласно лемме Морса существует диффеоморфное отображение $x = x(y,s)$, отображающее отрезок $I = [-\varepsilon, \varepsilon]$ в $[-\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)]$, такое, что функция $F(x,s)$ имеет вид $F(x(y,s),s) = F(0,s) \pm y^2$, причем $x(0,s) \equiv 0$. Из последнего равенства вытекает, что $x(y,s)$ записывается в виде $x(y,s) = yG(y,s)$ с гладкой функцией $G(y,s)$ и $G(0,0) \neq 0$.

Мы применим замену пременных $x = x(y,s)$ в интеграле

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |x|^q e^{i\lambda F(x,s)} a(x,s)dx,$$

и получим:

$$I_q(\lambda) = e^{i\lambda F(0,s)} \int_{-\delta_1(\varepsilon)}^{\delta_2(\varepsilon)} |y|^q e^{\pm i\lambda y^2} a_1(y,s)dy,$$

где $a_1(y,s) = |G(y,s)|^q (G(y,s) + yG'(y,s)) a(yG(y,s),s)$ и $a_1(y,s) \in C_0^\infty([-\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)])$.

Теперь рассмотрим оценку интеграла $I_q(\lambda)$, который при $0 \leqslant q \leqslant 1$ записывается в виде $I_q(\lambda) = I_1(\lambda) + I_2(\lambda)$.

Сначала оценим интеграл

$$I_1(\lambda) := \int_0^{\delta_2(\varepsilon)} y^q e^{\pm i\lambda y^2} a_1(y,s)dy.$$

Аналогично оценивается интеграл $I_2(\lambda) := \int_{-\delta_1(\varepsilon)}^0 y^q e^{\pm i\lambda y^2} a_1(y,s)dy$.

Если $\delta_2(\varepsilon) \leqslant \lambda^{-\frac{1}{2}}$, то, из тривиальной оценки интеграла, имеем:

$$|I_1(\lambda)| \leqslant \frac{\max_{y\in[0,\delta_2(\varepsilon)]} |a_1(y,s)|}{\lambda^{\frac{q+1}{2}}}. \tag{2.3}$$

Теперь предположим, что $\delta_2(\varepsilon) > \lambda^{-\frac{1}{2}}$. В этом случае интеграл $I_1(\lambda)$ записывается в виде суммы следующих двух интегралов

$$I_{11}(\lambda) = \int_0^{\lambda^{-\frac{1}{2}}} y^q e^{\pm i\lambda y^2} a_1(y,s)dy \quad \text{и} \quad I_{12}(\lambda) = \int_{\lambda^{-\frac{1}{2}}}^{\delta_2(\varepsilon)} y^q e^{\pm i\lambda y^2} a_1(y,s)dy.$$

Очевидно, что $I_{11}(\lambda)$ имеет оценку вида (2.3).

Теперь используем формулу интегрирования по частям для интеграла $I_{12}(\lambda)$ и получим следующую оценку:

$$|I_{12}(\lambda)| \leqslant \lambda^{-\frac{q+1}{2}} C_1 V_0^{\delta_2}[a_1(\cdot,s)]. \tag{2.4}$$

Тогда, с помощью неравенств (2.3) и (2.4), мы имеем оценку

$$|I_1(\lambda)| \leqslant \frac{C||a_1(\cdot,s)||_V}{\lambda^{\frac{q+1}{2}}}, \quad (C = const).$$

Суммированием полученных оценок приходим к доказательству леммы 2.6. □

Лемма 2.7. *Существует окрестность* $V_1 \times U \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m$ *начала координат, такая, что для любого* $q > 0$, $\psi \in C_0^\infty(V_1 \times U)$ *и* $max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} \geqslant |\xi_3|$ *имеет место следующая оценка:*

$$|\widehat{\mu}_q(\xi)| \leqslant \frac{C\|\psi\|_{C^1}}{|\xi|}.$$

Доказательство. Отметим, что $K(x_1,x_2,\eta)=\frac{Hessf(x_1,x_2,\eta)}{(1+|\nabla f(x_1,x_2,\eta)|^2)^2}$ является аналитической функцией (см [6]. стр. 72, теорема 3) в малой окрестности начала координат. Так как $|\nabla_x f(0,0,0)|=0$, то существует окрестность начала координат $V_1\times U$, такая, что для любой точки $(x_1,x_2,\eta)\in V_1\times U$ выполняется неравенство $|\nabla_x f(x_1,x_2,\eta)|\leqslant\frac{1}{2}$. Без ограничения общности мы можем считать, что $|\xi_1|=max\{|\xi_1|,|\xi_2|\}\geqslant|\xi_3|$. Случай $|\xi_2|=max\{|\xi_1|,|\xi_2|\}\geqslant|\xi_3|$ может быть аналогично рассмотрен. В этом случае интеграл $\widehat{\mu}_q(\xi)$ записывается в виде следующего двумерного демпфированного осцилляторного интеграла:

$$\widehat{\mu}_q(\xi)=\int_{\mathbb{R}^2}e^{i(x_1\xi_1+x_2\xi_2+f(x_1,x_2,\eta)\xi_3)}a(x_1,x_2,\eta)|Hessf(x_1,x_2,\eta)|^q dx_1dx_2, \tag{2.5}$$

где

$$a(x_1,x_2,\eta)=\frac{\psi(x_1,x_2,f(x_1,x_2,\eta))}{\sqrt{(1+|\nabla f(x_1,x_2,\eta)|^2)^{4q-1}}}.$$

Теперь используем теорему Фубини для интеграла (2.5) и получим:

$$\widehat{\mu}_q(\xi)=\int_{\mathbb{R}}\widehat{\mu}^0_q(\xi_1,\xi_3,x_2)e^{i\xi_3 s_2 x_2}dx_2,$$

где

$$\widehat{\mu}^0_q(\xi_1,\xi_3,x_2)=\int_{\mathbb{R}}e^{i\xi_1F_1(x_1,x_2,\xi_1,\xi_3,\eta)}a(x_1,x_2,\eta)|Hessf(x_1,x_2,\eta)|^q dx_1$$

и $F_1(x_1,x_2,\xi_1,\xi_3,\eta)=\frac{\xi_3}{\xi_1}f(x_1,x_2,\eta)+x_1$. Очевидно, что для любого $(x_1,x_2,\eta)\in V_1\times U$ выполняется неравенство:

$$|F'_{1x_1}(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2,\eta)|=|1+\frac{\xi_3}{\xi_1}f'_{x_1}(x_1,x_2,\eta)|\geqslant\frac{1}{2}.$$

Согласно лемме 2.4 функция $|Hessf(x_1,x_2,\eta)|^q$ имеет ограниченную вариацию по $Pr_1(V_1)$ и ее полная вариация ограничена в $Pr_2(V_1)\times U$ при любом $q>0$, где $Pr_1(V_1)$ $(Pr_2(V_1))$ проекция на ось $\mathbb{R}_{x_1}$ $(\mathbb{R}_{x_2})$ соответственно. Поэтому, используя лемму 2.6, получим следующее неравенство:

$$|\widehat{\mu}^0_q(\xi_1,\xi_3,x_2)|\leqslant\frac{C_1||a(\cdot,x_2,\eta)||_{C^1}}{|\xi_1|}\leqslant\frac{\sqrt{3}C_1||a(\cdot,x_2,\eta)||_{C^1}}{|\xi|}.$$

Интегрируя последнее неравенство по $Pr_2(V_1)$ для интеграла $\widehat{\mu}_q(\xi)$, имеем оценку:

$$|\widehat{\mu}_q(\xi)|\leqslant\frac{C\|\psi\|_{C^1}}{|\xi|}.$$

Лемма 2.7 доказана. □

Следствие 1. *Пусть $\varepsilon>0$ – произвольное фиксированное положительное число и $\Gamma_\varepsilon\in\mathbb{R}^3$ – конус, определенный соотношением*

$$\Gamma_\varepsilon:=\{\xi\in\mathbb{R}^3:\varepsilon|\xi_3|\leqslant max\{|\xi_1|,|\xi_3|\}\}.$$

Существуют окрестность $V_1\times U$ начала координат и положительное число $C_\varepsilon>0$ такие, что для любого $q>0$, $\psi\in C_0^\infty(V_1\times U)$ и $\xi\in\Gamma_\varepsilon$ выполняется следующая оценка:

$$|\widehat{\mu}_q(\xi)|\leqslant\frac{C_\varepsilon\|\psi\|_{C^1}}{|\xi|}.$$

Следствие 1 показывает, что для $\widehat{\mu}_q(\xi)$ справедлива искомая оценка при $\xi\in\Gamma_\varepsilon$, при всех $q>0$. Далее исследуем поведение $\widehat{\mu}_q(\xi)$ при $\xi\in\mathbb{R}^3\setminus\Gamma_\varepsilon$.

3. Об асимптотическом поведении $\widehat{\mu}_q(\xi)$

В этом параграфе исследуем поведение $\widehat{\mu}_q(\xi)$ в случае, когда $\xi \in \mathbb{R}^3 \backslash \Gamma_\varepsilon$, где ε – достаточно малое фиксированное положительное число. В этом случае $\widehat{\mu}_q(\xi)$ записывается в виде следующего двумерного осцилляторного интеграла:

$$\widehat{\mu}_q(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi_3 F(x_1,x_2,s_1,s_2,\eta)} a(x_1,x_2,\eta) |Hessf(x_1,x_2,\eta)|^q dx_1 dx_2, \tag{3.1}$$

где

$$a(x_1,x_2,\eta) = \frac{\psi(x_1,x_2,f(x_1,x_2,\eta))}{\sqrt{(1+|\nabla f(x_1,x_2,\eta)|^2)^{4q-1}}},$$

$$F(x_1,x_2,s_1,s_2,\eta) = f(x_1,x_2,\eta) + s_1x_1 + s_2x_2,\ s_1 = \frac{\xi_1}{\xi_3},\ s_2 = \frac{\xi_2}{\xi_3},$$

$$Hessf(x_1,x_2,\eta) = detD^2 f(x_1,x_2,\eta).$$

Выбирая малую окрестность $V_1 \times U$, можем предположить, что ψ бесконечно гладкая функция с достаточно малым носителем.

Заметим, что если $rank(D^2 f(0,0,0)) = 1$, то

$$\text{либо} \quad \frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x_1^2} \neq 0, \quad \text{либо} \quad \frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x_2^2} \neq 0.$$

Ради определенности можно предполагать, что $\frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x_1^2} \neq 0$. Тогда, согласно теореме о неявной функции, уравнение

$$F_{x_1}(x_1,x_2,s_1,s_2,\eta) = f_{x_1}(x_1,x_2,\eta) + s_1 = 0$$

имеет единственное аналитическое решение $x_1 = x_1(x_2,s_1,\eta)$ в малой окрестности начала координат в $\mathbb{R}_{x_1} \times \mathbb{R}_{s_1} \times U$.

Согласно теореме Фубини интеграл (3.1) записывается в виде

$$\widehat{\mu}_q(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mu}_q^1(\xi,x_2) e^{i\xi_3 s_2 x_2} dx_2,$$

где

$$\widehat{\mu}_q^1(\xi,x_2) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 F_1(x_1,x_2,s_1,\eta)} a(x_1,x_2,\eta) |Hessf(x_1,x_2,\eta)|^q dx_1$$

и $F_1(x_1,x_2,s_1,\eta) = f(x_1,x_2,\eta) + s_1x_1$. Теперь рассмотрим интеграл $\widehat{\mu}_q^1(\xi,x_2)$.

Предложение 1. *Если аналитическая функция $f(x_1,x_2,\eta)$ удовлетворяет условиям: $\nabla f(0,0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x_1^2} \neq 0$, то существует окрестность нуля $V_1 \times U \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m$ такая, что для интеграла $\widehat{\mu}_q^1$ при $q \geqslant 1$ справедливо следующее асимптотическое соотношение:*

$$\widehat{\mu}_q^1(\xi,x_2) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\xi_3|}} e^{i(\frac{\pi}{4} sgn(\frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x_1^2}\xi_3) + \xi_3 F_1(x_1(x_2,s_1,\eta),x_2,s_1))} \times$$

$$\times |Hessf(x_1(x_2,s_1,\eta),x_2,\eta)|^q a(x_2,s_1,\eta) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{|\xi|}\right) \quad (\textit{при} \quad |\xi| \to +\infty),$$

где $a(x_2,s_1,\eta) := a(x_1(x_2,s_1,\eta),x_2,\eta)\phi(x_2,s_1,\eta)$, здесь ϕ – некоторая гладкая функция, причем $O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)$ равномерно относительно малых параметров (x_2,s_1,η), т.е. существуют $C > 0$, и окрестность нуля U_1 такие, что при всех $(x_2,s_1,\eta) \in U_1$ выполняется неравенство $\left|O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)\right| \leqslant \frac{C}{|\xi|}$.

Доказательство. В интеграле $\widehat{\mu}_q^1$ применим замену переменных

$$x_1 = X_1 + x_1(x_2, s_1, \eta)$$

и получим:

$$\widehat{\mu}_q^1(\xi, x_2) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 F_1(X_1 + x_1(x_2,s_1,\eta), x_2, s_1, \eta)} a(X_1 + x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta) \times$$
$$\times |Hessf(X_1 + x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta)|^q dX_1.$$

Заметим, $Hessf(X_1 + x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta)$ – вещественно-аналитическая функция. И так как $q \geqslant 1$, то из леммы 2.5 следует, что

$$|Hessf(X_1 + x_1(x_2, s_1, \eta), x_2)|^q - |Hessf(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2)|^q =$$
$$= |X_1| \vartheta(X_1, x_2, s_1, \eta), \tag{3.2}$$

где $\vartheta(X_1, x_2, s_1, \eta)$ – функция, имеющая ограниченную вариацию по X_1, и ее полная вариация $V_{-\delta}^{\delta}[\vartheta(\cdot, x_2, s_1, \eta)]$ – ограниченная функция от (x_2, s_1, η).

Запишем интеграл $\widehat{\mu}_q^1(\xi, x_2)$ в следующем виде:

$$\widehat{\mu}_q^1(\xi, x_2) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 F_1(X_1 + x_1(x_2,s_1,\eta), x_2, s_1, \eta)} a(X_1 + x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta) \times$$
$$\times \left[|Hessf(X_1 + x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta)|^q - |Hessf(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta)|^q\right] dX_1 +$$
$$+ |Hessf(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta)|^q \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 F_1(X_1 + x_1(x_2,s_1,\eta), x_2, s_1, \eta)} \times$$
$$\times a(X_1 + x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta) dX_1 = I_1 + I_2.$$

Используя соотношение (3.2), можем записать I_1 в форме осцилляторного интеграла с множителем гашения:

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 F_1(X_1 + x_1(x_2,s_1,\eta), x_2, s_1, \eta)} |X_1| a_1(X_1, x_2, s_1, \eta) dX_1,$$

где $a_1(X_1, x_2, s_1, \eta) = a(X_1 + x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta)\vartheta(X_1, x_2, s_1, \eta)$ и $|X_1|$ играет роль гасителя. Согласно лемме 2.6 получим неравенство :

$$|I_1| \leqslant \frac{C||a(\cdot, x_2, s_1, \eta) \cdot \vartheta(\cdot, x_2, s_1, \eta)||_V}{|\xi_3|} \leqslant \frac{C_1||a(\cdot, x_2, s_1, \eta) \cdot \vartheta(\cdot, x_2, s_1, \eta)||_V}{|\xi|},$$

поскольку $|\xi_3| \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}|\xi|$ и $C_1 = \sqrt{3}C$.

Теперь рассмотрим следующий одномерный осцилляторный интеграл:

$$I_2 = |Hessf(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta)|^q \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 F_1(X_1 + x_1(x_2,s_1,\eta), x_2, s_1, \eta)} \times$$
$$\times a(X_1 + x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta) dX_1.$$

Заметим, что амплитуда последнего осциллирующего интеграла является гладкой функцией с достаточно малым носителем.

Благодаря лемме Морса существуют окрестность $\mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_{x_2} \times \mathbb{R}_{s_1} \times U$ начала координат и диффеоморфизм (см. [7], стр. 66, лемма 3.3):

$$(X_1, x_2, s_1, \eta) \mapsto (X_1(y, x_2, s_1, \eta), x_2, s_1, \eta)$$

такой, что фазовая функция $F_1(X_1 + x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, s_1, \eta)$ приводится к виду

$$F_1(X_1(y, x_2, s_1, \eta) + x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, s_1, \eta) = \pm y^2 + F_1(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, s_1, \eta),$$

причем знак перед y^2 совпадает с $sign\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,0,0)\right)$ и $(X_1(0, \cdot, \cdot, \cdot) \equiv 0$. Таким образом, для осцилляторного интеграла I_2 мы имеем:

$$I_2 = |Hessf(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta)|^q e^{i\xi_3 F_1(x_1(x_2,s_1,\eta), x_2, s_1, \eta)} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} e^{\pm i\xi_3 y^2} a(X_1(y, x_2, s_1, \eta) + x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta) \frac{\partial X_1(y, x_2, s_1, \eta)}{\partial y} dy.$$

Теперь, используя стандартный метод стационарной фазы [7], получим:

$$I_2 = |Hessf(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta)|^q e^{i\xi_3 F_1(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, s_1, \eta)} \times$$

$$\times \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\xi_3}} e^{\pm isgn(\xi_3)\frac{\pi}{4}} a(x_2, s_1, \eta) + O\left(\frac{1}{|\xi_3|^{\frac{3}{2}}}\right)\right),$$

где $a(x_2, s_1, \eta) = a(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta) \frac{\partial X_1(0, x_2, s_1, \eta)}{\partial y}$.

В результате, для осцилляторного интеграла $\widehat{\mu}_q^1(\xi, x_2)$, имеем:

$$\widehat{\mu}_q^1(\xi, x_2) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\xi_3|}} e^{i\left(\pm\frac{\pi}{4} sgn(\xi_3) + \xi_3 F_1(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, s_1, \eta)\right)} \times$$

$$\times |Hessf(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta)|^q a(x_2, s_1, \eta) + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right),$$

где

$$F_1(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, s_1, \eta) = s_1 x_1(x_2, s_1, \eta) + f(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta).$$

Предложение 1 доказано. □

Следствие 2. *Пусть $f(x_1, x_2, \eta)$ удовлетворяет условиям предложения 1, тогда существует окрестность нуля $V_1 \times U \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m$ такая, что для интеграла $\widehat{\mu}_q$ при $q \geqslant 1$ справедливо следующее асимптотическое соотношение:*

$$\widehat{\mu}_q(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\xi_3|}} e^{\frac{\pi}{4} isgn(\frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x_1^2}\xi_3)} \times$$

$$\times \int e^{i\xi_3(F_1(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, s_1) + s_2 x_2)} |Hessf(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta)|^q a(x_2, s_1, \eta) dx_2 +$$

$$+ O\left(\frac{1}{|\xi|}\right) (\text{при} \quad |\xi| \to +\infty),$$

где $a(x_2, s_1, \eta) := a(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta)\phi(x_2, s_1, \eta)$, здесь ϕ – некоторая гладкая функция, причем $O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)$ равномерно относительно малых параметров (η).

Следствие 2 непосредственно вытекает из предложения 1.

Следующая лемма доказывается непосредственными вычислениями (см. [15]).

Лемма 3.1. *Пусть $F(x_1, x_2, s_1, s_2, \eta)$ гладкая функция, зависящая от параметров (s_1, s_2, η) и $F'_{x_1}(0,0,0,0,0) = 0$, $F''_{x_1}(0,0,0,0,0) \neq 0$. Если $x_1 = x_1(x_2, s_1, s_2, \eta)$ является гладким решением уравнения $F'_{x_1}(x_1, x_2, s_1, s_2, \eta) = 0$, то для второй производной от функции $F(x_1(x_2, s_1, s_2, \eta), x_2, s_1, s_2, \eta)$ относительно x_2 имеет место следующее тождество:*

$$\frac{\partial^2 F(x_1(x_2, s_1, s_2, \eta), x_2, s_1, s_2, \eta)}{\partial x_2^2} = \frac{HessF(x_1(x_2, s_1, s_2, \eta), x_2, s_1, s_2, \eta)}{\frac{\partial^2 F(x_1(x_2, s_1, s_2, \eta), x_2, s_1, s_2, \eta)}{\partial x_1^2}}.$$

Так как $HessF_1(x_1, x_2, s_1, \eta) = Hessf(x_1, x_2, \eta)$, то, в силу леммы 3.1, имеем:

$$\frac{\partial^2 F_1(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, s_1)}{\partial x_2^2} = \frac{Hessf(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2)}{\frac{\partial^2 f(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta)}{\partial x_1^2}}.$$

Таким образом, достаточно рассмотреть поведение следующего одномерного осцилляторного интеграла с множителем гашения:

$$I_q(\xi_3) = \int e^{i\xi_3(F_1(x_2, s_1, \eta) + x_2 s_2)} \widetilde{a}(x_2, s_1, \eta) |F_1''(x_2, s_1, \eta)|^q dx_2, \tag{3.3}$$

где $\widetilde{a}(x_2, s_1, \eta) = a(x_2, s_1, \eta)|\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2)|^q$ и $F_1(x_2, s_1, \eta)$ – аналитическая функция. Если $F_1(x_2, s_1, \eta)$ является полиномом, то в силу теоремы Д.М. Оберлина [2] при $q \geq \frac{1}{2}$ для интеграла (3.3) получим:

$$I_q(\xi_3) = O\left(\frac{1}{|\xi_3|^{\frac{1}{2}}}\right), \ \ (\text{при } \ |\xi_3| \to \infty).$$

Далее докажем аналог теоремы Д. М. Оберлина для аналитических функций, которая представляет самостоятельный интерес. Так, доказательство основной теоремы 1.2 сводится к задаче об оценке одномерных осцилляторных интегралов с произвольной аналитической фазой, зависящей от параметров, что является более общим результатом. Как показал Д.М. Оберлин [2], для функции класса C^∞ аналогичное утверждение не имеет место.

4. Доказательство основной теоремы 1.2

Теперь рассмотрим следующий одномерный осцилляторный интеграл:

$$I_q(\xi_3) = \int e^{i\xi_3 F(x_2,\eta)} a(x_2, \eta)|F''(x_2, \eta)|^q dx_2, \tag{4.1}$$

где $F(x_2, \eta)$ – вещественнозначная аналитическая функция в окрестности нуля $W \times U (W \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$, удовлетворяющая следующим условиям: $F(x_2, \eta) \not\equiv 0, F(0, 0) = 0$ и $a(x_2, \eta) \in C_0^\infty(W \times U)$.

Предложение 2. *Пусть $F(x_2, \eta)$ – вещественнозначная аналитическая функция в начале координат. Тогда существует окрестность начала координат $W \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ такая, что для любого вещественного числа $q \geqslant \frac{1}{2}$ справедлива следующая оценка:*

$$|I_q(\xi_3)| \leqslant \frac{C||a||_V}{|\xi_3|^{\frac{1}{2}}}.$$

Доказательство. Если функция $F(x_2, \eta)$ удовлетворяет условиям подготовительной теоремы Вейерштрасса [16], т.е. $F(x_2, 0) \not\equiv 0$, то получим результат работы [4], ибо в этом случае $F(x_2, 0)$ имеет особенность типа A_k. Это условие эквивалентно тому, что $F'_{x_2}(x_2, 0)$ в точке $x_2 = 0$ имеет корень кратности k $(k < \infty)$ при условии $F'_{x_2}(0, 0) = 0$.

Мы рассмотрим случай, когда функция $F(x_2, \eta)$ не удовлетворяет условиям подготовительной теоремы Вейерштрасса [16]. Точнее, случай, когда $F(x_2, 0) \equiv 0$, хотя $F \not\equiv 0$. Отметим, что в этом случае, как показано в классической работе Осгуда, аналог теоремы Вейерштрасса не имеет место (см. [17], §2, стр. 90).

В случае когда $F(x_2, \eta)$ аналитически продолжается во множество $\mathbb{C} \times B$, где $B \subset \mathbb{C}^m$ некоторый шар с центром в начале координат, мы можем использовать лемму 3 работы [12]. Однако, как показывает контрпример Осгуда (см. [17], §2, стр. 90), в общем случае утверждение леммы 3 работы [12] неверно.

Тем не менее мы можем использовать лемму 2.3, так как $F(x_2, \eta)$ – ненулевая вещественнозначная аналитическая функция на множестве $W \times U$ и $F(0, 0) = 0$. Тогда, применяя лемму 2.3, построим многообразие Y и собственное аналитическое отображение $\pi : Y \mapsto U$ такие, что функция $F(x_2, \pi(y))$, в локальных координатах, имеет вид

$$F(x_2, \pi(y)) = \varphi_1^{\alpha_1}(y)\varphi_2^{\alpha_2}(y) \dots \varphi_m^{\alpha_m}(y) b(x_2, y) p(x_2, y),$$

где $p(x_2, y)$ – псевдополином и $\varphi(y)$ – локальные координаты. В этом случае для каждой точки $y^0 \in Y$ существуют локальные координаты $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ с центром в этой точке и удовлетворяющие условиям $\varphi_j(y^0) = 0, \ \ j = 1, \dots, m$. Мы будем считать $\pi^{-1}(\overline{U}) \subset Y$ – некоторое компактное множество на вещественно-аналитическом многообразии Y.

Следовательно, интеграл (4.1) имеет следующий вид:

$$I_q(\xi_3) = \int e^{i\xi_3 F_1(x_2,y)} a(x_2,y)|F_1''(x_2,y)|^q dx_2, \tag{4.2}$$

где $F_1(x_2,y) = \varphi_1^{\alpha_1}(y)\varphi_2^{\alpha_2}(y)\ldots\varphi_m^{\alpha_m}(y)b(x_2,y)p(x_2,y)$

Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 4.1. *Пусть $F(x_2,\eta)$ – вещественнозначная аналитическая функция на множестве $W\times\pi^{-1}(\overline{U})$. Тогда, для любой точки $y^0\in\pi^{-1}(\overline{U})$ существует окрестность $\omega\subset\mathbb{R}^m$ такая, что при любом $q\geqslant\frac{1}{2}$, для интеграла $I_q(\xi_3)$ справедлива следующая оценка:*

$$|I_q(\xi_3)| \leqslant \frac{C||a(\cdot,y)||_V}{|\xi_3|^{\frac{1}{2}}},$$

где $\omega\subset\mathbb{R}^m$ – соответствующая окрестность начала координат в $\mathbb{R}^m$.

Доказательство. Далее, используем покрытие множества $\pi^{-1}(\overline{U})$ с конечным числом окрестностей ω_j точек $y^j\in\pi^{-1}(\overline{U})$.

Пусть y^0 – некоторая фиксированная точка в $\pi^{-1}(\overline{U})$. Так как, φ^α ($\varphi^\alpha = \varphi_1^{\alpha_1}(y)\varphi_2^{\alpha_2}(y)\ldots\varphi_m^{\alpha_m}(y)$) ограничена в некоторой окрестности точки y^0, то функция $F_1(x_2,y)$ имеет вид:

$$F_1(x_2,y) = \varphi^\alpha F_2(x_2,y),$$

где $F_2(x_2,y) = b(x_2,y)p(x_2,y)$.

Из леммы 2.3 вытекает, что для каждой точки $y^0\in Y$ этого многообразия существует координатная окрестность ω такая, что $F_2(x_2,y)$ – вещественнозначная аналитическая функция в точке $(0,y^0)$, и при этом выполняется условие $F_2(x_2,y^0)\not\equiv 0$. Поэтому мы можем применить подготовительную теорему Вейерштрасса к функции $F_2(x_2,y)$.

Заметим, что φ^α ограничено в окресности ω. Используя предложение 2.1 работы [4] и применяя стандартные методы анализа при $q\geqslant\frac{1}{2}$, мы приходим к следующей оценке

$$|I_q(\xi_3)| \leqslant \frac{C}{|\xi_3|^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.3}$$

Так как, $\pi^{-1}(\overline{U})$ – компактное множество, то, повторяя эти рассуждения для каждого множества ω_j, мы приходим к оценке (4.3). Наконец, эти локальные оценки позволяют получить искомую оценку для $\pi^{-1}(\overline{U})$. Лемма 4.1 доказана. □

Так как $\pi : Y\mapsto U$ собственное аналитическое отображение [13], применяя лемму 4.1 с использованием стандартных методов анализа, приходим к доказательству предложения 2. Действительно, согласно лемме 4.1 для каждой точки $y^0\in\pi^{-1}(\overline{U})$ существует координатная окрестность V с центром в точке y^0 такая, что $F(x_2,\pi(y))$ записывается в виде

$$F(x_2,\pi(y)) = \varphi_1^{\alpha_1}(y)\varphi_2^{\alpha_2}(y)\ldots\varphi_m^{\alpha_m}(y)b(x_2,y)p(x_2,y),$$

где $b(x_2,y)$ – вещественно-аналитическая функция, причем $b(x_2,y)\neq 0$ для любой точки $(x_2,y)\in W\times\omega$ и $p(x_2,y)$ – унитарный псевдополином.

Таким образом, имеем необходимую оценку при $(x_2,y)\in W\times\omega$. Так как $\pi^{-1}(\overline{U})$ компактное множество, то существуют конечное покрытие $\pi^{-1}(\overline{U})\subset\bigcup_{j=1}^N\omega_j$ и окрестность нуля W_j такие, что в $W_j\times\omega_j$ мы имеем также искомую оценку. Наконец, переобозначая $W := \bigcap_{j=1}^N W_j\neq\varnothing$, получим искомую оценку в $W\times U$, что доказывает предложение 2. □

Предложение 2 завершает доказательство теоремы 1.2.

В заключении автор выражает глубокую благодарность рецензенту за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C. D.Sogge, E. M.Stein *Averages of functions over hypersurfaces in* $\mathbb{R}^n$ // Invent. Math. 1985. **82**:3. P. 543–556.
2. D.M. Oberlin *Oscillatory integrals with polynomial phase* // MATH.SCAND. 1991. **69**:1, P. 45–56.
3. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн - Заде С.М. *Особенности дифференцируемых отображений.* Част I. 1982. М.: Наука).
4. Sh.A. Muranov *On estimates for oscillatory integrals with damping factor* // Uzbek Mathematical Journal. 2018. **4**. P. 112–125.
5. Икромов И.А., Муранов Ш.А. *Об оценках осцилляторных интегралов с множителем гашения* // Математические заметки. **104**:2. 2018. С. 236–251.
6. Дубровин Б.А.,Новиков С.П.,Фоменко А.Т. *Современная геометрия Методы и приложения* Том I, М.: Эдиториал УРСС. 1998.
7. Федорюк М.В. *Метод перевала.*М.: Наука. 1977.
8. E.M. Stein *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory integrals*, Princeton University Press Princeton, New Jersey. 1993.
9. G.I. Arkhipov, A.A. Karatsuba and V.N. Chubarikov *Trigonometric integrals* // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat, **43**:5 , 971–1003 (1979). 1197 (Russian); English translation in Math. USSR-Izv.15, 21–239 (1980).
10. J.G. VanDer Corput *Zahlentheoretische Abschätzungen* // Math. Ann. 1921. **84**. P. 53–79.
11. Икромов И.А. *Демпфированные осцилляторные интегралы и максимальные операторы* // Математические заметки. **78**:6. 2005. С. 833–852.
12. Садуллаев А.С. *Критерии алгебраичности аналитических множеств* // Функц. анализ и его прил. 1972. **6**:1. С. 85–86.
13. Edward Bierstone, Pierre D. Milman *Arc-analytic functions* Invent. math. **101**. 1990. P. 411–424.
14. Эрдейи А. *Асимптотические разложения.* 1962. М.: Физматгиз.
15. I.A. Ikromov, D. Müller, M. Kempe *Damped oscillatory integrals and boundedness of maximal operators associated to mixed homogeneous hypersurfaces* // Duke Math.J. 2005. **126**:3. P. 471–490.
16. Мальгранж Б. *Идеалы дифференцируемых функций.* 1968. М.: Мир.
17. W. Osgood *Lehrbuch der Funktionentheorie,* Bd.II, Teubner, Leipzig. 1929.

Шахриддин Абдуллаевич Муранов,
Самаркандский государственный университет,
Университетский бульвар, 15,
140104, г. Самарканд, Узбекистан
E-mail: muranov-2017@mail.ru