

ПЕРЕНОРМИРОВКИ ИДЕАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К ПОЛУКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

А.М. БИКЧЕНТАЕВ

Аннотация. Работа посвящена некоммутативным аналогам классических методов построения функциональных пространств. Пусть алгебра фон Неймана \mathcal{M} операторов действует в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , τ – точный нормальный полуконечный след на \mathcal{M} . Пусть $\widetilde{\mathcal{M}}$ – $*$ -алгебра τ -измеримых операторов, $|X| = \sqrt{X^*X}$ для $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Лицеал \mathcal{E} в $\widetilde{\mathcal{M}}$ называется идеальным пространством на (\mathcal{M}, τ) , если 1) из $X \in \mathcal{E}$ следует, что $X^* \in \mathcal{E}$; 2) из $X \in \mathcal{E}$, $Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $|Y| \leq |X|$ следует, что $Y \in \mathcal{E}$.

Пусть \mathcal{E}, \mathcal{F} – идеальные пространства на (\mathcal{M}, τ) . Предложен метод построения отображения $\tilde{\rho}: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ с хорошими свойствами, используя заданное на положительном конусе \mathcal{E}^+ отображение ρ . При этом, если $\mathcal{E} = \mathcal{M}$ и $\rho = \tau$, то $\tilde{\rho}(X) = \tau(|X|)$ и, в случае конечности следа τ , $\tilde{\rho}(X) = \|X\|_1$, для всех $X \in \mathcal{M}$. Исследован случай, когда $\tilde{\rho}(X)$ эквивалентно исходному отображению $\rho(|X|)$. Используя отображения на \mathcal{E} и \mathcal{F} , построено новое отображение с хорошими свойствами на сумме $\mathcal{E} + \mathcal{F}$. Приведены примеры таких отображений. Результаты являются новыми и для $*$ -алгебры $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в \mathcal{H} , снабженной каноническим следом $\tau = \text{tr}$.

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, алгебра фон Неймана, нормальный след, измеримый оператор, идеальное пространство, перенормировка.

Mathematics Subject Classification: 46L10; 47C15; 46L51

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена некоммутативным аналогам классических методов построения функциональных пространств. Начало развития соответствующего аспекта теории некоммутативного интегрирования связана с именами И. Сигала и Ж. Диксмье, которые в начале 1950-х гг. создали теорию интегрирования относительно следа на полуконечной алгебре фон Неймана [1]. Результаты этих исследований нашли эффективные применения в теории двойственности для унимодулярных групп и стимулировали прогресс «некоммутативной теории вероятностей». Теория алгебр измеримых и локально измеримых операторов интенсивно развивается и имеет интересные приложения в различных областях функционального анализа, математической физики, статистической механики, квантовой теории поля.

До середины 1980-х гг. идеальные пространства измеримых операторов служили преимущественно объектом исследования (см. [2] и библиографию в ней). В последнее время появились публикации, в которых они выступают как инструмент (например, [3]). Вышесказанное демонстрирует актуальность поиска новых методов построения идеальных

A.M. BIKCHENTAEV, RENORMALIZATIONS OF MEASURABLE OPERATOR IDEAL SPACES AFFILIATED TO A SEMIFINITE VON NEUMANN ALGEBRA.

© Бикчентаев А.М. 2019.

Работа выполнена при поддержке субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9).

Поступила 22 августа 2018 г.

пространств и развития общей теории этих пространств. В [4], [5] были предложены новые методы построения идеальных пространств на полуконечных алгебрах фон Неймана и исследованы геометрические и топологические свойства полученных пространств.

Пусть алгебра фон Неймана \mathcal{M} операторов действует в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , τ – точный нормальный полуконечный след на \mathcal{M} . Пусть \mathcal{E}, \mathcal{F} – идеальные пространства на (\mathcal{M}, τ) . В разделе 3 предложен метод построения отображения $\tilde{\rho}: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ с хорошими свойствами, используя заданное на положительном конусе \mathcal{E}^+ отображение ρ . При этом, если $\mathcal{E} = \mathcal{M}$ и $\rho = \tau$, то $\tilde{\rho}(X) = \tau(|X|)$ и, в случае конечности следа τ , $\tilde{\rho}(X) = \|X\|_1$, для всех $X \in \mathcal{M}$. Исследован случай, когда $\tilde{\rho}(X)$ эквивалентно исходному отображению $\rho(|X|)$. В разделе 4, используя отображения на \mathcal{E} и \mathcal{F} , построено новое отображение с хорошими свойствами на сумме $\mathcal{E} + \mathcal{F}$. Результаты являются новыми и для $*$ -алгебры $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в \mathcal{H} , снабженной каноническим следом $\tau = \text{tr}$.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть \mathcal{M} – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , \mathcal{M}^{pr} – решетка проекторов ($P = P^2 = P^*$) в \mathcal{M} , I – единица \mathcal{M} , $P^\perp = I - P$ для $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, \mathcal{M}^+ – конус положительных элементов из \mathcal{M} , $\mathcal{M}_1 = \{X \in \mathcal{M} : \|X\| \leq 1\}$.

Отображение $\varphi: \mathcal{M}^+ \rightarrow [0, +\infty]$ называется *следом*, если $\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{M}$. След φ называется *точным*, если $\varphi(X) > 0$ для всех $X \in \mathcal{M}^+$, $X \neq 0$; *полуконечным*, если $\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) : Y \in \mathcal{M}^+, Y \leq X, \varphi(Y) < +\infty\}$ для каждого $X \in \mathcal{M}^+$; *нормальным*, если $X_i \nearrow X$ ($X_i, X \in \mathcal{M}^+$) $\Rightarrow \varphi(X) = \sup \varphi(X_i)$ (см. [6, гл. V, §2]).

Оператор в \mathcal{H} (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана \mathcal{M}* , если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта \mathcal{M}' алгебры \mathcal{M} . Далее всюду τ – точный нормальный полуконечный след на \mathcal{M} . Замкнутый оператор X , присоединенный к \mathcal{M} , имеющий всюду плотную в \mathcal{H} область определения $\mathcal{D}(X)$, называется *τ -измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, что $P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X)$ и $\tau(P^\perp) < \varepsilon$. Множество $\widetilde{\mathcal{M}}$ всех τ -измеримых операторов является $*$ -алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций [1], [7]. Для семейства $\mathcal{L} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ обозначим через \mathcal{L}^+ и \mathcal{L}^{sa} его положительную и эрмитову части, соответственно. Частичный порядок в $\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{sa}}$, порожденный собственным конусом $\widetilde{\mathcal{M}}^+$, будем обозначать через \leq . Если $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $X = U|X|$ – полярное разложение X , то $U \in \mathcal{M}_1$ и $|X| = \sqrt{X^*X} \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$.

В $*$ -алгебре $\widetilde{\mathcal{M}}$ вводится топология t_τ сходимости по мере [7], фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют множества

$$U(\varepsilon, \delta) = \{X \in \widetilde{\mathcal{M}} : \exists P \in \mathcal{M}^{\text{pr}} (\|XP\| \leq \varepsilon \text{ и } \tau(P^\perp) \leq \delta)\}, \quad \varepsilon > 0, \delta > 0.$$

Известно, что $(\widetilde{\mathcal{M}}, t_\tau)$ является полной метризуемой топологической $*$ -алгеброй, причем \mathcal{M} плотно в $(\widetilde{\mathcal{M}}, t_\tau)$.

Через $\mu_t(X)$ обозначим *перестановку* оператора $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$, т. е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(X): (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, заданную формулой

$$\mu_t(X) = \inf\{\|XP\| : P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \tau(P^\perp) \leq t\}, \quad t > 0.$$

Множество τ -компактных операторов $\widetilde{\mathcal{M}}_0 = \{X \in \widetilde{\mathcal{M}} : \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(X) = 0\}$ является t_τ -замкнутым идеалом в $\widetilde{\mathcal{M}}$ [8]. Пусть m – линейная мера Лебега на \mathbb{R} . Ассоциированное с (\mathcal{M}, τ) некоммутативное L_p -пространство Лебега ($0 < p < \infty$) может быть определено как $L_p(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in \widetilde{\mathcal{M}} : \mu_t(X) \in L_p(\mathbb{R}^+, m)\}$ с F -нормой (нормой для $1 \leq p < \infty$) $\|X\|_p = \|\mu_t(X)\|_p$, $X \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$.

Линеал \mathcal{E} в $\widetilde{\mathcal{M}}$ называется *идеальным пространством на (\mathcal{M}, τ)* (см. [9], [3] и [2]), если 1) из $X \in \mathcal{E}$ следует, что $X^* \in \mathcal{E}$; 2) из $X \in \mathcal{E}$, $Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $|Y| \leq |X|$ следует, что $Y \in \mathcal{E}$. Таковы, например, алгебра \mathcal{M} , совокупность элементарных операторов $\mathcal{F}(\mathcal{M})$, $\widetilde{\mathcal{M}}_0$, $(L_1 + L_\infty)(\mathcal{M}, \tau)$ и $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ при $0 < p < +\infty$. Для каждого идеального пространства \mathcal{E} на (\mathcal{M}, τ) имеем $\mathcal{M}\mathcal{E}\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$ [2, лемма 5].

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ – *-алгебра всех ограниченных линейных операторов в \mathcal{H} и $\tau = \text{tr}$ – канонический след, то $\widetilde{\mathcal{M}}$ и $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ совпадают с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и с идеалом компактных операторов в \mathcal{H} соответственно. Имеем $\mu_t(X) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X)\chi_{[n-1, n)}(t)$, $t > 0$, где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность s -чисел компактного оператора X [10, с. 46]; χ_A – индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$. Тогда пространство $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ есть идеал Шаттена–фон Неймана \mathfrak{S}_p , $0 < p < \infty$.

Лемма 2.1. (см. [11], с. 261). *Если $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ и $X \leq Y$, то существует оператор $Z \in \mathcal{M}_1$ такой, что $\sqrt{X} = Z\sqrt{Y}$ и $X = ZYZ^*$.*

Лемма 2.2. (см. [12], с. 720). *Если $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{sa}}$ и $Z \in \widetilde{\mathcal{M}}$, то из неравенства $X \leq Y$ следует, что $ZXZ^* \leq ZYZ^*$.*

3. ПЕРЕНОРМИРОВКА ИДЕАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана \mathcal{M} , \mathcal{E} – идеальное пространство на (\mathcal{M}, τ) . Если $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $A^*A \in \mathcal{E}$, то $AA^* \in \mathcal{E}$ [2, лемма 5]. Для отображения $\rho: \mathcal{E}^+ \rightarrow [0, +\infty]$ введем условия:

- (i) если $X, Y \in \mathcal{E}^+$ и $X \leq Y$, то $\rho(X) \leq \rho(Y)$;
- (ii) $\rho(X^*X) = \rho(XX^*)$ для всех $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ с $X^*X \in \mathcal{E}$;
- (iii) $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ для всех $X, Y \in \mathcal{E}^+$.

Для отображения $\rho: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ введем условия:

- (iv) $\rho(X) = \rho(|X|) = \rho(X^*)$ для всех $X \in \mathcal{E}$;
- (v) $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ для всех $X, Y \in \mathcal{E}$;
- (vi) $\rho(\lambda X) = |\lambda|\rho(X)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и $X, Y \in \mathcal{E}$ (при этом $0 \cdot +\infty = 0$).

Пример 3.1. Пусть $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$ – нормированное идеальное пространство на (\mathcal{M}, τ) [9]. Тогда ограничение нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ на \mathcal{E}^+ удовлетворяет условиям (i)–(iii), а $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ удовлетворяет условиям (iv)–(vi). Примеры: $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ и $(L_p(\mathcal{M}, \tau), \|\cdot\|_p)$ для $p \geq 1$.

Пример 3.2. Пусть $\rho = \langle (\cdot)\xi, \xi \rangle$ ($\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| = 1$) – векторное состояние на алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Сужение $\rho|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})^+}$ удовлетворяет условиям (i) и (iii). Для $\rho_1 = |\rho|$ выполнены условия (v) и (vi).

Пример 3.3. Пусть \mathcal{E} – идеальное пространство на (\mathcal{M}, τ) и $Y \in \mathcal{E}^+$. Положим $\rho(X) = \inf\{\lambda > 0 : X \leq \lambda Y\}$ для всех $X \in \mathcal{E}^+$, считая \inf по \emptyset равным $+\infty$. Тогда ρ удовлетворяет условиям (i) и (iii).

Предложение 3.1. Пусть \mathcal{E} – идеальное пространство на (\mathcal{M}, τ) и отображение $\rho: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ удовлетворяет условиям (iv)–(vi) (или (i), (iv) и (v)). Тогда $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{E} : \rho(X) < +\infty\}$ является идеальным пространством на (\mathcal{M}, τ) .

Предложение 3.2. Пусть \mathcal{E} – идеальное пространство на (\mathcal{M}, τ) и отображение $\rho: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ удовлетворяет условиям (i)–(iii). Тогда $\rho(X) \leq \sum_{k=1}^n \rho(Y_k X Y_k^*)$ для всех

$$X \in \mathcal{E}^+ \text{ и } \{Y_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{M} \text{ с } \sum_{k=1}^n Y_k^* Y_k \geq I.$$

Доказательство. В силу леммы 2.2 имеем

$$X \leq \sqrt{X} \left(\sum_{k=1}^n Y_k^* Y_k \right) \sqrt{X} = \sum_{k=1}^n \sqrt{X} Y_k^* Y_k \sqrt{X}.$$

Поэтому $\rho(X) \leq \sum_{k=1}^n \rho(\sqrt{XY_k^*Y_k}\sqrt{X}) = \sum_{k=1}^n \rho(Y_kXY_k^*)$ и предложение доказано. \square

Лемма 3.1. Пусть \mathcal{E} – идеальное пространство на (\mathcal{M}, τ) и отображение $\rho: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ удовлетворяет условиям (i), (iv). Если $X, Y \in \mathcal{M}_1$, то $\rho(XZY) \leq \rho(Z)$ для всех $Z \in \mathcal{E}$.

Доказательство. Если операторы $A, B \in \mathcal{M}$, то $AZB \in \mathcal{E}$ для всех $Z \in \mathcal{E}$. Для всех $X \in \mathcal{M}_1$ и $Z \in \mathcal{E}$ в силу операторной монотонности функции $\lambda \mapsto \sqrt{\lambda}$ на \mathbb{R}^+ и леммы 2.2 имеем

$$\rho(XZ) = \rho(|XZ|) = \rho(\sqrt{Z^*X^*XZ}) \leq \rho(\sqrt{Z^*Z}) = \rho(|Z|) = \rho(Z).$$

Если $Y \in \mathcal{M}_1$, то $Y^* \in \mathcal{M}_1$ и $\rho(ZY) = \rho((ZY)^*) = \rho(Y^*Z^*) \leq \rho(Z^*) = \rho(Z)$. Лемма доказана. \square

Предложение 3.3. Пусть \mathcal{E} – идеальное пространство на (\mathcal{M}, τ) и отображение $\rho: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ удовлетворяет условиям (i), (iv). Тогда ρ удовлетворяет условию (ii).

Доказательство. Пусть $X = U|X|$ – полярное разложение оператора $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Тогда $U, U^* \in \mathcal{M}_1$ и $XX^* = UX^*XU^* \in \mathcal{E}$. В силу леммы 3.1 имеем $\rho(XX^*) = \rho(UX^*XU^*) \leq \rho(X^*X)$. Заменяя X на X^* , получаем $\rho(X^*X) \leq \rho(XX^*)$ и (ii) доказано. \square

Теорема 3.1. Пусть \mathcal{E} – идеальное пространство на (\mathcal{M}, τ) , и задано отображение $\rho: \mathcal{E}^+ \rightarrow [0, +\infty]$. Положим

$$\tilde{\rho}(X) = \sup_{Z \in \mathcal{M}_1} \sup_{0 \leq A \leq Z|X|Z^*} \rho(A) \text{ для всех } X \in \mathcal{E}. \quad (1)$$

Тогда для $\tilde{\rho}$ выполнены условия (i), (ii), (iv) и $\tilde{\rho}(X) \geq \rho(|X|)$ для всех $X \in \mathcal{E}$.

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathcal{E}^+$ и $X \leq Y$. В силу леммы 2.1 найдется оператор $U \in \mathcal{M}_1$ такой, что $X = UYU^*$. Поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(X) &= \sup_{Z \in \mathcal{M}_1} \sup_{0 \leq A \leq ZXZ^*} \rho(A) = \sup_{Z \in \mathcal{M}_1} \sup_{0 \leq A \leq ZUYU^*Z^*} \rho(A) \leq \\ &\leq \sup_{Z \in \mathcal{M}_1} \sup_{0 \leq A \leq ZYZ^*} \rho(A) = \tilde{\rho}(Y) \end{aligned}$$

и (i) установлено.

Пусть $X = U|X|$ – полярное разложение оператора $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Тогда $|X^*| = U|X|U^*$ и $|X^*|^2 = U|X|^2U^*$. Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(X^*) &= \sup_{Z \in \mathcal{M}_1} \sup_{0 \leq A \leq Z|X^*|Z^*} \rho(A) = \sup_{Z \in \mathcal{M}_1} \sup_{0 \leq A \leq ZU|X|U^*Z^*} \rho(A) \leq \\ &\leq \sup_{Z \in \mathcal{M}_1} \sup_{0 \leq A \leq Z|X|Z^*} \rho(A) = \tilde{\rho}(X). \end{aligned}$$

С учетом равенства $(X^*)^* = X$, (iv) установлено. Теперь (ii) следует из предложения 3.3. Теорема доказана. \square

Теорема 3.2. Пусть \mathcal{E} – идеальное пространство на (\mathcal{M}, τ) , и пусть отображение $\rho: \mathcal{E}^+ \rightarrow [0, +\infty]$ удовлетворяет условию (iii). Тогда отображение $\tilde{\rho}: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$, определенное по формуле (1), удовлетворяет условию (v).

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathcal{E}$ и $\alpha = \tilde{\rho}(X+Y)$. Тогда для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдутся операторы $Z_\varepsilon \in \mathcal{M}_1$ и $A_\varepsilon \in \mathcal{E}^+$ такие, что

$$A_\varepsilon \leq Z_\varepsilon|X+Y|Z_\varepsilon^*, \quad \alpha \geq \rho(A_\varepsilon) > \alpha - \varepsilon.$$

Существуют такие частичные изометрии $V, W \in \mathcal{M}_1$, что $|X+Y| \leq V|X|V^* + W|Y|W^*$ ([13, теорема 2.2]; [14]). Поэтому (см. также лемму 2.2) для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдутся операторы $Z_\varepsilon \in \mathcal{M}_1$ и $A_\varepsilon \in \mathcal{E}^+$ такие, что

$$A_\varepsilon \leq Z_\varepsilon V|X|V^*Z_\varepsilon^* + Z_\varepsilon W|Y|W^*Z_\varepsilon^*, \quad \alpha \geq \rho(A_\varepsilon) > \alpha - \varepsilon.$$

В силу леммы 1 имеем для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется оператор $U_\varepsilon \in \mathcal{M}_1$ такой, что

$$A_\varepsilon = U_\varepsilon Z_\varepsilon V |X| V^* Z_\varepsilon^* U_\varepsilon^* + U_\varepsilon Z_\varepsilon W |Y| W^* Z_\varepsilon^* U_\varepsilon^*.$$

Операторы $U_\varepsilon Z_\varepsilon V$, $U_\varepsilon Z_\varepsilon W$ лежат в \mathcal{M}_1 и

$$\rho(A_\varepsilon) \leq \rho(U_\varepsilon Z_\varepsilon V |X| V^* Z_\varepsilon^* U_\varepsilon^*) + \rho(U_\varepsilon Z_\varepsilon W |Y| W^* Z_\varepsilon^* U_\varepsilon^*) \leq \tilde{\rho}(X) + \tilde{\rho}(Y).$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем $\alpha \leq \tilde{\rho}(X) + \tilde{\rho}(Y)$ и теорема доказана. \square

Замечание 3.1. В условиях теоремы 3.1 если $\rho(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ($A \in \mathcal{E}^+$), то $\tilde{\rho}(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$ ($X \in \mathcal{E}$); если $\rho(\lambda A) = \lambda \rho(A)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}^+$ и $A \in \mathcal{E}^+$, то $\tilde{\rho}$ удовлетворяет условию (iv). Если ρ удовлетворяет условию (i), то $\tilde{\rho}(I) = \rho(I)$ и

$$\tilde{\rho}(X) = \sup_{Z \in \mathcal{M}_1} \rho(Z|X|Z^*) \text{ для всех } X \in \mathcal{E}.$$

Предложение 3.4. Пусть \mathcal{E} – идеальное пространство на (\mathcal{M}, τ) , $\rho: \mathcal{E}^+ \rightarrow [0, +\infty]$, и пусть отображение $\tilde{\rho}: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ определено по формуле (1). Если для ρ выполнены условия (i) и (ii), то $\tilde{\rho}(X) = \rho(|X|)$ для всех $X \in \mathcal{E}$.

Доказательство. Имеем $Z^*Z \leq I$ для всех $Z \in \mathcal{M}_1$ и $\sqrt{|X|}Z^*Z\sqrt{|X|} \leq |X|$ для $X \in \mathcal{E}$ в силу леммы 2.2. Тогда

$$\tilde{\rho}(X) = \sup_{Z \in \mathcal{M}_1} \sup_{0 \leq A \leq Z|X|Z^*} \rho(A) = \sup_{Z \in \mathcal{M}_1} \rho(Z|X|Z^*) = \sup_{Z \in \mathcal{M}_1} \rho(\sqrt{|X|}Z^*Z\sqrt{|X|}) = \rho(|X|).$$

Таким образом, ограничение $\tilde{\rho}|_{\mathcal{E}^+}$ совпадает с ρ . Утверждение доказано. \square

Пример 3.4. Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{M}$ и $\rho = \tau$. Тогда $\tilde{\rho}(X) = \tau(|X|)$ и, в случае конечности следа τ , $\tilde{\rho}(X) = \|X\|_1$, для всех $X \in \mathcal{M}$.

Предложение 3.5. Пусть \mathcal{E} – идеальное пространство на (\mathcal{M}, τ) , $\rho: \mathcal{E}^+ \rightarrow [0, +\infty]$, и пусть отображение $\tilde{\rho}: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ определено по формуле (1). Если выполнены условия (vii) существует $C_1 > 0$ такое, что $\rho(X^*X) \leq C_1 \rho(XX^*)$ для всех $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ с $X^*X \in \mathcal{E}$; (viii) существует $C_2 > 0$ такое, что $\rho(X) \leq C_2 \rho(Y)$ для всех $X, Y \in \mathcal{E}^+$ с $X \leq Y$, то $\rho(|X|) \leq \tilde{\rho}(X) \leq 2C_1C_2^2\rho(|X|)$ для всех $X \in \mathcal{E}$.

Доказательство. Пусть $X \in \mathcal{E}$, $Z \in \mathcal{M}_1$ и $0 \leq A \leq Z|X|Z^*$ такие, что $\tilde{\rho}(X) \leq 2\rho(A)$. Имеем $\sqrt{|X|}Z^*Z\sqrt{|X|} \leq |X|$ в силу леммы 2.2 и

$$\tilde{\rho}(X) \leq 2\rho(A) \leq 2C_2\rho(Z|X|Z^*) \leq 2C_1C_2\rho(\sqrt{|X|}Z^*Z\sqrt{|X|}) \leq 2C_1C_2^2\rho(|X|).$$

Таким образом, $\rho(|X|) \leq \tilde{\rho}(X) \leq 2C_1C_2^2\rho(|X|)$ для всех $X \in \mathcal{E}$. Утверждение доказано. \square

Замечание 3.2. Пусть \mathcal{E} – идеальное пространство на (\mathcal{M}, τ) , где \mathcal{M} – конечная алгебра фон Неймана (т.е. из $U \in \mathcal{M}$ и $U^*U = I$ следует, что $UU^* = I$). Пусть отображение $\rho: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ удовлетворяет условию (v). Положим

$$\rho_1(X) = \sup_{Z, T \in \mathcal{M}_1} \rho(ZXT) \text{ для всех } X \in \mathcal{E}.$$

В теореме 2 [15] показано, что отображение $\rho_1: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ удовлетворяет условиям (i), (iv) и (v). Для отображения ρ со свойством (vi) отображение ρ_1 также удовлетворяет условию (vi).

Предложение 3.6. Положим $\rho_2 = \widetilde{\rho_1}|_{\mathcal{E}^+}$. Тогда $\rho_2(X) \leq \rho_1(X)$ для всех $X \in \mathcal{E}$.

Доказательство. Пусть $X \in \mathcal{E}$ и $\alpha = \rho_2(X)$. Тогда для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдутся операторы $Z_\varepsilon \in \mathcal{M}_1$ и $A_\varepsilon \in \mathcal{E}^+$ такие, что

$$A_\varepsilon \leq Z_\varepsilon |X| Z_\varepsilon^*, \quad \alpha \geq \rho(A_\varepsilon) > \alpha - \varepsilon.$$

В силу леммы 2.1 для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется оператор $U_\varepsilon \in \mathcal{M}_1$ такой, что

$$A_\varepsilon = U_\varepsilon Z_\varepsilon |X| Z_\varepsilon^* U_\varepsilon^*.$$

Поэтому

$$\rho_1(X) = \rho_1(|X|) = \sup_{Z, T \in \mathcal{M}_1} \rho(Z|X|T) \geq \rho(A_\varepsilon) > \alpha - \varepsilon.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ имеем $\rho_1(X) \geq \alpha$ и предложение доказано. \square

Пример 3.5. Пусть отображение $\rho: \mathcal{M}^{\text{pr}} \rightarrow \mathbb{R}^+$ монотонно и унитарно инвариантно. Тогда отображение $\rho_s: \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}^+$, определенное формулой $\rho_s(A) = \rho(s(|A|))$, где $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $s(|A|)$ – носитель оператора $|A|$, удовлетворяет условиям (i), (ii) и (iv).

4. НОРМИРОВКА СУММЫ ИДЕАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Если \mathcal{E}, \mathcal{F} – идеальные пространства на (\mathcal{M}, τ) , то множества $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}$ и $\mathcal{E} + \mathcal{F} = \{A + B : A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{F}\}$ также являются идеальными пространствами на (\mathcal{M}, τ) [2, теорема 2]. Структура идеальных пространств модулярна: если \mathcal{E}, \mathcal{F} и \mathcal{G} являются идеальными пространствами на (\mathcal{M}, τ) и $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$, то $(\mathcal{E} + \mathcal{F}) \cap \mathcal{G} = \mathcal{E} + (\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$ [2, теорема 3]. В некоммутативной теории интегрирования важную роль играет пространство $(L_1 + L_\infty)(\mathcal{M}, \tau) = L_1(\mathcal{M}, \tau) + \mathcal{M}$ [12].

Теорема 4.1. Пусть \mathcal{E}, \mathcal{F} – идеальные пространства на (\mathcal{M}, τ) и $\mathcal{G} = \mathcal{E} + \mathcal{F}$. Если отображения $\rho_1: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ и $\rho_2: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ удовлетворяют условиям (i), (iv), то отображение $\rho: \mathcal{G} \rightarrow [0, +\infty]$, определенное формулой

$$\rho(Z) = \inf\{\rho_1(X) + \rho_2(Y) : X \in \mathcal{E}, Y \in \mathcal{F} \text{ и } Z = X + Y\}, \quad (2)$$

также удовлетворяет условиям (i), (iv).

Доказательство. Пусть $Z = U|Z|$ – полярное разложение оператора $Z \in \mathcal{G}$. Тогда $|Z| = U^*Z$. Для проверки (iv) заметим, что $\rho(Z^*) = \rho(Z)$. В силу леммы 3.1 имеем

$$\begin{aligned} \underline{\rho(|Z|)} &= \inf\{\rho_1(X) + \rho_2(Y) : X \in \mathcal{E}, Y \in \mathcal{F} \text{ и } |Z| = X + Y\} \geq \\ &\geq \inf\{\rho_1(X) + \rho_2(Y) : X \in \mathcal{E}, Y \in \mathcal{F} \text{ и } U|Z| = UX + UY\} \geq \\ &\geq \inf\{\rho_1(UX) + \rho_2(UY) : X \in \mathcal{E}, Y \in \mathcal{F} \text{ и } U|Z| = UX + UY\} \geq \\ &\geq \underline{\rho(Z)} = \inf\{\rho_1(X) + \rho_2(Y) : X \in \mathcal{E}, Y \in \mathcal{F} \text{ и } Z = X + Y\} \geq \\ &\geq \inf\{\rho_1(X) + \rho_2(Y) : X \in \mathcal{E}, Y \in \mathcal{F} \text{ и } |Z| = U^*Z = U^*X + U^*Y\} \geq \\ &\geq \inf\{\rho_1(U^*X) + \rho_2(U^*Y) : X \in \mathcal{E}, Y \in \mathcal{F} \text{ и } |Z| = U^*X + U^*Y\} \geq \\ &\geq \inf\{\rho_1(T) + \rho_2(S) : T \in \mathcal{E}, S \in \mathcal{F} \text{ и } |Z| = T + S\} = \underline{\rho(|Z|)} \end{aligned}$$

и (iv) установлено. Для проверки (i) выберем $A, B \in \mathcal{E}^+$, $A \leq B$. В силу леммы 2.1 имеем $A = VB V^*$ для некоторого $V \in \mathcal{M}_1$. Пусть $\alpha = \rho(B)$. Тогда для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдутся операторы $X_\varepsilon \in \mathcal{E}$ и $Y_\varepsilon \in \mathcal{F}$ такие, что

$$B = X_\varepsilon + Y_\varepsilon, \quad \alpha \leq \rho_1(X_\varepsilon) + \rho_2(Y_\varepsilon) < \alpha + \varepsilon.$$

Тогда $A = V(X_\varepsilon + Y_\varepsilon)V^*$ и в силу леммы 3.1 имеем

$$\rho(A) \leq \rho_1(VX_\varepsilon V^*) + \rho_2(VY_\varepsilon V^*) \leq \rho_1(X_\varepsilon) + \rho_2(Y_\varepsilon).$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$, теорема доказана. \square

Предложение 4.1. Пусть \mathcal{E}, \mathcal{F} – идеальные пространства на (\mathcal{M}, τ) и $\mathcal{G} = \mathcal{E} + \mathcal{F}$. Если отображения $\rho_1: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ и $\rho_2: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ удовлетворяют условию (v) (соответственно, (vi)), то отображение $\rho: \mathcal{G} \rightarrow [0, +\infty]$, определенное формулой (2), также удовлетворяет условию (v) (соответственно, (vi)).

Пример 4.1. Имеем $\mathcal{E} + \mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{M}}$ для $\mathcal{E} = \mathcal{M}$ и $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{M}}_0$ [16]. Топология t_τ может быть задана и с помощью идеальной F -нормы $\rho_\tau(X) = \inf_{t>0} \max\{t, \mu_t(X)\}$, $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Для $Z \in \widetilde{\mathcal{M}}$ определим (см. формулу (2))

$$\rho(Z) = \inf\{\|X\| + \rho_\tau(Y) : X \in \mathcal{M}, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 \text{ и } Z = X + Y\}.$$

Тогда ρ удовлетворяет условиям (iv) и (v). Для ограничения $\rho|_{\widetilde{\mathcal{M}}^+}$ выполнены условия (i)–(iii). Таким образом, отображение $\rho: \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}^+$ является идеальной F -нормой, мажорирующей ρ_τ . Так как $\|X\| = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mu_t(X) = \sup_{t > 0} \mu_t(X) \geq \rho_\tau(X)$ для всех $X \in \mathcal{M}$, имеем $\rho(Z) \leq 2\rho_\tau(Z)$ для всех $Z \in \widetilde{\mathcal{M}}$.

Замечание 4.1. Пусть \mathcal{E}, \mathcal{F} – идеальные пространства на (\mathcal{M}, τ) и $\mathcal{G} = \mathcal{E} \cap \mathcal{F}$. Если отображения $\rho_1: \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ и $\rho_2: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ удовлетворяют одному из условий (i)–(vi), то отображение $\rho: \mathcal{G} \rightarrow [0, +\infty]$, определенное формулой $\rho(Z) = \max\{\rho_1(Z), \rho_2(Z)\}$ для всех $Z \in \mathcal{G}$, также удовлетворяет этому условию.

Автор признателен профессору В.И. Чилину за ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I.E. Segal *A non-commutative extension of abstract integration* // Ann. Math. 1953. **57**:3. P. 401–457. Русск. перевод: Математика (сб. переводов) 1962. **6**:1. С. 65–132.
2. Бикчентаев А.М. *Идеальные пространства измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана* // Сиб. матем. журн. 2018. **59**:2. С. 309–320.
3. Бер А.Ф., Левитина Г.Б., Чилин В.И. *Дифференцирования со значениями в квазинормированных бимодулях локально измеримых операторов* // Матем. тр. 2014. **17**:1. С. 3–18.
4. Бикчентаев А.М. *Неравенство треугольника для некоторых пространств измеримых операторов* // Конструктивная теория функций и функциональный анализ. № 8. Казань: Изд-во КГУ, 1992. С. 23–32.
5. A.M. Bikchentaev *On noncommutative function spaces* // Selected Papers in K -theory. Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1992. **154**. P. 179–187.
6. M. Takesaki *Theory of operator algebras. I*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 124. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 5. Springer-Verlag, Berlin (2002).
7. E. Nelson *Notes on non-commutative integration* // J. Funct. Anal. 1974. **15**:2. P. 103–116.
8. F.J. Yeadon *Non-commutative L^p -spaces* // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1975. **77**:1. P. 91–102.
9. Бикчентаев А.М. *Об одном свойстве L_p -пространств на полуконечных алгебрах фон Неймана* // Матем. заметки. 1998. **64**:2. С. 185–190.
10. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*. М.: Наука. 1965.
11. F.J. Yeadon *Convergence of measurable operators* // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1973. **74**:2. P. 257–268.
12. P.G. Dodds, T.K.-Y. Dodds, B. de Pagter *Noncommutative Köthe duality* // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. **339**:2. P. 717–750.
13. S.A. Akemann, J. Anderson, G.K. Pedersen *Triangle inequalities in operator algebras* // Linear Multilinear Algebra. 1982. **11**:2. P. 167–178.
14. Чилин В.И. *Неравенство треугольника в алгебрах локально измеримых операторов* // Математический анализ и алгебра. Сбор. науч. тр. Ташкент. ун-та. Ташкент: Изд-во ТашГУ, 1986. С. 77–81.
15. Бикчентаев А.М. *О минимальности топологии сходимости по мере на конечных алгебрах фон Неймана* // Матем. заметки. 2004. **75**:3. С. 342–349.
16. A. Stroth, Grame P. West *τ -compact operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra* // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. 1993. **93**:1. P. 73–86.

Айрат Мидхатович Бикчентаев,
 Казанский Федеральный университет,
 ул. Кремлевская, 18,
 420008, г. Казань, Россия
 E-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru