ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 3 (2019). С. 46-62.

УДК 517.5

ОЦЕНКИ СНИЗУ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

О.А. КРИВОШЕЕВА, А.С. КРИВОШЕЕВ, А.И. РАФИКОВ

Аннотация. Исследуются оценки снизу для целых функций уточненного порядка и вполне регулярного роста. Вводится понятие индекса конденсации для последовательностей комплексных чисел уточненного порядка. Это понятие обобщает понятие индекса конденсации для последовательностей первого порядка. Вводится также правильно сбалансированное множество (правильно распределенное множество с нулевым индексом конденсации). Показано, что регулярное множество является правильно сбалансированным. Доказывается, что правильная сбалансированность нулевого множества целой функции является необходимым и достаточным условием для того, чтобы существовало семейство попарно не пересекающихся кружков с центрами в ее нулях и относительно малыми радиусами, вне которых модуль функции имеет оценки снизу, асимптотически совпадающие с ее оценками сверху всюду в плоскости. Таким образом, показывается, что понятие правильно сбалансированного множества является естественным обобщением понятия регулярного множества на случай произвольных последовательностей (в том числе и кратных). Приводится также конструктивный способ построения исключительного множества, состоящего из кружков с центрами в нулях. В некоторых случаях сумму радиусов этих кружков можно сделать сколь угодно малой.

Ключевые слова: целая функция, уточненный порядок, вполне регулярный рост, правильно сбалансированное множество, регулярное множество.

Mathematics Subject Classification: 30D10

1. Введение

Пусть f — целая функция уточненного порядка $\rho(r)$ и регулярного роста ([1], гл. III); $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ее кратное нулевое множество (n_k — кратность нуля λ_k). В работе изучаются оценки снизу на функцию f, которые выполнены всюду в плоскости за исключением специального множества кругов с центрами в точках λ_k.

Классический результат Б.Я. Левина ([1], гл. II, теорема 2 и гл. III, теорема 4) устанавливает тесную связь между поведением целых функций регулярного роста f и их нулевыми множествами Λ. При этом получены оценки снизу на функцию $|f|$ вне исключительного C_0-множества ([1], гл. II, §1). По мнению самого Б.Я. Левина ([1], гл. II, §§1,6) недостатком этого исключительного множества кружков является то, что оно «не строится эффективно» (не указывается как построить C_0-множество). В этой связи Б.Я. Левиным было введено понятие регулярного множества, состоящего из простых точек λ_k (т.е. $n_k = 1$). В случае этого множества дается полное описание исключительных кружков (попарно не пересекающиеся кружки с центрами в точках λ_k специальных радиусов). Однако полученное таким образом исключительное множество уже не является C_0-множеством (но его линейная плотность может быть сделана сколь угодно малой).

O.A. Krivosheeva, A.S. Krivosheev, A.I. Rafikov, Lower bounds for entire functions.

©Кривошеева О.А., Кривошеев А.С., Рафиков А.И. 2019.

Поступила 10 июня 2019 г.

Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00029.

Регулярность множества означает, что его точки специальным образом отделены друг от друга. Поэтому функция f с регулярным нулевым множеством $\Lambda = \{\lambda_k, 1\}_{k=1}^{\infty}$ обладает хорошими оценками снизу вне исключительного множества попарно не пересекающихся кругов $B(\lambda_k, \gamma_k)$, радиусы которых относительно малы, т.е. бесконечно малы по сравнению с центрами при $k \to \infty$ ([1], гл. II, §1, теорема 5).

В данной работе используется другой инструмент, позволяющий отделять точки λ_k друг от друга — индекс конденсации S_Λ последовательности Λ, введенный в [2]. Этот индекс подходит для работы с любыми последовательностями, в том числе и кратными. Он рассматривается во втором параграфе.

Третий параграф работы посвящен получению оценок снизу для специальных многочленов, определяемых последовательностью $\Lambda = \{\lambda_k, 1\}_{k=1}^{\infty}$ (специальным образом нормированных «кусков» бесконечного произведения, представляющего целую функцию с кратным нулевым множеством Λ). Исследуется взаимосвязь между этими оценками и индексами конденсации. Строятся исключительные кружки с центрами в точках λ_k, вне которых указанные многочлены имеют подходящие оценки снизу.

В четвертом параграфе на основе результатов третьего параграфа исследуются оценки снизу для целых функций уточненного порядка $\rho(r)$ и вполне регулярного роста. Вводится понятие правильно сбалансированного множества (правильно распределенное множество с нулевым индексом конденсации S_Λ). Показано, что регулярное множество является правильно сбалансированным (теорема 4.2). Доказывается также, что правильная сбалансированность нулевого множества $\Lambda = \{\lambda_k, 1\}_{k=1}^{\infty}$ функции f является необходимым и достаточным условием для того, чтобы существовало семейство попарно не пересекающихся кружков с центрами в точках λ_k и относительно малыми радиусами, вне которых функция $|f|$ имеет оценки снизу, асимптотически совпадающие с ее оценками сверху всюду в плоскости (теорема 4.5). Таким образом, показывается, что понятие правильно сбалансированного множества является естественным обобщением понятия регулярного множества на случай произвольных последовательностей (в том числе и кратных). Приводится также конструктивный способ построения исключительного множества, состоящего из кружков с центрами в точках λ_k (теорема 4.3).

2. Индекс конденсации

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, 1\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Будем рассматривать последовательности уточненного порядка $\rho(r)$ ([1], гл. I, §12). Напомним основные свойства $\rho(r)$. Функция $\rho(r)$, $r > 0$, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0, \quad \lim_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r = 0, \tag{2.1}$$

называется уточненным порядком. Имеем:

$$(r^{\rho(r)})' = r^{\rho(r)} \left(\rho'(r)\ln r + \frac{\rho(r)}{r}\right) = r^{\rho(r)-1}(r\rho'(r)\ln r + \rho(r)).$$

Таким образом, в силу (2.1) функция $r^{\rho(r)}$ возрастает для достаточно больших значений r. Положим $L(r) = r^{\rho(r)-\rho}$. Функция $L(r)$ является медленно растущей ([1], гл. I, §12, лемма 5), т.е.

$$\lim_{r\to\infty} \frac{L(cr)}{L(r)} = 1 \tag{2.2}$$

равномерно на любом отрезке $0 < a \leqslant c \leqslant b < \infty$. Из (2.2) следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ и всех $c \in [a, b]$ выполнено неравенство

$$(1-\varepsilon)c^{\rho} r^{\rho(r)} \leqslant (cr)^{\rho(cr)} \leqslant (1+\varepsilon)c^{\rho} r^{\rho(r)}, \quad r \geq R(\varepsilon). \tag{2.3}$$

Говорят, что последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность $\overline{n}(\Lambda)$ (при порядке $\rho(r)$), если

$$\overline{n}(\Lambda) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r^{\rho(r)}} < \infty,$$

где $n(r,\Lambda)$ — число точек λ_k (с учетом их кратностей n_k) в круге $B(0,r)$ (радиуса r с центром в нуле). Введем локальную характеристику последовательности Λ. Следуя работе [2], положим

$$q_\Lambda(z,w,\delta) = \prod_{\lambda_k\in B(w,\delta|w|)} \left(\frac{z-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k}.$$

В случае когда круг $B(w,\delta|w|)$ не содержит ни одной λ_k, полагаем $q_\Lambda(\lambda,w,\delta)\equiv 1$. Модуль $q_\Lambda(\lambda,w,\delta)$ можно интерпретировать как меру сгущения точек $\lambda_k\in B(w,\delta|w|)$ около λ. Величина $\frac{\ln|q_\Lambda(\lambda,w,\delta)|}{|w|}$ аналогична по смыслу логарифму среднего геометрического (среднему арифметическому логарифмов) нормированных расстояний от точек $\lambda_k\in B(w,\delta|w|)$ до точки λ. Если $\delta\in(0,1)$, то модуль каждого сомножителя функции q_Λ в круге $B(w,\delta|w|)$ оценивается сверху величиной $2(3(1-\delta))^{-1}$. Поэтому

$$\frac{|\lambda-\lambda_k|}{3\delta|\lambda_k|}\leqslant 1,\quad \lambda,\lambda_k\in B(w,\delta|w|),\quad \delta\in\left(0,\frac{1}{3}\right). \tag{2.4}$$

Кроме того, верно неравенство

$$\frac{|\lambda-\lambda_k|}{3\delta|\lambda_k|}\geq 1,\quad \lambda\in B(w,5\delta|w|),\quad \lambda_k\in B(w,\delta|w|),\quad \delta\in\left(0,\frac{1}{3}\right). \tag{2.5}$$

Введем еще функции (см. [2]): Положим

$$q_\Lambda^m(z,\delta) = \prod_{\lambda_k\in B(\lambda_m,\delta|\lambda_m|),k\neq m} \left(\frac{z-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k} = q_\Lambda(z,w,\delta)\left(\frac{z-\lambda_m}{3\delta|\lambda_m|}\right)^{n_m},\quad m\geq 1.$$

Следуя [2], определим индекс конденсации

$$S_\Lambda = \lim_{\delta\to 0} S_\Lambda(\delta),\quad S_\Lambda(\delta) = \varliminf_{m\to\infty} \frac{\ln|q_\Lambda^m(\lambda_m,\delta)|}{|\lambda_m|^{\rho(|\lambda_m|)}}.$$

Из (4) следует, что предел существует и $S_\Lambda\leqslant 0$. Различные примеры на вычисление индекса S_Λ (в случае когда $\rho(r)\equiv 1$) имеются в работах [3]–[5]. Рассмотрим еще примеры, связанные с понятием регулярного множества. Пусть $\Lambda=\{\lambda_k,1\}$. Предположим, что выполнено одно из следующих условий ([1], гл. II, §1):

(C) Существует такое число $d>0$, что кружки радиусов

$$r_k = d|\lambda_k|^{1-\frac{\rho(|\lambda_k|)}{2}}$$

с центрами в точках λ_k попарно не пересекаются.

(C') Точки λ_k лежат в замкнутых углах (их конечное число) с общей вершиной в начале координат, не имеющих (попарно) других общих точек. При этом для всех точек $\lambda_{k(p)}$, попавших в один и тот же угол, выполнено неравенство

$$|\lambda_{k(p+1)}|-|\lambda_{k(p)}|\geq d|\lambda_{k(p)}|^{1-\rho(|\lambda_{k(p)}|)},\quad d>0.$$

Покажем, что в обоих случаях $S_\Lambda=0$. Пусть вначале выполнено условие (C'). Отметим вначале, что при достаточно малых $\delta>0$ $\left(\delta<\delta_0<\frac{1}{3}\right)$ и $k\geq k_0$ круг $B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|)$ пересекает лишь один из углов Γ_j, фигурирующих в условии (C'). Поэтому из определения величины S_Λ следует, что достаточно доказать равенство $S_{\Lambda_j}=0$, где Λ_j — часть последовательности Λ, лежащая в угле Γ_j. Пусть $\Lambda_j=\{\lambda_{k(p)},1\}_{p=1}^\infty$.

Пусть $\delta\in(0,\delta_0)$ и $k(p)\geq k_0$. В силу (2.3) и условия (C') найдется $\alpha>0$ такое, что

$$|\lambda_{k(s+1)}|-|\lambda_{k(s)}|\geq d|\lambda_{k(s)}|^{1-\rho(|\lambda_{k(s)}|)}\geq \alpha|\lambda_{k(p)}|^{1-\rho(|\lambda_{k(p)}|)}=h_p,\quad \lambda_{k(s)}\in B(\lambda_{k(p)},\delta|\lambda_{k(p)}|).$$

Тогда силу (2.4) имеем:

$$\sum_{\lambda_{k(s)}\in B(\lambda_{k(p)},\delta|\lambda_{k(p)}|),s\neq p} \ln\frac{|\lambda_{k(s)}-\lambda_{k(p)}|}{3\delta|\lambda_{k(s)}|} = \sum_{\lambda_{k(s)}\in B(\lambda_{k(p)},\delta|\lambda_{k(p)}|),|\lambda_{k(s)}|<|\lambda_{k(p)}|} \ln\frac{|\lambda_{k(s)}-\lambda_{k(p)}|}{3\delta|\lambda_{k(s)}|}+$$

$$+\sum_{\lambda_{k(s)}\in B(\lambda_{k(p)},\delta|\lambda_{k(p)}|),|\lambda_{k(s)}|>|\lambda_{k(p)}|} \ln\frac{|\lambda_{k(s)}-\lambda_{k(p)}|}{3\delta|\lambda_{k(s)}|} \geq 2\sum_{l=1}^{l_p}\ln\frac{lh_p}{3\delta(1+\delta)|\lambda_{k(p)}|},$$

где l_p — целая часть числа $\frac{\delta|\lambda_{k(p)}|}{h_p}$. Отсюда получаем:

$$\frac{1}{|\lambda_{k(p)}|^{\rho(|\lambda_{k(p)}|)}}\sum_{\lambda_{k(s)}\in B(\lambda_{k(p)},\delta|\lambda_{k(p)}|),s\neq p} \ln\frac{|\lambda_{k(s)}-\lambda_{k(p)}|}{3\delta|\lambda_{k(s)}|} \geq$$

$$\frac{2}{|\lambda_{k(p)}|^{\rho(|\lambda_{k(p)}|)}}\ln\left(\frac{(l_p)!(h_p)^{l_p}}{3\delta(1+\delta)|\lambda_{k(p)}|)^{l_p}}\right) \geq \frac{2}{|\lambda_{k(p)}|^{\rho(|\lambda_{k(p)}|)}}\ln\left(\frac{(h_pl_p)^{l_p}}{(12\delta|\lambda_{k(p)}|)^{l_p}}\right) =$$

$$=\frac{2l_p}{|\lambda_{k(p)}|^{\rho(|\lambda_{k(p)}|)}}\ln\frac{h_pl_p}{12\delta|\lambda_{k(p)}|}.$$

Следовательно,

$$\varliminf_{p\to\infty}\frac{1}{|\lambda_{k(p)}|^{\rho(|\lambda_{k(p)}|)}}q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)},\delta)\geq -2\frac{\delta}{\alpha}\ln 12.$$

Отсюда получаем равенство $S_{\Lambda_j}=0$.

Пусть теперь выполнено условие (C). Фиксируем $\delta\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$. В силу (2.3) найдутся числа $\alpha,\beta>0$ такие, что

$$\alpha d|\lambda_k|^{1-\frac{\rho(|\lambda_k|)}{2}}\leqslant d|\lambda_s|^{1-\frac{\rho(|\lambda_k|)}{2}}\leqslant \beta d|\lambda_k|^{1-\frac{\rho(|\lambda_k|)}{2}},\quad \lambda_s\in B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|).$$

Поэтому из условия (C) следует, что круг $B\left(\lambda_k, d|\lambda_k|^{1-\frac{\rho(|\lambda_k|)}{2}}\right)$ не содержит точек λ_s, $s\neq k$, и число $m_{n,k}$ точек $\lambda_s\in B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|)$, попавших в кольцо

$$K_{n,k}=B\left(\lambda_k,(n+1)d|\lambda_k|^{1-\frac{\rho(|\lambda_k|)}{2}}\right)\setminus B\left(\lambda_k,nd|\lambda_k|^{1-\frac{\rho(|\lambda_k|)}{2}}\right),\quad n\geq 1,$$

не превосходит отношения площади кольца

$$B\left(\lambda_k,((n+1)+\beta)d|\lambda_k|^{1-\frac{\rho(|\lambda_k|)}{2}}\right)\setminus B\left(\lambda_k,(n-\beta)d|\lambda_k|^{1-\frac{\rho(|\lambda_k|)}{2}}\right)$$

к площади круга $B\left(\lambda_s, d|\lambda_s|^{1-\frac{\rho(|\lambda_k|)}{2}}\right)$ с минимальным радиусом (для тех же λ_s). Площадь этого круга оценивается снизу величиной $\pi\left(\alpha d|\lambda_k|^{1-\frac{\rho(|\lambda_k|)}{2}}\right)^2$. Имеем:

$$m_{n,k}\leqslant\frac{\pi(((n+1)+\beta)^2-(n-\beta)^2)d^2|\lambda_k|^{2-\rho(|\lambda_k|)}}{\pi\alpha^2d^2|\lambda_k|^{2-\rho(|\lambda_k|)}}=\frac{(2n+1)(2\beta+1)}{\alpha^2}.$$

Пусть j_k — целая часть числа $\frac{\delta|\lambda_k|}{d|\lambda_k|^{1-\frac{\rho(|\lambda_k|)}{2}}}$. Тогда

$$m_{n,k}\leqslant\frac{(2j_k+1)(2\beta+1)}{\alpha^2}=p_k,\quad 1\leqslant n\leqslant j_k.$$

Учитывая неравенство

$$|\lambda_s-\lambda_k|\geq nd|\lambda_k|^{1-\frac{\rho(|\lambda_k|)}{2}},\quad \lambda_s\in K_{n,k},\quad 1\leqslant n\leqslant j_k,$$

получаем:

$$\sum_{\lambda_s\in B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|),s\neq k}\ln\frac{|\lambda_s-\lambda_k|}{3\delta|\lambda_s|}\geq\sum_{n=1}^{j_k}\ln\frac{np_kd|\lambda_k|^{1-\frac{\rho(|\lambda_k|)}{2}}}{4\delta|\lambda_k|}\geq j_k\ln\left(\frac{p_kj_kd|\lambda_k|^{1-\frac{\rho(|\lambda_k|)}{2}}}{12\delta|\lambda_k|}\right).$$

Таким образом,

$$S_\Lambda(\delta) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta) \ge \varliminf_{k\to\infty} \frac{j_k}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} \ln\left(\frac{p_k j_k d|\lambda_k|^{1-\frac{\rho(|\lambda_k|)}{2}}}{12\delta|\lambda_k|}\right) =$$

$$= \varliminf_{k\to\infty} \frac{\delta}{d|\lambda_k|^{\frac{\rho(|\lambda_k|)}{2}}} \ln j_k = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\delta}{d|\lambda_k|^{\frac{\rho(|\lambda_k|)}{2}}} \ln \frac{\delta}{d|\lambda_k|^{-\frac{\rho(|\lambda_k|)}{2}}} = 0.$$

Следовательно, $S_\Lambda = 0$.

3. Оценки снизу специальных многочленов

Приведем некоторые результаты, касающиеся индекса S_Λ и необходимые для дальнейших исследований.

Лемма 3.1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $S_\Lambda = 0$, и B — открытое множество, которое содержит все точки λ_k. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. Для каждого $\varepsilon > 0$ существуют числа $R > 0$ и $\delta \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ такие, что

$$\ln|q_\Lambda(z,w,\delta)| \ge -\varepsilon|z|^{\rho(|z|)}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus B, \quad |w| \ge R. \tag{3.1}$$

2. Для каждого $\varepsilon > 0$ существуют числа $R > 0$ и $\delta \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ такие, что

$$\ln|q_\Lambda(z,w,\delta)| \ge -\varepsilon|z|^{\rho(|z|)}, \quad z \in B(w,\delta|w|)\cap\partial B, \quad |w| \ge R. \tag{3.2}$$

3. Для каждого $\varepsilon > 0$ существуют номер k_0 и число $\delta \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ такие, что для любого $k \ge k_0$ верно неравенство

$$\ln\left|\frac{z-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right|^{n_k} \ge -\varepsilon|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}, \quad z \in B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|)\cap\partial B. \tag{3.3}$$

4. Для каждого $\varepsilon > 0$ существуют номер k_0 и число $\delta \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ такие, что для любого $k \ge k_0$ верно неравенство

$$\ln\left|\frac{z-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right|^{n_k} \ge -\varepsilon|z|^{\rho(|z|)}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus B. \tag{3.4}$$

Доказательство. Пусть верно (3.1). Тогда, очевидно, верно (3.2). Так как $|z| \leqslant (1+\delta)|\lambda_k|$, $z \in B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|)$, то отсюда с учетом определения функции $q_\Lambda(z,w,\delta)$ и (2.4), (3.2), (2.3) получаем:

$$\ln\left|\frac{z-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right|^{n_k} \ge \ln|q_\Lambda(z,\lambda_k,\delta)| \ge -\varepsilon|z|^{\rho(|z|)} \ge -\varepsilon(2|\lambda_k|)^{\rho(2|\lambda_k|)} \ge -2^{\rho+1}\varepsilon|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)},$$

где $k \ge k_1$ и $z \in B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|)\cap\partial B$. Это дает нам (3.3).

Пусть теперь верно (3.3). Докажем (3.4). Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем k_0 и $\delta_0 \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ такие, что

$$\ln\left|\frac{z-\lambda_k}{3\delta_0|\lambda_k|}\right|^{n_k} \ge -\varepsilon|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}, \quad z \in B(\lambda_k,\delta_0|\lambda_k|)\cap\partial B, \quad k \ge k_0.$$

Положим $\delta = \frac{\delta_0}{3}$. Имеем:

$$\ln\left|\frac{z-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right|^{n_k} \ge \ln\left|\frac{z-\lambda_k}{3\delta_0|\lambda_k|}\right|^{n_k} \ge -\varepsilon|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}, \quad z \in B(\lambda_k,3\delta|\lambda_k|)\cap\partial B, \quad k \ge k_0.$$

Если $z \in \mathbb{C}\setminus B(\lambda_k,3\delta|\lambda_k|)$, то

$$\ln\left|\frac{z-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right|^{n_k} \ge 0 > -\varepsilon|z|^{\rho(|z|)}.$$

Отсюда с учетом предыдущего и принципа минимума для гармонических функций получаем:

$$\ln\left|\frac{z-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right|^{n_k} \geq -\varepsilon|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}, \quad z \in B(\lambda_k, 3\delta|\lambda_k|) \setminus B, \quad k \geq k_0.$$

Пусть $z \in B(\lambda_k, 3\delta|\lambda_k|)$. Тогда $|\lambda_k| < |z|(1-3\delta)^{-1} < 2|z|$, $k > 1$. Поэтому с учетом (2.3) имеем:

$$\ln\left|\frac{z-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right|^{n_k} \geq -\varepsilon(2|z|)^{\rho(2|z|)} \geq -2^{\rho+1}\varepsilon|z|^{\rho(|z|)}, \quad z \in B(\lambda_k, 3\delta|\lambda_k|) \setminus B, \quad k > k_1.$$

Таким образом, получаем неравенство (3.4).

Пусть, наконец, верно (3.4). Предположим, что (3.1) неверно. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ существуют последовательности $\{w_m\}$, $\{z_m\}$ такие, что $z_m \in \mathbb{C} \setminus B$, $|w_m| \to \infty$ и

$$\ln|q_\Lambda(z_m, w_m, m^{-1})| < -\varepsilon|z_m|^{\rho(|z_m|)}, \quad m \geq 1. \tag{3.5}$$

Отсюда и из определения функции q_Λ следует, что для каждого $m \geq 1$ круг $B\left(w_m, \frac{|w_m|}{m}\right)$ содержит хотя бы одну из точек λ_k. Пусть $\lambda_{k(m)}$ — точка из круга $B\left(w_m, \frac{|w_m|}{m}\right)$, которая находится на минимальном расстоянии от точки z_m среди всех $\lambda_k \in B\left(w_m, \frac{|w_m|}{m}\right)$, $m \geq 1$ (если таких точек несколько, то произвольным образом выберем одну из них). Покажем, что (3.5) противоречит условиям леммы. Для этого необходимо оценить снизу две группы сомножителей, образующих величину $|q_\Lambda(z_m, w_m, m^{-1})|$. Первая составлена по точкам $\lambda_k \in B\left(w_m, \frac{|w_m|}{m}\right)$, $k \neq k(m)$, а вторая — по точке $\lambda_{k(m)}$. Оценим первую. Согласно условию $S_\Lambda = 0$. Тогда по определению S_Λ найдутся $\delta \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ и k_0 такие, что

$$\frac{\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k, \delta)|}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} \geq -\frac{\varepsilon}{3}, \quad k \geq k_0. \tag{3.6}$$

Выберем m_0 так, что $k(m) \geq k_0$, $m \geq 2\delta^{-1}$ и $B\left(w_m, \frac{|w_m|}{m}\right) \subset B(\lambda_{k(m)}, \delta|\lambda_{k(m)}|)$, $m \geq m_0$ (последнее возможно, т.к. $\lambda_{k(m)} \in B\left(w_m, \frac{|w_m|}{m})\right)$. Пусть $\lambda_k \in B\left(w_m, \frac{|w_m|}{m}\right)$. Предположим, что $|z_m - \lambda_k| < 2^{-1}|\lambda_{k(m)} - \lambda_k|$. Тогда согласно выбору точки $\lambda_{k(m)}$ имеем:

$$|\lambda_{k(m)} - \lambda_k| \leqslant |z_m - \lambda_k| + |z_m - \lambda_{k(m)}| \leqslant 2|z_m - \lambda_k| < |\lambda_{k(m)} - \lambda_k|.$$

Получили противоречие. Следовательно,

$$|z_m - \lambda_k| \geq 2^{-1}|\lambda_{k(m)} - \lambda_k|, \quad \lambda_k \in B\left(w_m, \frac{|w_m|}{m}\right).$$

Отсюда с учетом (2.4), (3.6) и выбора номера m_0 получаем:

$$\prod_{\lambda_k \in B\left(w_m, \frac{|w_m|}{m}\right), k \neq k(m)} \left(\frac{|z_m - \lambda_k|}{3m^{-1}|\lambda_k|}\right)^{n_k} \geq \prod_{\lambda_k \in B\left(w_m, \frac{|w_m|}{m}\right), k \neq k(m)} \left(\frac{|\lambda_{k(m)} - \lambda_k|}{6m^{-1}|\lambda_k|}\right)^{n_k} \geq$$

$$\geq \prod_{\lambda_k \in B\left(w_m, \frac{|w_m|}{m}\right), k \neq k(m)} \left(\frac{|\lambda_{k(m)} - \lambda_k|}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k} \geq \prod_{\lambda_k \in B\left(w_m, \frac{|w_m|}{m}\right), k \neq k(m)} \left(\frac{|\lambda_{k(m)} - \lambda_k|}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k} =$$

$$= |q_\Lambda^{k(m)}(\lambda_{k(m)}, \delta)| \geq \exp\left(-\frac{\varepsilon|\lambda_{k(m)}|^{\rho(|\lambda_{k(m)}|)}}{3}\right), \quad m \geq m_0. \tag{3.7}$$

Поскольку $\lambda_{k(m)} \in B\left(w_m, \frac{|w_m|}{m}\right)$, а в силу (2.5) и (3.5) $z_m \in B\left(w_m, \frac{5|w_m|}{m}\right)$, $m \geq 1$, то с учетом (2.3) найдется номер $m_1 \geq m_0$ такой, что

$$\exp\left(-\frac{\varepsilon|\lambda_{k(m)}|^{\rho(|\lambda_{k(m)}|)}}{3}\right) \geq \exp\left(-\frac{\varepsilon|z_m|^{\rho(|z_m|)}}{2}\right), \quad m \geq m_1. \tag{3.8}$$

Оценим теперь вторую группу сомножителей, образующих $|q_\Lambda(z_m, w_m, m^{-1})|$, построенных по точке $\lambda_{k(m)}$. В силу (3.4) существуют $m_2 \geq m_1$ и $\delta_1 \in (0, \frac{1}{3})$ такие, что

$$\ln\left|\frac{z_m - \lambda_{k(m)}}{3\delta_1|\lambda_{k(m)}|}\right|^{n_{k(m)}} \geq -\frac{\varepsilon|z_m|^{\rho(|z|)}}{2}, \quad m \geq m_2.$$

Выберем $m_3 \geq m_2$ из условия $m^{-1} \leqslant \delta_1$, $m \geq m_3$. Тогда

$$\ln\left|\frac{z_m - \lambda_{k(m)}}{3m^{-1}|\lambda_{k(m)}|}\right|^{n_{k(m)}} \geq \ln\left|\frac{z_m - \lambda_{k(m)}}{3\delta_1|\lambda_{k(m)}|}\right|^{n_{k(m)}} \geq -\frac{\varepsilon|z_m|^{\rho(|z|)}}{2}, \quad m \geq m_3.$$

Отсюда с учетом (3.7) и (3.8) получаем

$$\ln|q_\Lambda(z_m, w_m, m^{-1})| \geq -\varepsilon|z_m|, \quad m \geq m_3.$$

Это противоречит (3.5). Таким образом, (3.1) верно и лемма полностью доказана. □

Опишем широкий класс множеств B и приведем условия, при которых имеет место утверждение 3 из леммы 3.1. Пусть $\Gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел. Положим $B(\Lambda, \Gamma) = \cup_{k=1}^{\infty} B(\lambda_k, \gamma_k)$.

Лемма 3.2. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, и $\Gamma = \{\gamma_k\}$ удовлетворяет условию:*

$$\frac{n_k}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} \ln\frac{\gamma_k}{|\lambda_k|} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{3.9}$$

Тогда выполнено утверждение 3 из леммы 3.1, где полагаем $B = B(\Lambda, \Gamma)$.

Доказательство. Пусть $\delta \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\lambda_k \neq 0$ и $z \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|) \cap \partial B$. В силу (3.9) имеем:

$$\frac{1}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} \ln\left|\frac{z - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right|^{n_k} \geq \frac{n_k}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} \ln\frac{\gamma_k}{3\delta|\lambda_k|} \geq \frac{n_k}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} \ln\frac{\gamma_k}{|\lambda_k|} \to 0.$$

Это дает нам утверждение 3 из леммы 3.1. □

Зачечание 1. a)*Предположим, что $\Gamma = \{\gamma_k\}$ удовлетворяет (3.9), и для $r_k \in (0, 1)$, $k \geq 1$, выполнено соотношение*

$$\frac{n_k}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} \ln r_k \to 0, \quad k \to \infty. \tag{3.10}$$

Тогда, как нетрудно заметить, $\{r_k\gamma_k\}$ также удовлетворяет (3.9). В частности, если

$$m(\Lambda) = \lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} = 0,$$

то для любых $r_k \in (r_0, 1)$, $k \geq 1$, $r_0 > 0$, выполнено (3.10).

b) *Пусть $m(\Lambda) = 0$ и $\gamma_k = n_k|\lambda_k|^{1-\rho(|\lambda_k|)}$, $k \geq 1$. Тогда $\Gamma = \{\gamma_k\}$ удовлетворяет (3.9). Имеем:*

$$\frac{n_k}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} \ln\frac{\gamma_k}{|\lambda_k|} = \frac{n_k}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} \ln\frac{n_k}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} \to 0, \quad k \to \infty.$$

c) *Предположим, что $n_k \leqslant N$, $k \geq 1$. Тогда (3.9) будет выполнено, если*

$$\frac{\ln\gamma_k}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Действительно, в силу (2.1) для $k \geq k_0$ имеем:

$$\frac{\ln|\lambda_k|}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} \leqslant \frac{\ln|\lambda_k|}{|\lambda_k|^{\rho/2}} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Поэтому (3.9) верно. Можно взять, например,

$$\gamma_k = \exp(-\varepsilon_k |\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}), \quad k \geq 1, \quad 0 < \varepsilon_k \to 0, \quad k \to \infty. \tag{3.11}$$

Положим

$$\varepsilon_k = \frac{1}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} \ln \frac{|\lambda_k|^{2\rho(|\lambda_k|)}}{\tau}. \tag{3.12}$$

Если дополнительно $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau}{|\lambda_k|^{2\rho(|\lambda_k|)}}$$

сходится. Таким образом, в случае, когда $n_k \leqslant N$, $k \geq 1$, и $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$, исключительное множество $B(\Lambda, \Gamma)$ из леммы 3.2 состоит из кружков с центрами в точках λ_k, сумму радиусов которых можно сделать сколь угодно малой.

Пусть $\Gamma = \{\gamma_k\}$, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Для каждого $k \geq 1$ символом β_k обозначим минимальное расстояние от точки λ_k до точек λ_s, $s \neq k$. Положим

$$\Gamma_0(\tau) = \{\gamma_k^0(\tau)\}_{k=1}^{\infty}, \quad \gamma_k^0(\tau) = \tau \min\{\gamma_k, \beta_k\}, \quad \tau \in (0, 2^{-1}], \quad k \geq 1, \tag{3.13}$$

$$B(\Lambda, \Gamma_0(\tau)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(\lambda_k, \gamma_k^0(\tau)).$$

В силу (3.13) и определения чисел β_k круги $B(\lambda_k, \gamma_k^0(\tau))$ попарно не пересекаются.

Лемма 3.3. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $m(\Lambda) = 0$, $\tau \in (0, 2^{-1}]$, и $S_\Lambda = 0$. Предположим, что $\Gamma = \{\gamma_k\}$ удовлетворяет (3.9), и $B = B(\Lambda, \Gamma_0(\tau))$. Тогда верно утверждение 3 из леммы 3.1.*

Доказательство. Предположим, что это утверждение неверно. Тогда для некоторого числа $\varepsilon > 0$ существуют последовательности $\{k(m)\}$ и $\{z_m\}$ такие, что $k(m) \to \infty$, $z_m \in B\left(\lambda_{k(m)}, \frac{|\lambda_{k(m)}|}{m}\right) \cap \partial B$ и

$$\ln\left|\frac{z_m - \lambda_{k(m)}}{3m^{-1}|\lambda_{k(m)}|}\right|^{n_{k(m)}} < -\varepsilon |\lambda_{k(m)}|^{\rho(|\lambda_{k(m)}|)}, \quad m \geq 1. \tag{3.14}$$

Пусть Λ_1 — последовательность, состоящая из всех пар λ_k, n_k таких, что $\gamma_k^0(\tau) = \tau\gamma_k$. Положим $\Gamma_1 = \{\tau\gamma_k\}_{\lambda_k, n_k \in \Lambda_1}$. По условию $m(\Lambda) = 0$. Следовательно, выполнено (3.10), где $r_k = \tau$. Поэтому согласно замечанию 1 a) к лемме 3.2 последовательность Γ_1 удовлетворяет (3.9). Тогда по лемме 3.2 для последовательности Λ_1 выполнено утверждение 3 из леммы 2.1 (где полагаем $B = B(\Lambda_1, \Gamma_1)$), а согласно последней выполнено также ее утверждение 4. Следовательно, существуют номер m_0 и число $\delta \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ такие, что

$$\ln\left|\frac{z_m - \lambda_{k(m)}}{3m^{-1}|\lambda_{k(m)}|}\right|^{n_{k(m)}} \geq \ln\left|\frac{z_m - \lambda_{k(m)}}{3\delta|\lambda_{k(m)}|}\right|^{n_{k(m)}} \geq -\frac{\varepsilon|z_m|^{\rho(|z_m|)}}{2}, \quad \lambda_{k(m)}, n_{k(m)} \in \Gamma_1, \quad m \geq m_0.$$

Так как $z_m \in B\left(\lambda_{k(m)}, \frac{|\lambda_{k(m)}|}{m}\right)$, то $\frac{|z_m|}{|\lambda_{k(m)}|} \to 1$, $m \to \infty$. Поэтому в силу (2.3) для некоторого номера $m_1 \geq m_0$ верно неравенство

$$-\frac{\varepsilon|z_m|^{\rho(|z_m|)}}{2} \geq -\varepsilon|\lambda_{k(m)}|^{\rho(|\lambda_{k(m)}|)}, \quad m \geq m_1.$$

Таким образом,

$$\ln\left|\frac{z_m-\lambda_{k(m)}}{3m^{-1}|\lambda_{k(m)}|}\right|^{n_{k(m)}} \geq -\varepsilon|\lambda_{k(m)}|^{\rho(|\lambda_{k(m)}|)}, \quad \lambda_{k(m)},n_{k(m)}\in\Gamma_1, \quad m\geq m_1. \tag{3.15}$$

Согласно определению чисел β_k найдем номера p_m такие, что $|\lambda_{k(m)}-\lambda_{p_m}|=\beta_{k(m)}$, $m\geq 1$. По условию $S_\Lambda=0$. Следовательно, найдутся номер $m_2\geq m_1$ и число $\delta_1\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$, для которых

$$\frac{\ln|q_\Lambda^{p_m}(\lambda_{p_m},\delta_1)|}{|\lambda_{p_m}|^{\rho(|\lambda_{p_m}|)}}\geq -\frac{\varepsilon}{2}, \quad m\geq m_2. \tag{3.16}$$

Пусть $\lambda_{k(m)},n_{k(m)}\in\Gamma_1$. Поскольку $z_m\in B(\lambda_{k(m)},\tau\beta_{k(m)})$, то $|\lambda_{k(m)}-z_m|\geq\tau\beta_{k(m)}$. Тогда

$$\frac{|\lambda_{k(m)}-\lambda_{p_m}|}{|\lambda_{k(m)}-z_m|}=\frac{\beta_{k(m)}}{|\lambda_{k(m)}-z_m|}\leqslant\frac{1}{\tau}.$$

Поэтому, учитывая включение $z_m\in B\left(\lambda_{k(m)},\frac{|\lambda_{k(m)}|}{m}\right)$, получаем:

$$|\lambda_{k(m)}-\lambda_{p_m}|\leqslant\frac{1}{\tau}|\lambda_{k(m)}-z_m|\leqslant\frac{1}{\tau m}|\lambda_{k(m)}|. \tag{3.17}$$

В силу (3.17) можно считать, что при $m\geq m_2$ верно включение $\lambda_{k(m)}\in B(\lambda_{p_m},\delta_1|\lambda_{p_m}|)$ и $(m\tau)^{-1}<\delta_1$. Поэтому согласно (2.4) и первому неравенству в (3.17) имеем:

$$\ln\left|\frac{z_m-\lambda_{k(m)}}{3m^{-1}|\lambda_{k(m)}|}\right|^{n_{k(m)}}\geq\ln\left|\frac{\lambda_{k(m)}-\lambda_{p_m}}{3(\tau m)^{-1}|\lambda_{k(m)}|}\right|^{n_{k(m)}}\geq$$

$$\geq\ln\left|\frac{\lambda_{k(m)}-\lambda_{p_m}}{3\delta_1|\lambda_{k(m)}|}\right|^{n_{k(m)}}\geq|q_\Lambda^{p_m}(\lambda_{p_m},\delta_1)|, \quad m\geq m_2. \tag{3.18}$$

Согласно (3.17) $\lambda_{p_m}\in B\left(\lambda_{k(m)},\frac{|\lambda_{k(m)}|}{\tau m}\right)$. Следовательно, в силу (2.3) для некоторого номера $m_3\geq m_2$ верна оценка

$$-\frac{\varepsilon}{2}|\lambda_{p_m}|^{\rho(|\lambda_{p_m}|)}\geq-\varepsilon|\lambda_{k(m)}|^{\rho(|\lambda_{k(m)}|)}, \quad m\geq m_3.$$

Отсюда с учетом (3.18) и (3.16) получаем:

$$\ln\left|\frac{z_m-\lambda_{k(m)}}{3m^{-1}|\lambda_{k(m)}|}\right|^{n_{k(m)}}\geq-\varepsilon|\lambda_{k(m)}|^{\rho(|\lambda_{k(m)}|)}, \quad m\geq m_3.$$

Это вместе с (3.15) противоречит (3.14). □

Зачечание 2. *В условиях леммы 3.3 последовательность $\Gamma=\{\gamma_k\}$ можно выбрать так, что*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\gamma_k}{|\lambda_k|}=0. \tag{3.19}$$

Действительно, положим $\gamma_k=\min\{|\lambda_k|,n_k|\lambda_k|^{1-\rho(|\lambda_k|)}\}$, $k\geq 1$. Согласно замечанию 2 к лемме 3.2 последовательность $\Gamma=\{\gamma_k\}$ удовлетворяет (3.9). Так как $m(\Lambda)=0$, то верно (3.19).

В конце параграфа приведем простое утверждение, которое в некотором смысле (с учетом леммы 3.1) является обратным к лемме 3.3.

Лемма 3.4. *Пусть $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$ и B_k, $k\geq 1$,— открытые попарно непересекающиеся множества. Предположим, что $\lambda_k\in B_k$, $k\geq 1$,*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{d_k}{|\lambda_k|}=0, \tag{3.20}$$

где d_k — *диаметры* B_k, *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют* k_0 *и* $\delta \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ *такие, что*

$$\ln|q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta)| \geq -\varepsilon|z|^{\rho(|z|)}, \quad z \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|) \cap \partial B, \quad B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k, \quad k \geq k_0. \tag{3.21}$$

Тогда $S_\Lambda = 0$ *и* $m(\Lambda) = 0$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу (3.21) с учетом (2.4) и определения функции q_Λ^k имеем:

$$\ln|q_\Lambda^k(z, \delta)| \geq -\varepsilon|z|^{\rho(|z|)}, \quad z \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|) \cap \partial B, \quad k \geq k_0.$$

Согласно (2.3) найдутся номер $k_1 \geq k_0$ и число $\delta_1 \in (0, \delta)$ такие, что

$$-\varepsilon|z|^{\rho(|z|)} \geq -2\varepsilon|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}, \quad z \in B(\lambda_k, \delta_1|\lambda_k|), \quad k \geq k_1. \tag{3.22}$$

Следовательно, с учетом (2.4) получаем:

$$\ln|q_\Lambda^k(z, \delta_1)| \geq \ln|q_\Lambda^k(z, \delta)| \geq -2\varepsilon|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}, \quad z \in B(\lambda_k, \delta_1|\lambda_k|) \cap \partial B, \quad k \geq k_1.$$

В силу (3.20) можно считать, что B_k компактно вложено в $B(\lambda_k, \delta_1|\lambda_k|)$, $k \geq k_1$. Многочлен $q_\Lambda^k(z, \delta_1)$ не имеет нулей на множестве B_k. Поэтому по принципу минимума для гармонических функций последнее неравенство продолжается на B_k. В частности,

$$\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k, \delta_1)| \geq -2\varepsilon|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}, \quad k \geq k_1.$$

В силу (2.4)

$$|q_\Lambda^k(\lambda_k, \alpha)| \geq |q_\Lambda^k(\lambda_k, \delta_1)|, \quad \alpha \in (0, \delta_1).$$

Таким образом,

$$S_\Lambda = \lim_{\alpha \to 0} \varliminf_{k \to \infty} \frac{\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k, \alpha))|}{|\lambda_k|} \geq -2\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ — любое, то $S_\Lambda = 0$.

Покажем теперь, что $m(\Lambda) = 0$. Пусть $z_k \in \partial B_k \subset B(\lambda_k, \delta_1|\lambda_k|)$, $k \geq k_1$. Согласно (3.21), (3.22) и с учетом (2.4) имеем:

$$\ln\left|\frac{z_k - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right|^{n_k} \geq \ln|q_\Lambda(z_k, \lambda_k, \delta)| \geq -2\varepsilon|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}, \quad k \geq k_1.$$

Следовательно, в силу (2.33) и (2.32)

$$\frac{n_k}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} \ln\frac{d_k}{3\delta|\lambda_k|} \geq -2\varepsilon, \quad k \geq k_1.$$

Тогда из (3.20) следует, что $m(\Lambda) = 0$. □

4. Оценки снизу целых функций вполне регулярного роста

Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок и f — целая функция порядка не выше $\rho(r)$, т.е.

$$\ln|f(z)| \leqslant A + B|z|^{\rho(|z|)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Функция

$$h_f(\varphi) = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}}, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

называется индикатором f. Она непрерывна ([1], гл. I, §16). Отметим еще одно свойство индикатора ([1], гл. I, §18, теорема 28): для каждого $\varepsilon > 0$ существует $R(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \leqslant (h_f(\varphi) + \varepsilon)r^{\rho(r)}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad r \geq R(\varepsilon). \tag{4.1}$$

Говорят ([1], гл. III), что f имеет вполне регулярный рост, если

$$h_f(\varphi) = \lim_{r \notin E, r \to +\infty} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}}, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

где $E \subset (0,+\infty)$ — множество нулевой относительной меры (E_0-множество), т.е.

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\mathrm{mes}(E\cap(0,r))}{r} = 0$$

(символ mes обозначает лебегову меру множества). Говорят также, что f имеет регулярный рост на луче $L_\varphi = \{re^{i\varphi}, r>0\}$, если

$$h_f(\varphi) = \lim_{r\notin E_\varphi, r\to+\infty} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r}, \tag{4.2}$$

где E_φ — E_0-множество. Если f имеет регулярный рост на каждом луче, то множество E_φ, вообще говоря, зависит от $\varphi \in [0,2\pi]$. Оказывается, однако, что можно подобрать исключительное E_0-множество, которое подходит для всех $\varphi \in [0,2\pi]$ ([1], гл. III, §1, теорема 1). Другими словами, функция f имеет регулярный рост тогда и только тогда, когда она имеет регулярный рост на каждом луче. Известно также другое эквивалентное определение функции регулярного роста. Оно вытекает из следующего результата.

Лемма 4.1. *Пусть f — целая функция порядка не выше $\rho(r)$. Эквивалентны утверждения:*

1. *Функция f имеет регулярный рост на луче L_φ.*
2. *Существует последовательность $\{z_m\}_{m=1}^\infty$ такая, что*

$$\lim_{m\to\infty}|z_m| = \infty, \quad \lim_{m\to\infty}\frac{z_m}{|z_m|} = e^{i\varphi}, \quad \lim_{m\to\infty}\frac{|z_{m+1}|}{|z_m|} = 1, \quad \lim_{m\to\infty}\frac{\ln|f(z_m)|}{|z_m|^{\rho(|z_m|)}} = h_f(\varphi). \tag{4.3}$$

Доказательство. Пусть f имеет регулярный рост на луче L_φ. Тогда верно (4.2). Образуем последовательность $\{p_m\}_{m=1}^\infty$ всех натуральных чисел p таких, что полуинтервал $[p-1,p)$ не лежит целиком в E_φ. Для каждого $m \ge 1$ произвольным образом выберем число $r_m \in [p_m-1,p_m)\setminus E_\varphi$. Получили последовательность $\{z_m = r_m e^{i\varphi}\}_{m=1}^\infty$. По построению выполнено первое, второе, а с учетом (4.2), и четвертое равенство из (4.3). Покажем, что выполнено также третье равенство. Предположим, что это не так. Тогда найдется подпоследовательность $\{z_{m_l}\}_{l=1}^\infty$ такая, что для некоторого $\alpha > 1$ верны неравенства

$$|z_{m_{l+1}}| > \alpha|z_{m_l}|, \quad l \ge 1.$$

Тогда по построению для каждого $l \ge 1$ полуинтервал $[([|z_{m_l}|]+1),[\alpha|z_{m_l}|])$ лежит на множестве E_φ ($[x]$ — целая часть числа x). Следовательно,

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\mathrm{mes}(E_\varphi\cap(0,r))}{r} \ge \overline{\lim_{l\to\infty}}\frac{\mathrm{mes}(E_\varphi\cap(0,[\alpha|z_{m_l}|]))}{[\alpha|z_{m_l}|]} \ge \lim_{l\to\infty}\frac{[\alpha|z_{m_l}|]-[|z_{m_l}|]-1}{[\alpha|z_{m_l}|]} = \frac{\alpha-1}{\alpha}.$$

Получили противоречие с тем, что E_φ является E_0-множеством. Таким образом, (4.3) верно.

Пусть теперь имеет место утверждение 2. Можно считать, что $|z_{m+1}| \ge |z_m|$, $m \ge 1$.

Так как h_f — непрерывная функция, то в силу (2.3) для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $\delta_0 \in (0,1)$ и $R_0(\varepsilon)$ такие, что

$$|t^{\rho(t)}h_f(\psi) - r^{\rho(r)}h_f(\varphi)| \leqslant \varepsilon r^{\rho(r)}, \quad \varphi\in[0,2\pi], \quad te^{i\psi}\in B(re^{i\varphi}, r\delta_0), \quad r \ge R_0(\varepsilon). \tag{4.4}$$

$$|t^{\rho(t)} - r^{\rho(r)}| \leqslant \varepsilon r^{\rho(r)}, \quad te^{i\psi}\in B(re^{i\varphi}, r\delta_0), \quad r \ge R_0(\varepsilon). \tag{4.5}$$

Пусть $k \ge 1$. Выберем $\delta_k \in (0,1)$ такое, что для $\varepsilon = k^{-2}$ и $\delta_0 = \delta_k$ выполнены неравенства (4.4) и (4.5). Согласно (4.3) найдем номер $m(k)$, для которого

$$\left|\frac{z_m}{|z_m|} - e^{i\varphi}\right| < \frac{\delta_k}{12}, \quad \frac{|z_{m+1}|}{|z_m|} - 1 < \frac{\delta_k}{12}, \quad m \ge m(k), \tag{4.6}$$

$$\frac{\ln|f(z_m)|}{|z_m|^{\rho(|z_m|)}} \ge h_f(\varphi) - \frac{1}{k^2}, \quad m \ge m(k). \tag{4.7}$$

Пусть $R(k^{-2}) \geq R_0(k^{-2})$ определено неравенством (4.1). Можно считать, что

$$(1-\delta_k)|z_{m(k)}| \geq R(k^{-2}), \quad m \geq m(k). \tag{4.8}$$

Рассмотрим функции $f_m(z) = f(z)(f(z_m))^{-1}$, $m \geq m(k)$. В силу (4.8), (4.1), (4.4), (4.5) и (4.7) имеем:

$$\ln|f_m(re^{i\psi})| = \ln|f(re^{i\psi})| - \ln|f(z_m)| \leqslant \left(h_f(\psi) + \frac{1}{k^2}\right) r^{\rho(r)} - \left(h_f(\varphi) - \frac{1}{k^2}\right)|z_m|^{\rho(|z_m|)} \leqslant$$

$$\leqslant 4k^{-2}|z_m|^{\rho(|z_m|)}, \quad z \in B(z_m, \delta_k|z_m|), \quad m \geq m(k).$$

Тогда согласно теореме об оценке снизу модуля аналитической функции в круге ([6], гл.I, §4, теорема 4.2, где полагаем $2\eta = k^{-1}$) верно неравенство

$$\ln|f_m(z)| \geq -4k^{-2}(2+\ln(3ek))|z_m|^{\rho(|z_m|)}, \quad z \in B(z_m, 6^{-1}\delta_k|z_m|) \setminus B_{k,m},$$

где $B_{k,m}$ — конечное множество кругов, сумма радиусов которых равна $(3k)^{-1}\delta_k|z_m|$. Отсюда с учетом (4.4), (4.5) и (4.7) получаем:

$$\ln|f(re^{i\psi})| \geq (h_f(\varphi) - k^{-2})|z_m|^{\rho(|z_m|)} - 4k^{-2}(2+\ln(3ek))|z_m|^{\rho(|z_m|)} \geq$$

$$\geq (h_f(\psi)r - 3k^{-2})r^{\rho(r)} - 4k^{-2}(2+\ln(6k))r^{\rho(r)} - k^{-2}r^{\rho(r)} =$$

$$= (h_f(\psi) - \varepsilon_k)r^{\rho(r)}, \quad \varepsilon_k = 4k^{-2}(3+\ln(6k)), \quad re^{i\psi} \in B(z_m, 6^{-1}\delta_k|z_m|) \setminus B_{k,m}. \tag{4.9}$$

В силу второго неравенства в (4.6) найдется подпоследовательность $\{z_{m_{k,j}}\}_{j=1}^{\infty}$ такая, что

$$z_{m_{k,1}} = z_{m(k)}, \quad (\beta_k)^{j-1}|z_{m(k)}| \leqslant |z_{m_{k,j}}| < (\beta_k)^j|z_{m(k)}|, \quad \beta_k = 1 + \frac{\delta_k}{12}, \quad j > 1. \tag{4.10}$$

Отсюда и первого неравенства в (4.6) следует, что имеют место вложения

$$[(\beta_k)^{j-1}|z_{m(k)}|e^{i\varphi}, \quad (\beta_k)^j|z_{m(k)}|e^{i\varphi}) \subset B(z_{z_{m_{k,j}}}, 6^{-1}\delta_k|z_{z_{m_{k,j}}}|), \quad j \geq 1.$$

Определим множества $E_{k,j} \subset (0, +\infty)$ из равенств

$$\{re^{i\varphi}, r \in E_{k,j}\} = [(\beta_k)^{j-1}|z_{m(k)}|e^{i\varphi}, (\beta_k)^j|z_{m(k)}|e^{i\varphi}) \cap B_{k,m}, \quad j \geq 1.$$

Положим $E_k = \cup_{j=1}^{\infty} E_{k,j}$. В силу (4.9) имеем:

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \geq (h_f(\varphi) - \varepsilon_k)r^{\rho(r)}, \quad r \in (|z_{m(k)}|, +\infty) \setminus E_k. \tag{4.11}$$

Пусть $(\beta_k)^j|z_{m(k)}| \leqslant r < (\beta_k)^{j+1}|z_{m(k)}|$. Тогда с учетом (4.10) имеем:

$$\frac{\mathrm{mes}(E_k \cap (0,r))}{r} \leqslant \frac{\mathrm{mes}(E_k \cap (0, (\beta_k)^{j+1}|z_{m(k)}|))}{(\beta_k)^j|z_{m(k)}|} \leqslant \frac{1}{(\beta_k)^j}\sum_{s=1}^{j+1}\frac{4\delta_k}{3k}\frac{|z_{m_{k,s}}|}{|z_{m(k)}|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\delta_k}{3k}\sum_{s=1}^{j+1}\frac{(\beta_k)^s|z_{m(k)}|}{(\beta_k)^j|z_{m(k)}|} \leqslant \frac{4\delta_k(\beta_k)^2}{3k(\beta_k - 1)} = \frac{16(\beta_k)^2}{3k} \leqslant \frac{16}{k}. \tag{4.12}$$

Выберем последовательность $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что

$$R_k > |z_{m(k)}|, \quad 16\sum_{s=1}^{k-1}\frac{R_s}{s} \leqslant \frac{R_k}{k}, \quad k \geq 1. \tag{4.13}$$

Положим

$$\tilde{E}_1 = E_1 \cap [|z_{m(1)}|, R_1) \quad \tilde{E}_k = E_k \cap [R_{k-1}, R_k), \quad k > 1, \quad E_\varphi = \bigcup_{k=1}^{\infty}\tilde{E}_k.$$

Пусть $R_k < r \leqslant R_{k+1}$. Тогда из (4.12) и (4.13) получаем:

$$\frac{\operatorname{mes}(E_\varphi \cap (0,r))}{r} \leqslant \sum_{s=1}^{k-1} \frac{\operatorname{mes}(E_s \cap (0,R_s))}{R_k} + \frac{\operatorname{mes}(E_k \cap (0,R_k))}{R_k} + \frac{\operatorname{mes}(E_{k+1} \cap (0,r))}{r} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{16}{R_k} \sum_{s=1}^{k-1} \frac{R_s}{s} + \frac{16}{k} + \frac{16}{k} \leqslant \frac{33}{k}.$$

Таким образом, E_φ является E_0-множеством. Из (4.11) следует (4.2). □

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Говорят ([1], гл. II), что Λ имеет угловую плотность (при порядке $\rho(r)$), если для всех $\varphi_1 < \varphi_2$ за исключением, быть может, счетного множества Φ_Λ существует предел

$$n_\Lambda(\varphi_1, \varphi_2) = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r, \Lambda(\varphi_1, \varphi_2))}{r^{\rho(r)}},$$

где $\Lambda(\varphi_1, \varphi_2)$ — множество всех пар λ_k, n_k таких, что λ_k лежит в угле $\Gamma(\varphi_1, \varphi_2) = \{z = te^{i\varphi} : \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2), t > 0\}$, а Φ_Λ состоит из тех и только тех φ, для которых

$$\inf_{\alpha>0} \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r, \Lambda(\varphi-\alpha, \varphi+\alpha))}{r^{\rho(r)}} > 0.$$

Последовательность Λ называется правильно распределенным множеством ([1], гл. II) при порядке $\rho(r)$, если она имеет угловую плотность при нецелом ρ, а при целом ρ дополнительно удовлетворяет условию Линделефа: для некоторого $b \in \mathbb{C}$ существует предел

$$\Delta(\Lambda) = \lim_{r\to+\infty} r^{(\rho-\rho(r))} \left(b + \frac{1}{\rho} \sum_{|\lambda_k|<r} \frac{n_k}{(\lambda_k)^\rho} \right).$$

Классический результат Б.Я. Левина ([1], гл. II, теорема 2 и гл. III, теорема 4) утверждает, что f имеет регулярный рост тогда и только тогда, когда ее кратное нулевое множество $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ является правильно распределенным. При этом выполнено неравенство

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \geq r^{\rho(r)} h_f(\varphi) + \alpha(r), \quad re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus B_f, \quad \frac{\alpha(r)}{r^{\rho(r)}} \to 0, \quad r \to \infty, \tag{4.14}$$

где B_f — C_0-множество, т.е. может быть покрыто кругами $B(z_j, r_j)$, $j \geq 1$, такими, что

$$\sigma(B_f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{r} \sum_{|z_j|\leqslant r} r_j = 0. \tag{4.15}$$

Цель данного параграфа — конструктивное построение исключительного множества B_f в форме удобной для его применения. В целях такого конструктивного построения Б.Я. Левиным было введено понятие регулярного множества ([1], гл. II, §1). Это правильно распределенное множество простых точек $\Lambda = \{\lambda_k, 1\}$, удовлетворяющее условию (C) или (C') из §2. Множество B_Λ, которое в первом случае состоит из кружков $B\left(\lambda_k, d|\lambda_k|^{1-\frac{\rho(|\lambda_k|)}{2}}\right)$, $k \geq 1$, а во втором — из кружков $B\left(\lambda_k, d'|\lambda_{k(p)}|^{1-\rho(|\lambda_{k(p)}|)}\right)$, $d' \leqslant \frac{d}{2}$, $k \geq 1$, называется R-множеством. Отметим, что R-множество не является C_0-множеством. Его верхняя линейная плотность $\sigma(B_\Lambda)$ отлична от нуля. Однако при условии (C') за счет выбора числа $d > 0$ величина $\sigma(B_\Lambda)$ может быть сделана сколь угодно малой. При условии (C) сколь угодно малой может быть сделана сумма площадей исключительных кружков. Б.Я. Левин доказал ([1], гл. II, §1, теорема 5), что в случае, когда нулевое множество функции f является R-множеством, в качестве исключительного множества B_f в неравенстве (4.14) можно взять B_Λ.

Простое исключительное множество в оценке (4.14), состоящее из попарно не пересекающихся кружков, возникает благодаря условиям (C) и (C'), которые отделяют простые точки λ_k друг от друга. В настоящей работе используется существенно более слабое условие, позволяющее подходящим образом отделять точки λ_k друг от друга даже в случае кратных точек. Это условие состоит лишь из требования равенства нулю индекса конденсации S_Λ.

Правильно распределенное множество Λ будем называть правильно сбалансированным, если выполнено условие $S_\Lambda = 0$.

Установим взаимосвязь между понятиями регулярного и правильно сбалансированного множества. Отметим вначале, что в отличие от правильно сбалансированного множества, понятие регулярного множества определено лишь для простых точек λ_k.

Рассмотрим пример из работы [3]. Пусть $\Lambda_1 = \{\lambda_k, 1\}_{k=1}^{\infty}$. Положим $\lambda_2 k = k$ и $\lambda_{2k-1} = k - e^{-\varepsilon(k)k}$, $k \geq 1$, где $0 < \varepsilon(k) \to 0$, $e^{-\varepsilon(k)k} \to 0$, $k \to \infty$ (например, $\varepsilon(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$). Пусть еще $\Lambda_2 = \{-\lambda_k, 1\}_{k=1}^{\infty}$. Нетрудно заметить, что последовательность $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ имеет угловую плотность при порядке $\rho(r) \equiv 1$ и удовлетворяет условию Линделефа, т.е. является правильно распределенным множеством при порядке $\rho(r) \equiv 1$. В работе [3] доказывается, что имеет место равенство $S_{\Lambda_1} = 0$. Отсюда легко следует, что $S_\Lambda = 0$, т.е. Λ — правильно сбалансированное множество. При этом Λ не является регулярным множеством, т.к. $\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} = e^{-\varepsilon(k)k} \to 0$, $k \to \infty$ (условия (C) и (C') не выполнены).

Таким образом, правильно сбалансированное множество (в случае простых точек) не обязано быть регулярным множеством. В обратную сторону верно следующее утверждение. Оно вытекает из примеров, разобранных во втором параграфе.

Теорема 4.2. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, 1\}$ — регулярное множество. Тогда Λ — правильно сбалансированное множество.*

Теорема 4.2 означает, что понятие правильно сбалансированного множества является более общим, чем понятие регулярного множества. Далее покажем, в частности, что оба понятия введены с одной и той же целью.

Теорема 4.3. *Пусть f — целая функция порядка не выше $\rho(r)$ и вполне регулярного роста, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — ее кратное нулевое множество. Предположим, что $\Gamma = \{\gamma_k\}$ удовлетворяет (3.9), $\tau \in (0, \frac{1}{2}]$ и $S_\Lambda = 0$. Тогда верно (4.14), где $B_f = B(\Lambda, \Gamma_0(\tau))$.*

Доказательство. По условию f имеет вполне регулярный рост. Следовательно, согласно указанному выше результату Б.Я. Левина Λ — правильно распределенное множество. В частности, Λ имеет угловую плотность. Отсюда следует, что Λ имеет плотность, т.е. существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r^{\rho(r)}} = n(\Lambda) < +\infty.$$

Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{n(|\lambda_k|+1,\Lambda) - n(|\lambda_k|,\Lambda)}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{n(|\lambda_k|+1,\Lambda)}{(|\lambda_k|+1)^{\rho(|\lambda_k|)}} - \lim_{k\to\infty} \frac{n(|\lambda_k|,\Lambda)}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} = 0.$$

Получили равенство $m(\Lambda) = 0$. Таким образом, все условия леммы 3.3 выполнены. Согласно этой лемме с учетом леммы 3.1 для каждого $\varepsilon > 0$ существуют числа $R_0 > 0$ и $\delta \in (0, \frac{1}{3})$ такие, что

$$\ln|q_\Lambda(z,w,\delta)| \geq -\frac{\varepsilon|z|^{\rho(|z|)}}{4}, \quad z \in B(w,\delta|w|) \setminus B(\Lambda,\Gamma_0(\tau)), \quad |w| \geq R_0; \tag{4.16}$$

Найдем теперь $\delta_0 \in (0,\delta)$ и $R_0(\varepsilon) \geq R_0$ такие, что верны неравенства (4.4) и (4.5).

По условию f имеет вполне регулярный рост. В частности, верно (4.14), где B_f покрывается кругами $B(z_j, r_j)$, для которых имеет место (4.15). Поэтому существует $R_1 \geq R_0(\varepsilon)$ такое, что

$$\frac{1}{r}\sum_{|z_j|\leqslant 2r} r_j \leqslant \frac{\delta_0}{3}, \quad r \geq R_1. \tag{4.17}$$

Согласно (4.14) можно считать, что

$$\alpha(r) \geq -\frac{\varepsilon r^{\rho(r)}}{4}, \quad r \geq (1-\delta_0)R_1. \tag{4.18}$$

Пусть $|z| \geq R_1$ и круг $B(z_j, r_j)$ пересекает круг $4B(z, \delta_0|z|)$ в точке w. Предположим, что $|z_j| > |z|$. Тогда в силу (4.17)

$$\frac{r_j}{|z_j|} \leqslant \frac{1}{|z_j|} \sum_{|z_s| \leqslant |z_j|} r_s \leqslant \frac{\delta_0}{3}.$$

Следовательно,

$$\left(1 - \frac{\delta_0}{3}\right)|z_j| < |w| < (1+\delta_0)|z|$$

Отсюда с учетом неравенства $\delta_0 < \frac{1}{3}$ получаем: $|z_j| < 2|z|$. Таким образом, согласно (4.17) сумма d диаметров всех кругов $B(z_j, r_j)$, которые пересекают $B(z, \delta_0|z|)$, удовлетворяет оценке

$$\frac{d}{|z|} \leqslant \frac{1}{|z|} \sum_{|z_j| \leqslant 2|z|} 2r_j \leqslant \frac{2\delta_0}{3}.$$

Поэтому найдется $t \in (0,1)$ такое, что окружность $S(z, t\delta_0|z|)$ не пересекает множество B_f. Положим $z = r_0 e^{i\varphi_0}$. Тогда в силу (4.14), (4.4), (4.5) и (4.18) имеем:

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \geq r^{\rho(r)} h_f(\varphi) + \alpha(r) \geq r_0^{\rho(r_0)} h_f(\varphi_0) - \frac{\varepsilon r_0^{\rho(r_0)}}{4} - \frac{\varepsilon r^{\rho(r)}}{4} \geq$$

$$\geq r_0^{\rho(r_0)} h_f(\varphi_0) - \frac{3\varepsilon}{4} r_0^{\rho(r_0)}, \quad re^{i\varphi} \in S(z, t\delta_0|z|). \tag{4.19}$$

Рассмотрим функцию $g(\lambda) = f(\lambda)(q_\Lambda(\lambda, z, \delta_0))^{-1}$. Она аналитическая в круге $B(z, \delta_0|z|)$ и в силу (2.4) и (4.19) удовлетворяет оценке

$$\ln|g(re^{i\varphi})| \geq r_0^{\rho(r_0)} h_f(\varphi_0) - \frac{3\varepsilon}{4} r_0^{\rho(r_0)}, \quad re^{i\varphi} \in S(z, t\delta_0|z|).$$

Поскольку g не имеет нулей в круге $B(z, \delta_0|z|)$, то отсюда по принципу минимума для гармонических функций получаем:

$$\ln|g(z)| \geq r_0^{\rho(r_0)} h_f(\varphi_0) - \frac{3\varepsilon}{4} r_0^{\rho(r_0)}. \tag{4.20}$$

Пусть $z \in B(\Lambda, \Gamma_0(\tau))$ и $|z| \geq R_2$. Тогда в силу (4.16) и (4.20) с учетом (2.4) имеем:

$$\ln|f(z)| = \ln|g(z)| + \ln|q_\Lambda(z, z, \delta_0)| \geq \ln|g(z)| + \ln|q_\Lambda(z, z, \delta)| \geq$$

$$\geq |z|^{\rho(|z|)} h_f(\varphi_0) - \frac{3\varepsilon}{4}|z|^{\rho(|z|)} - \frac{\varepsilon|z|^{\rho(|z|)}}{4} = |z|^{\rho(|z|)} h_f(\varphi_0) - \varepsilon|z|^{\rho(|z|)}.$$

Так как $\varepsilon > 0$ — любое, то это дает нам требуемое утверждение. □

Зачечание 3. **a)** *Как уже отмечалось, в условиях теоремы 4.3 верно равенство* $m(\Lambda) = 0$. *Следовательно, согласно замечанию к лемме 3.3 последовательность* $\Gamma = \{\gamma_k\}$ *в теореме 4.3 можно выбрать так, что будет выполнено (3.19).*

b) *Множество* $B(\Lambda, \Gamma_0(\tau))$ *является объединением попарно не пересекающихся кругов* $B(\lambda_k, \gamma_k^0(\tau))$, *где*

$$\gamma_k^0(\tau) = \tau \min\{\gamma_k, \beta_k/2\}, \quad \beta_k = \min_{s \neq k} |\lambda_k - \lambda_s|, \quad k \geq 1, \lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} \ln \frac{\gamma_k}{|\lambda_k|} = 0.$$

Согласно замечанию 1 c) к лемме 3.2 для простых точек ($n_k = 1$) *последнее равенство равносильно соотношению*

$$\frac{\ln \gamma_k}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} \to 0, \quad k \to \infty.$$

В этом случае в силу этого замечания сумму радиусов исключительных кругов $B(\lambda_k, \gamma_k^0(\tau))$ *можно сделать сколь угодно малой. В частности (с учетом теоремы 4.2), это можно сделать, когда* Λ *— регулярное множество. Отметим, что исключительное множество из теоремы 5 в книге* [1] *(гл. II, §1) существенно больше (оно имеет лишь конечную верхнюю линейную плотность* $\sigma(B_f)$*).*

Теорема 4.4. *Пусть* f *— целая функция порядка не выше* $\rho(r)$, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *— ее кратное нулевое множество, и* B_k, $k \geq 1$, *— открытые попарно непересекающиеся множества,* $B = \cup_{k=1}^{\infty} B_k$*. Предположим, что* $\lambda_k \in B_k$, $k \geq 1$, *диаметры* d_k *множеств* B_k *удовлетворяют (3.20) и для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует* $r(\varepsilon) > 0$ *такое, что*

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \geq (h_f(\varphi) - \varepsilon)r^{\rho(r)}, \quad re^{i\varphi} \in \partial B \setminus B(0, r(\varepsilon)). \tag{4.21}$$

Тогда $S_\Lambda = 0$ *и* $m(\Lambda) = 0$.

Доказательство. Покажем, что имеет место неравенство (3.21). Фиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем числа $\delta_0 \in (0, 1)$ и $R_0(\varepsilon) \geq r(\varepsilon)$ такие, что выполнено (4.4) и (4.5). Выберем теперь $R(\varepsilon) \geq R_0(\varepsilon)$ такое, что верно (4.1). Выберем, наконец, номер k_0 такой, что

$$|\lambda_k| > R(\varepsilon)(1 - \delta_0)^{-1}, \quad k \geq k_0. \tag{4.22}$$

Пусть $k \geq k_0$ и $\lambda_k = r_k e^{i\varphi_k}$. Рассмотрим функцию $g(z) = f(z)(q_\Lambda(z, \lambda_k, \frac{\delta_0}{5}))^{-1}$. В силу (2.5), (4.1), (4.22), (4.4) и (4.5) имеем:

$$\ln|g(re^{i\varphi})| \leqslant \ln|f(re^{i\varphi})| \leqslant (h_f(\varphi) + \varepsilon)r^{\rho(r)} \leqslant (h_f(\varphi_k) + 2\varepsilon)r_k^{\rho(r_k)}, \quad re^{i\varphi} \in S(\lambda_k, \delta_0|\lambda_k|).$$

Отсюда согласно принципу максимума для субгармонических функций получаем:

$$\ln|g(re^{i\varphi})| \leqslant (h_f(\varphi_k) + 2\varepsilon)r_k^{\rho(r_k)}, \quad re^{i\varphi} \in B(\lambda_k, \delta_0|\lambda_k|).$$

Пусть $re^{i\varphi} \in B\left(\lambda_k, \frac{\delta_0|\lambda_k|}{5}\right)$. Тогда $r > R(\varepsilon)$ и $\lambda_k \in B(re^{i\varphi}, \delta_0 r)$. Следовательно, с учетом (4.4) и (4.5) имеем:

$$\ln|g(re^{i\varphi})| \leqslant (h_f(\varphi) + 4\varepsilon)r^{\rho(r)}.$$

Отсюда и (4.21) для всех $k \geq k_0$ следует неравенство

$$\ln|q_\Lambda(re^{i\varphi}, \lambda_k, \frac{\delta_0}{5})| = \ln|f(re^{i\varphi})| - \ln|g(re^{i\varphi})| \geq -5\varepsilon r^{\rho(r)}, \quad re^{i\varphi} \in B\left(\lambda_k, \frac{\delta_0|\lambda_k|}{5}\right) \cap \partial B.$$

Это дает нам (3.21). Таким образом, с учетом условий теоремы выполнены все условия леммы 3.4. Следовательно, верно ее утверждение, т.е. $S_\Lambda = m(\Lambda) = 0$. □

Теорема 4.5. *Пусть* f *— целая функция порядка не выше* $\rho(r)$ *и* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *— ее кратное нулевое множество. Эквивалентны следующие утверждения:*

1. Λ *— правильно сбалансированное множество.*

2. Существуют числа $\gamma_k^0 > 0$, $k \geq 1$, *такие, что* $\frac{\gamma_k^0}{|\lambda_k|} \to 0$, $k \to \infty$, *круги* $B(\lambda_k, \gamma_k^0)$ *попарно не пересекаются и выполнено (4.14), где* $B_f = \cup_{k=1}^{\infty} B(\lambda_k, \gamma_k^0)$.

Доказательство. Пусть имеет место утверждение 1. Тогда $S_\Lambda = 0$ и Λ — правильно распределенное множество. Согласно указанному выше результату Б.Я. Левина функция f имеет вполне регулярный рост. Таким образом, в силу теоремы 4.3 с учетом замечания 3 а) к ней верно утверждение 2.

Пусть теперь имеет место утверждение 2. Тогда по теореме 4.4 имеем: $S_\Lambda = 0$. Покажем, что f — функция вполне регулярного роста. Для этого, как отмечалось в начале параграфа, достаточно доказать, что f имеет регулярный рост на каждом луче L_φ.

Образуем последовательность $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ всех натуральных чисел p таких, что полуинтервал $[(p-1)e^{i\varphi}, pe^{i\varphi})$ не лежит целиком в B_f. Для каждого $m \geq 1$ произвольным образом выберем точку $z_m \in [(p_m - 1)e^{i\varphi}, p_m e^{i\varphi}) \setminus B_f$. Получили последовательность $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$. По построению выполнено первое, второе, а с учетом (4.14), и четвертое равенство из (4.3).

Покажем, что выполнено также третье равенство. Предположим, что это не так. Тогда найдется подпоследовательность $\{z_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ такая, что для некоторого $\alpha > 1$ верны неравенства

$$|z_{m_j+1}| > \alpha |z_{m_j}|, \quad j \geq 1.$$

Тогда по построению для каждого $j \geq 1$ полуинтервал $[([|z_{m_j}|]+1)e^{i\varphi}, [\alpha|z_{m_j}|]e^{i\varphi})$ ($[x]$ — целая часть числа x) лежит в B_f. Поскольку $B(\lambda_k, \gamma_k^0)$ попарно не пересекаются, то этот полуинтервал лежит в некотором круге $B(\lambda_{k_j}, \gamma_{k_j}^0)$. Так как $\frac{\gamma_k^0}{|\lambda_k|} \to 0$, то $\frac{|w_j|}{|\lambda_{k_j}|} \to 1$, $j \to \infty$, где $w_j = ([|z_{m_j}|]+1)e^{i\varphi}$. Поэтому

$$0 = \lim_{j\to\infty} \frac{2\gamma_{k_j}^0}{|\lambda_{k_j}|} \geq \lim_{j\to\infty} \frac{[\alpha|z_{m_j}|] - [|z_{m_j}|] - 1}{|\lambda_{k_j}|} = \lim_{j\to\infty} \frac{[\alpha|z_{m_j}|] - [|z_{m_j}|]| - 1}{|w_j|} = \alpha - 1 > 0.$$

Получили противоречие. Таким образом, имеют место равенства (4.3). Тогда по лемме 4.1 функция f имеет регулярный рост на луче L_φ. □

Зачечание 4. *По теореме 4.2 регулярное множество является частным случаем правильно сбалансированного множества. Первое множество появилось лишь с той целью, чтобы исключительное множество в (4.14) состояло из попарно не пересекающихся кругов с центрами в нулях и относительно малыми радиусами. Согласно теореме 4.5 необходимым и достаточным условием для этого является правильная сбалансированность нулевого множества функции f. Таким образом, понятие правильно сбалансированного множества является естественным обобщением понятия регулярного множества. Отметим еще, что понятие правильно сбалансированного множества эффективно и в случае кратного нулевого множества.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат. 1956.
2. Кривошеев А.С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 68, вып. 2. 2004. С. 71–136.
3. Кривошеева О.А. *Особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости* // Алгебра и анализ. Т. 23, вып. 2. 2011. С. 162–205.
4. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Базис в инвариантном подпространстве целых функций* // Алгебра и анализ. Т. 27, вып. 2. 2015. С. 132–195.
5. Кривошеева О.А., Кривошеев А.С. *Особые точки суммы ряда Дирихле на прямой сходимости* // Функц. анализ и его прил. Т. 49, вып. 2. 2015. С. 54–69.
6. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука. 1983.

Олеся Александровна Кривошеева,
ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: `kriolesya2006@yandex.ru`

Александр Сергеевич Кривошеев,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `kriolesya2006@yandex.ru`

Азат Ильгизович Рафиков,
ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: `azat@rafikov.me`