ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 4 (2019). С. 35-40.

УДК 517.958

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НЕРАВНОВЕСНОЙ СОРБЦИИ

И.А. КАЛИЕВ, Г.С. САБИТОВА

Аннотация. Фильтрация в пористых средах жидкостей и газов, содержащих ассоциированные с ними (растворенные, взвешенные) твердые вещества, сопровождается диффузией этих веществ и массообменом между жидкой (газовой) и твердой фазами. В работе исследуется система уравнений, моделирующая процесс неравновесной сорбции. Доказывается теорема существования и единственности решения второй начально-краевой задачи в многомерном случае в гельдеровских классах функций. Важную роль при доказательстве теоремы играет полученный принцип максимума. Единственность решения является следствием этого принципа. Существование решения задачи показывается с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке вполне непрерывного оператора. Приведено описание соответствующего оператора. Получены оценки, обеспечивающие вполне непрерывность построенного оператора и отображение некоторого замкнутого множества функций в себя на малом промежутке времени. Затем получены оценки, позволяющие продолжить решение до любого конечного значения времени.

Ключевые слова: моделирование процесса неравновесной сорбции, вторая начально-краевая задача, глобальная однозначная разрешимость.

Mathematics Subject Classification: 35Q35, 76S05

1. Введение

Практически все жидкости, встречающиеся в природе, представляют собой растворы, т.е. смеси двух или более веществ (компонентов). Фильтрация в пористых средах жидкостей и газов, содержащих ассоциированные с ними (растворенные, взвешенные) твердые вещества, сопровождается диффузией этих веществ и массообменом между жидкой (газовой) и твердой фазами. Наиболее распространенными видами массообмена являются сорбция и десорбция, ионный обмен, растворение и кристаллизация, кольматация, сульфатация и суффозия, парафинизация. С учетом особенностей физико-химического взаимодействия растворов с породами пласта рассматриваются задачи равновесной и неравновесной сорбции.

В работе доказывается глобальная однозначная разрешимость второй начально-краевой задачи, моделирующей процесс неравновесной сорбции.

2. Постановка задачи

Пусть $m(x,t)$ – пористость среды, $0 < m(x,t) \le 1$; поровое пространство заполнено раствором и твердой фазой, выпавшей в осадок из раствора; $c(x,t)$ – массовая концентрация определенного вещества в жидкой фазе (на единицу объема раствора); $s(x,t)$ – массовая концентрация твердой фазы этого вещества, выпавшей в осадок (на единицу объема пор).

В равновесных условиях, когда контакт между раствором и твердой фазой поддерживается достаточно длительное время, соотношение между концентрациями $c(x,t)$ в растворе и на сорбенте

I.A. Kaliev, G.S. Sabitova, Neumann boundary value problem for system of equations of non-equilibrium sorption.

Поступила 7 августа 2018 г.

$s(x,t)$ определяется изотермой сорбции. При малых концентрациях раствора, величина абсорбции определяется линейной зависимостью – изотермой Генри $s = \Gamma c$, где $\Gamma > 0$ – некоторая постоянная величина, зависящая от физико-химических свойств среды (постоянная Генри).

Уравнения равновесной сорбции не всегда могут полностью характеризовать особенности поглощения и обмена веществ в двухфазной системе раствор – твердая фаза. В работах [1]–[3] были предложены математические модели для описания процессов неравновесной сорбции. При этом концентрация s твердой фазы связывается с концентрацией c в жидкой фазе уравнением

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\left(\Gamma c - s\right), \tag{1}$$

где положительная постоянная τ – характерное время релаксации, Γ – постоянная Генри. Концентрация c вещества в растворе удовлетворяет уравнению

$$m\frac{\partial c}{\partial t} = D\triangle c - v\cdot\nabla c - \frac{\partial s}{\partial t}, \tag{2}$$

где $D(x,t) > 0$ – коэффициент диффузии, $v(x,t)$ – вектор скорости фильтрации, которые считаются известными функциями указанных аргументов; Δ – оператор Лапласа, ∇ – градиент, $v\cdot\nabla c$ – скалярное произведение векторов v и ∇c.

В работе [4] доказана глобальная однозначная разрешимость первой начально-краевой задачи для системы (1)–(2). В [5], [6] сформулирована разностная аппроксимация дифференциальной задачи по неявной схеме, построено решение разностной задачи с помощью метода прогонки, приведены результаты численных экспериментов.

В настоящей работе рассматривается вторая краевая задача для системы уравнений (1)–(2), описывающей процесс неравновесной сорбции.

Пусть Ω – ограниченная область n-мерного пространства R^n с достаточно гладкой границей $S = \partial\Omega$, $Q_T = \Omega\times(0,T)$, $T > 0$; $S_T = S\times(0,T)$ – боковая поверхность цилиндра Q_T. Требуется найти функции $c(x,t)$, $s(x,t)$, определенные в области Q_T, удовлетворяющие в Q_T уравнениям (1), (2), начальным условиям

$$c(x,0) = c_0(x), \tag{3}$$

$$s(x,0) = s_0(x), \tag{4}$$

и второму краевому условию

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial n} = 0,\ (x,t)\in S_T, \tag{5}$$

где n – внешняя нормаль к $S = \partial\Omega$.

Основным результатом работы является следующая

Теорема. Пусть коэффициенты m, D, v уравнения (2) принадлежат пространству Гельдера $C^{\alpha,\alpha/2}\left(\bar{Q}_T\right)$, $0 < \alpha < 1$; граница области S является $C^{2+\alpha}$ – гладкой; функции $c_0(x)$, $s_0(x)$ принадлежат соответственно пространствам $C^{2+\alpha}(\bar\Omega), C^{\alpha}(\bar\Omega)$; справедливы условия согласования

$$\frac{\partial c_0(x)}{\partial n} = 0,\ x\in S,$$

и выполнены условия $0\le c_0(x)\le M$, $0\le s_0(x)\le\Gamma M, x\in\Omega$. Тогда задача (1)–(5) имеет единственное классическое решение $c(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\bar{Q}_T\right)$, $s(x,t)\in C^{\alpha,1+\alpha/2}\left(\bar{Q}_T\right)$, и справедливы оценки $0\le c(x,t)\le M,\ 0\le s(x,t)\le\Gamma M,\ (x,t)\in Q_T$.

Доказательство теоремы.

Вначале доказываются оценки, представляющие принцип максимума:

$$0\le c(x,t)\le M, (x,t)\in Q_T, \tag{6}$$

$$0\le s(x,t)\le\Gamma M, (x,t)\in Q_T. \tag{7}$$

Из (1) и (3) вытекает представление

$$s(x,t) = s_0(x)e^{-t/\tau} + \frac{\Gamma}{\tau}e^{-t/\tau}\int_0^t c(x,\theta)e^{\theta/\tau}d\theta. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (2), получаем

$$m\frac{\partial c}{\partial t} - D\Delta c + v\cdot\nabla c + \frac{\Gamma}{\tau}c = \frac{1}{\tau}s_0(x)e^{-t/\tau} + \frac{\Gamma}{\tau^2}e^{-t/\tau}\int_0^t c(x,\theta)e^{\theta/\tau}d\theta. \qquad (9)$$

Предположим, что отрицательный минимум $c_{\min} < 0$ функции $c(x,t)$ достигается в некоторой точке (x_0,t_0) внутри области Q_T. Тогда в этой точке $c_t \le 0$, $-\Delta c \le 0$, $\nabla c = 0$, и из (9) получим

$$\frac{\Gamma}{\tau}c_{\min} \ge \frac{1}{\tau}s_0(x_0)e^{-t_0/\tau} + \frac{\Gamma}{\tau^2}c_{\min}e^{-t_0/\tau}\int_0^{t_0} e^{\theta/\tau}d\theta,$$

$$\Gamma c_{\min} \ge s_0(x_0)e^{-t_0/\tau} + \Gamma c_{\min}e^{-t_0/\tau}(e^{t_0/\tau}-1),$$

$$0 \ge s_0(x_0)e^{-t_0/\tau} - \Gamma c_{\min}e^{-t_0/\tau},$$

т.е. получили противоречие, поскольку $s_0(x) \ge 0$, а $c_{\min} < 0$. Следовательно, отрицательный минимум функции $c(x,t)$ не может достигаться внутри области Q_T.

На границе S_T минимум не может достигаться в силу условия (5) и леммы Заремба-Жиро.

Лемма. Пусть $Lu = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)u_{x_ix_j}(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i}(x)$ эллиптический оператор в ограниченной области Ω, с достаточно гладкой границей, $u \in C^2(\Omega)\cap C^1\left(\bar{\Omega}\right)$, $Lu \le 0$ в Ω, и пусть функция $u(x)$ достигает строгого глобального минимума в граничной точке $x_0 \in \partial\Omega$. Тогда $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{x_0} < 0$, где n – внешняя нормаль к $S = \partial\Omega$ в точке x_0.

Эта лемма для гармонических функций была доказана Заремба [7], а в более общей формулировке Жиро [8].

В нашем случае,

$$Lc = D\Delta c - v\cdot\nabla c = F(x,t) = m\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\Gamma}{\tau}c - \frac{1}{\tau}s_0(x)e^{-t/\tau} - \frac{\Gamma}{\tau^2}e^{-t/\tau}\int_0^t c(x,\theta)e^{\theta/\tau}d\theta.$$

Предположим, что отрицательный минимум $c_{\min} < 0$ функции $c(x,t)$ достигается в некоторой точке (x_0,t_0) на границе области S_T. Тогда $F(x_0,t_0) =$

$$= m(x_0,t_0)\frac{\partial c}{\partial t}(x_0,t_0) + \frac{\Gamma}{\tau}c_{\min} - \frac{1}{\tau}s_0(x_0)e^{-t_0/\tau} - \frac{\Gamma}{\tau^2}e^{-t_0/\tau}\int_0^{t_0} c(x_0,\theta)e^{\theta/\tau}d\theta \le$$

$$\le m(x_0,t_0)\frac{\partial c}{\partial t}(x_0,t_0) + \frac{\Gamma}{\tau}c_{\min} - \frac{1}{\tau}s_0(x_0)e^{-t_0/\tau} - \frac{\Gamma}{\tau^2}c_{\min}e^{-t_0/\tau}\int_0^{t_0} e^{\theta/\tau}d\theta =$$

$$= m(x_0,t_0)\frac{\partial c}{\partial t}(x_0,t_0) + \frac{\Gamma}{\tau}c_{\min} - \frac{1}{\tau}s_0(x_0)e^{-t_0/\tau} - \frac{\Gamma}{\tau}c_{\min}e^{-t_0/\tau}\left(e^{t_0/\tau}-1\right) =$$

$$= m(x_0,t_0)\frac{\partial c}{\partial t}(x_0,t_0) - \frac{1}{\tau}s_0(x_0)e^{-t_0/\tau} + \frac{\Gamma}{\tau}c_{\min}e^{-t_0/\tau} < 0.$$

Следовательно, $F(x,t_0) < 0$ в окрестности точки x_0 и можно применить лемму Заремба-Жиро, т.е. $\frac{\partial c}{\partial n}\big|_{x_0} < 0$. Но это противоречит краевому условию (5).

Таким образом, минимум функции $c(x,t)$ достигается на нижней границе области Q_T, т.е. в начальный момент времени. В начальный момент времени функция $c_0(x)$ неотрицательна. Таким образом, мы доказали, что $c(x,t) \ge 0, (x,t) \in Q_T$.

Предположим теперь, что внутри области Q_T достигается положительный максимум $c_{\max} > M$ функции $c(x,t)$, т.е. существует точка $(x_1,t_1) \in Q_T : c(x_1,t_1) = c_{\max} > M$. В этой точке $c_t \ge 0$, $-\Delta c \ge 0$, $\nabla c = 0$, и из (9) получим неравенства

$$\frac{\Gamma}{\tau}c_{\max} \le \frac{1}{\tau}s_0(x_1)e^{-t_1/\tau} + \frac{\Gamma}{\tau^2}c_{\max}e^{-t_1/\tau}\int_0^{t_1} e^{\theta/\tau}d\theta,$$

$$\Gamma c_{\max} \le s_0(x_1)e^{-t_1/\tau} + \Gamma c_{\max}e^{-t_1/\tau}(e^{t_1/\tau}-1),$$

$$0 \le s_0(x_1)e^{-t_1/\tau} - \Gamma c_{\max}e^{-t_1/\tau} = (s_0(x_1) - \Gamma c_{\max})\ e^{-t_1/\tau}.$$

Опять получили противоречие, поскольку $s_0(x) \le \Gamma M$, а $c_{\max} > M$.

На границе S_T максимум также не может достигаться в силу условия (5) и леммы Заремба-Жиро. Рассмотрим

$$Lc = D\Delta c - v\cdot\nabla c = F(x,t) = m\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\Gamma}{\tau}c - \frac{1}{\tau}s_0(x)e^{-t/\tau} - \frac{\Gamma}{\tau^2}e^{-t/\tau}\int_0^t c(x,\theta)e^{\theta/\tau}d\theta.$$

Предположим, что положительный максимум $c_{\max} > M$ функции $c(x,t)$ достигается в некоторой точке (x_1,t_1) на границе области S_T. Тогда $F(x_1,t_1) =$

$$= m(x_1,t_1)\frac{\partial c}{\partial t}(x_1,t_1) + \frac{\Gamma}{\tau}c_{\max} - \frac{1}{\tau}s_0(x_1)e^{-t_1/\tau} - \frac{\Gamma}{\tau^2}e^{-t_1/\tau}\int_0^{t_1} c(x_1,\theta)e^{\theta/\tau}d\theta \geq$$

$$\geq \frac{\Gamma}{\tau}c_{\max} - \frac{1}{\tau}s_0(x_1)e^{-t_1/\tau} - \frac{\Gamma}{\tau^2}c_{\max}e^{-t_1/\tau}\int_0^{t_1} e^{\theta/\tau}d\theta =$$

$$= \frac{\Gamma}{\tau}c_{\max} - \frac{1}{\tau}s_0(x_1)e^{-t_1/\tau} - \frac{\Gamma}{\tau}c_{\max}e^{-t_1/\tau}(e^{t_1/\tau}-1) =$$

$$= -\frac{1}{\tau}s_0(x_1)e^{-t_1/\tau} + \frac{\Gamma}{\tau}c_{\max}e^{-t_1/\tau} =$$

$$= \frac{1}{\tau}\left(\Gamma c_{\max} - s_0(x_1)\right)e^{-t_1/\tau} > \frac{1}{\tau}\left(\Gamma M - \Gamma M\right)e^{-t_1/\tau} = 0.$$

Следовательно, $F(x,t_1) > 0$ в окрестности точки x_1 и можно применить лемму Заремба-Жиро для случая максимума, т.е. $\frac{\partial c}{\partial n}\big|_{x_1} > 0$. Но это противоречит краевому условию (5).

Таким образом, максимум функции $c(x,t)$ достигается на нижней границе области Q_T, т.е. в начальный момент времени. В начальный момент времени функции $c_0(x) \leq M$. Следовательно, $c(x,t) \leq M$, $(x,t)\in Q_T$. Оценка (6) доказана.

Оценка (7) вытекает из представления (8) с использованием (6). В самом деле, поскольку $s_0(x)\geq 0$, $c(x,t)\geq 0$, то из (8) следует, что $s(x,t)\geq 0$ для всех $(x,t)\in Q_T$.

Так как $s_0(x)\leq \Gamma M$, $c(x,t)\leq M$, то

$$s(x,t) \leq s_0(x)e^{-t/\tau} + \frac{\Gamma M}{\tau}e^{-t/\tau}\int_0^t e^{\theta/\tau}d\theta \leq \Gamma M e^{-t/\tau} + \Gamma M e^{-t/\tau}(e^{t/\tau}-1) = \Gamma M.$$

Оценка (7) доказана.

Единственность решения задачи (1)–(5) является следствием леммы.

Существование решения задачи (1)–(5) доказывается с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке вполне непрерывного оператора. Обозначим через V_{T_1} следующее замкнутое выпуклое подмножество в $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\bar{Q}_{T_1}\right)$:

$$V_{T_1} = \left\{ \tilde{c}(x,t) |\, \tilde{c}(x,0) = c_0(x);\, \frac{\partial \tilde{c}(x,t)}{\partial n} = 0, (x,t)\in S_{T_1}; \right.$$

$$\left. ||\tilde{c}||_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_{T_1})} \leq K \right\},$$

где K – некоторое фиксированное положительное число, зависящее от данных задачи (1)–(5), которое мы определим позднее. По заданной функции $\tilde{c}\in V_{T_1}$ найдем функцию

$$\tilde{s}(x,t) = s_0(x)e^{-t/\tau} + \frac{\Gamma}{\tau}e^{-t/\tau}\int_0^t \tilde{c}(x,\theta)e^{\theta/\tau}d\theta. \tag{10}$$

Теперь каждой функции $\tilde{c}\in V_{T_1}$ поставим в соответствие функцию $c = \Lambda(\tilde{c})$ как решение задачи

$$m\frac{\partial c}{\partial t} - D\Delta c + v\cdot\nabla c + \frac{\Gamma}{\tau}c = \frac{1}{\tau}\tilde{s}, \tag{11}$$

$$c(x,0) = c_0(x), x\in\Omega;\ \frac{\partial c(x,t)}{\partial n} = 0, (x,t)\in S_{T_1}. \tag{12}$$

Докажем, что оператор Λ является вполне непрерывным и при достаточно малых T_1 переводит множество V_{T_1} в себя.

Покажем, что $\tilde{s}\in C^{\alpha,\alpha/2}\left(\bar{Q}_{T_1}\right)$. Из (10) следует неравенство

$$|\tilde{s}|^{(0)}_{Q_{T_1}} \equiv \max_{(x,t)\in\bar{Q}_{T_1}} |\tilde{s}(x,t)| \leq |s_0|^{(0)}_{\Omega} + \Gamma|\tilde{c}|^{(0)}_{Q_{T_1}} \max_{t\in[0,T_1]}(1-e^{-t/\tau}).$$

Отсюда, используя разложение функции $e^{-t/\tau}$ в ряд Маклорена, несложно получить (при $T_1 < \tau$) оценку

$$|\tilde{s}|^{(0)}_{Q_{T_1}} \leq |s_0|^{(0)}_{\Omega} + T_1\frac{\Gamma}{\tau}|\tilde{c}|^{(0)}_{Q_{T_1}}. \tag{13}$$

Аналогично, из (10) следует оценка

$$|\tilde{s}|^{(\alpha)}_{x,Q_{T_1}} \equiv \sup_{(x,t),(x',t)\in\bar{Q}_{T_1}} \frac{|\tilde{s}(x,t)-\tilde{s}(x',t)|}{|x-x'|^{\alpha}} \leq$$

$$\leq |s_0|^{(\alpha)}_{x,\Omega} + \Gamma|\tilde{c}|^{(\alpha)}_{x,Q_{T_1}}\max_{t\in[0,T_1]}(1-e^{-t/\tau}) \leq |s_0|^{(\alpha)}_{x,\Omega} + T_1\frac{\Gamma}{\tau}|\tilde{c}|^{(\alpha)}_{x,Q_{T_1}}, \tag{14}$$

т.е. функция $\tilde{s}$ удовлетворяет условию Гёльдера по пространственным переменным с показателем α.

Функция $\tilde{s}$ удовлетворяет условию Гёльдера по переменной t с любым показателем $0 < \beta \leq 1$ (даже липшицева), поскольку у нее существует ограниченная производная по времени

$$\tilde{s}_t(x,t) = -\frac{1}{\tau}s_0(x)e^{-t/\tau} - \frac{\Gamma}{\tau^2}e^{-t/\tau}\int_0^t \tilde{c}(x,\theta)e^{\theta/\tau}d\theta + \frac{\Gamma}{\tau}\tilde{c}(x,t),$$

$$|\tilde{s}_t|^{(0)}_{Q_{T_1}} \leq \frac{1}{\tau}|s_0|^{(0)}_{\Omega} + \frac{\Gamma}{\tau}|\tilde{c}|^{(0)}_{Q_{T_1}}\max_{t\in[0,T_1]}(1-e^{-t/\tau}) + \frac{\Gamma}{\tau}|\tilde{c}|^{(0)}_{Q_{T_1}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\tau}|s_0|^{(0)}_{\Omega} + \frac{2\Gamma}{\tau}|\tilde{c}|^{(0)}_{Q_{T_1}}. \tag{15}$$

В частности, при $\beta = 1$ имеем

$$\frac{|\tilde{s}(x,t)-\tilde{s}(x,t')|}{|t-t'|^{\alpha/2}|t-t'|^{1-\alpha/2}} \leq |\tilde{s}_t|^{(0)}_{Q_{T_1}}.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$|\tilde{s}|^{(\alpha/2)}_{t,Q_{T_1}} \equiv \sup_{(x,t),(x,t')\in\bar{Q}_{T_1}} \frac{|\tilde{s}(x,t)-\tilde{s}(x,t')|}{|t-t'|^{\alpha/2}} \leq T_1^{1-\alpha/2}|\tilde{s}_t|^{(0)}_{Q_{T_1}}. \tag{16}$$

Оценки (13)–(16) доказывают, что $\tilde{s} \in C^{\alpha,\alpha/2}\left(\bar{Q}_{T_1}\right)$, и при $T_1 < 1$ справедлива оценка

$$||\tilde{s}||_{C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_{T_1})} \leq C_1||s_0||_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} + T_1^{1-\alpha/2}C_2||\tilde{c}||_{C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_{T_1})}, \tag{17}$$

где C_1, C_2 – некоторые положительные константы, не зависящие от s_0 и $\tilde{c}$. Мы будем считать, что C_1, C_2 зависят от T, но не зависят от $T_1 < \min\{T, 1, \tau\}$.

Поскольку

$$\tilde{s}_t = \frac{1}{\tau}(\Gamma\tilde{c} - \tilde{s}),$$

то $\tilde{s} \in C^{\alpha,1+\alpha/2}\left(\bar{Q}_{T_1}\right)$.

Для решения $c(x,t)$ задачи (11), (12) справедлива оценка [9, с. 365]

$$||c||_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_{T_1})} \leq C(||c_0||_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})} + ||\tilde{s}||_{C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_{T_1})}), \tag{18}$$

где C – положительная константа, не зависящая от c_0, $\tilde{s}$. Мы будем полагать, что C зависит от T, но не зависит от $T_1 < T$. Используя (17), (18), имеем

$$||c||_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_{T_1})} \leq$$

$$\leq C_3\left(||c_0||_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})} + ||s_0||_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})}\right) + T_1^{1-\alpha/2}C_4||\tilde{c}||_{C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_{T_1})}. \tag{19}$$

Отсюда следует, что оператор $\Lambda : \tilde{c} \to c$ является вполне непрерывным.

Выберем константу K, фигурирующую при определении множества V_{T_1}, исходя из условия

$$K > C_3\left(||c_0||_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})} + ||s_0||_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})}\right).$$

Для определенности положим

$$K = 2C_3\left(||c_0||_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})} + ||s_0||_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})}\right).$$

Тогда из (19) следует, что при достаточно малых T_1 оператор Λ переводит множество V_{T_1} в себя.

По теореме Шаудера о неподвижной точке вполне непрерывного оператора множество V_{T_1} содержит неподвижную точку $\tilde{c}$, которая вместе с соответствующей ей функцией $\tilde{s}$ из (10) является решением задачи (1)–(5) на временном интервале $[0, T_1]$. Полученное решение можно за k шагов продолжить на $[T_k, T_{k+1}]$, $k = 1, 2, ...$, причем $T_{k+1} - T_k \geq \delta > 0$ и δ не зависит от номера k. Это видно из оценки (19)

$$C_3 \left(||c_0||_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})} + ||s_0||_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} \right) + T_1^{1-\alpha/2} C_4 ||\tilde{c}||_{C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_{T_1})} < K =$$
$$= 2C_3 \left(||c_0||_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})} + ||s_0||_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} \right).$$

Поскольку $||\tilde{c}||_{C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_{T_1})} \leq K$, то отсюда следует, что в качестве δ можно выбрать

$$\delta^{1-\alpha/2} = \frac{K}{2C_4 K} = \frac{1}{2C_4},$$

не зависящий от номера k. Тем самым решение за конечное число шагов может быть продолжено до любого $0 < T < +\infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. Lapidus, W.R. Amundson *Mathematics of adsorption in beds. VI. The effect of longitudinal diffusion in ion exchange and chromatographic columns* // J. Phys. Chem. 1952. V. 56. P. 984–988.
2. K.H. Coats, B.D. Smith *Dead and pore volume and dispersion in porous media* // Soc. Petrol. Eng. J. 1964. V. 4, N 1. P. 73–84.
3. *Развитие исследований по теории фильтрации в СССР* / Под ред. П.Я. Полубариновой-Кочиной. М.: Наука. 1969. 546 с.
4. Калиев И.А., Сабитова Г.С. *Об одной задаче неравновесной сорбции* // Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Том VI, № 1 (13). С. 35–39.
5. Калиев И.А., Мухамбетжанов С.Т., Сабитова Г.С. *Численное моделирование процесса неравновесной сорбции* // Уфимский математический журнал. 2016. Т. 8, № 2. С. 39–43.
6. I.A. Kaliev, S.T. Mukhambetzhanov, G.S. Sabitova *Mathematical Modeling of Non-Equilibrium Sorption* // Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS). 2016. V. 99, N 12. P. 1803–1810.
7. S. Zaremba *Sur un probleme toujours possible comprenant, a titre de cas particuliers, le probleme de Dirichlet et celui de Neumann* // J. Math. Pures Appl. 1927. V. 6. P. 127–163.
8. G. Giraud *Generalisation des problemes sur les operations du type elliptique* // Bull. Sc. Math. 1932. V. 56. P. 248–272.
9. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука. 1967. 736 с.

Ибрагим Адиетович Калиев,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
проспект Ленина, 49,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: kalievia@mail.ru

Гульнара Сагындыковна Сабитова,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
проспект Ленина, 49,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: sabitovags@mail.ru