

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛОВ НА МНОЖЕСТВАХ УРОВНЯ

Р.Г. САЛАХУДИНОВ

Аннотация. Рассматриваются специальные функционалы области G на плоскости, построенные при помощи функции расстояния до границы ∂G и классической функции напряжения. Функционалы, зависящие от функции расстояния, рассматриваются в случае односвязных областей. Изучены также функционалы, зависящие от функции напряжения конечносвязной области. Доказано, что свойство изопериметрической монотонности по свободному параметру порождает другую монотонность, а именно, монотонность функционалов, рассматриваемых как функции множеств, определенных на подмножествах области. Некоторые частные случаи неравенств ранее получены Пейном. Отметим, что неравенства были успешно применены для обоснования новых оценок жесткости кручения односвязной и многосвязной областей. В частности, построены новые функционалы области, монотонные по обоим своим аргументам. Кроме того, найдены точные оценки скорости изменения функционалов, т.е. получены точные оценки производных.

Ключевые слова: функция расстояния до границы, функция напряжения, неравенство типа Пейна, изопериметрическое неравенство, изопериметрическая монотонность.

Mathematics Subject Classification: Primary 28A25, 35A23; Secondary 30A10

1. ВВЕДЕНИЕ

Для эффективного решения некоторых проблем математической физики оказалось недостаточно таких классических геометрических характеристик области, как площадь, объем, площадь поверхности, длина границы, диаметр, максимум радиусов кругов, содержащихся в области. Более тонким и эффективным инструментом при решении некоторых задач оказались евклидовы моменты области относительно своей границы.

Пусть G — односвязная область на плоскости. Евклидовым моментом порядка α относительно границы области G называется функционал

$$\mathbf{I}_\alpha(G) := \int_G \rho(x, G)^\alpha dA, \quad (1.1)$$

где $\rho(x, G)$ — функция расстояния от точки $x \in G$ до границы ∂G , $\alpha > -1$ и dA — дифференциальный элемент площади. Из работы [1] следует, что в соответствующей нормировке функционал (1.1) лежит в границах, образованных длиной границы области и максимумом радиусов кругов, содержащихся в области, более того, любое значение из упомянутого интервала может быть достигнуто при надлежащем подборе параметра.

R.G. SALAKHUDINOV, SOME PROPERTIES OF FUNCTIONALS ON LEVEL SETS.

©Салахудинов Р.Г. 2019.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 17-01-00282-а) и за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9).

Поступила 26 сентября 2017 г.

Евклидовы моменты появляются в математической физике при оценке различных физических функционалов области. Например, как было показано Ф. Г. Авхадиевым [2], евклидовый момент инерции области ($\alpha = 2$) и жесткость кручения области являются сравнимыми величинами в классе односвязных областей, т.е. отношение функционалов ограничено сверху и снизу положительными константами, не зависящими от области и не обращающимися в нуль и бесконечность. Также евклидовы моменты различных порядков появляются при изучении неравенств типа Харди в многомерном евклидовом пространстве (см., например, [3]). Отметим, что и многомерные аналоги функционала (1.1) тоже находят применение при решении вариационных проблем (см. [4, 5]).

Применение изопериметрических неравенств на множествах уровня зачастую приводит к решению той или иной проблемы, более того, к новым методам исследования. Ярким примером такого рода является применение классического изопериметрического неравенства в теории кручения и теории течения вязкой жидкости (см. [6]), а также его важной роли в методах симметризации (см. [7, 8]).

Одной из целей нашей работы является исследования свойств функционала (1.1) на подмножествах G . Отметим, что в работе [9] стационарные евклидовы моменты ($\alpha = 1$) и евклидовые моменты инерции подобластей были применены для оценки жесткости кручения области. С другой стороны, предельный переход с множеств уровня позволяет рассматривать оценки на этих множествах как обобщение неравенств между функционалами области. Например, из наших основных утверждений следует, что ряд классических неравенств (неравенство Сен-Венана — Поля, Пейна и других) могут быть получены путем предельного перехода с множеств уровня классической функции напряжения и функции расстояния до границы области.

В работах [1, 9, 10] показано, что евклидовы моменты порядка α и L^p -нормы функции напряжения области обладают целым рядом схожих изопериметрических свойств. Продолжая эту аналогию, в работе будут рассмотрены аналогичные вопросы для случая, когда функция $\rho(x, G)$ в (1.1) заменяется на классическую функцию напряжения $u(x, G)$, причем, в этом случае область G уже является конечносвязной областью на плоскости.

Основной идеей получения неравенств для функционалов является применение неравенств типа Пейна [6, 11] на множествах уровня функций.

2. ОБСУЖДЕНИЕ ЗАДАЧ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем необходимые для дальнейшего изложения обозначения. Пусть

$$G(\mu) := \{x \in G \mid \rho(x, G) > \mu\},$$

$$\mathbf{a}(\mu) \equiv \mathbf{a}(G(\mu)) := \int_{G(\mu)} dA.$$

$$\mathbf{l}(\mu) \equiv \mathbf{L}(G(\mu)) := \int_{\partial G(\mu)} ds.$$
(2.1)

В дальнейшем будем называть $G(\mu)$ множествами уровня функции $\rho(x, G)$.

Рассмотрим следующий геометрический функционал

$$\mathbf{f}_\alpha(\mu) := \mathbf{I}_\alpha(G(\mu)),$$
(2.2)

где $0 \leq \mu \leq \rho(G)$, $\rho(G) := \sup_{x \in G} \rho(x, G)$ и α — вещественный параметр. Свойства функции $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ в зависимости от параметра α при фиксированном μ носит изопериметрический характер. Нас в дальнейшем будут интересовать свойства функции $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ при фиксированном значении параметра. Ниже будет показано, что значением параметра вместе с геометрией области G во многом определяют свойства функции $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$.

Пусть $\mathbf{I}_{\alpha_0}(G) < +\infty$ для некоторого $\alpha_0 > -1$ (при этом мы считаем, что для меньших значений параметра функционал неограничен), тогда все множества уровня $G(\mu)$ имеют ограниченную площадь, за исключением может быть множества нулевого уровня, т.е. площади области G (см., например, [12]). Известно, что если площадь области ограничена и $\alpha \geq 0$, то справедливо неравенство

$$\mathbf{I}_\alpha(G) \leq \frac{\mathbf{A}(G)^{1+\alpha/2}}{\pi^{\alpha/2}(\alpha+1)(\alpha+2)}. \quad (2.3)$$

Если применить последнее неравенство к $G(\mu)$, тогда функция $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ корректно определена и конечна при $\mu \in (0, \rho(G)]$ и $\alpha \geq 0$.

При $0 > \alpha_0 > -1$ площадь области конечна, тем более, площадь множеств уровня. Но, как будет показано ниже, вычисление функция $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ для отрицательных значений параметра тесно связано со свойствами функционала $\mathbf{I}(\mu)$ как функции от μ .

Отметим, что ограничение на параметр $\alpha > -1$ является естественным при рассмотрении функционала $\mathbf{I}_\alpha(G)$, при этом условие $\mathbf{I}_{\alpha_0}(G) < +\infty$ описывает вполне определенный класс областей на плоскости, более того, различным значениям параметра соответствуют различные классы.

Далее, будет естественно рассматривать значение функции $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ при $\mu = 0$ как результат предельного перехода. Тогда точку $\mu = 0$ при $\alpha \geq \alpha_0$ можно включить в область определения, а при $\alpha \leq \alpha_0$ положить $\mathbf{f}_\alpha(0) := +\infty$. Как отмечалось выше, в других точках значение параметра $\alpha = \alpha_0$ не играет такой роли для $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$.

С другой стороны, условие $\rho(G) < +\infty$ является необходимым для исследования функционала (1.1), а также и для исследования функции (2.2). В свою очередь, случай $\alpha = +\infty$ соответствует классу областей с $\rho(G) < +\infty$. Примеры полосы и полуполосы разочаровывают, так как функция $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ тождественно равна бесконечности на всей области определения. Однако нетрудно построить примеры, когда только с некоторого значения μ_0 площади множеств уровня становятся неограниченными. Простейший пример можно построить, объединяя полосу и круг, диаметр которого больше ширины полосы. Соответственно, $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ будет также отлична бесконечности на $[\mu_0, \rho(G)]$. Из неравенства

$$\mathbf{I}_\alpha(G) \geq \frac{\pi \rho(G)^4}{6}$$

следует, что класс областей, подчиненных условию $\rho(G) < +\infty$, является наиболее широким классом, при котором функция (2.2) и функционал (1.1) описывают некоторые геометрические свойства области.

Далее, так как множества $G(\mu)$ монотонно вложены, из этого следует, что $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ при $\alpha \geq 0$ является не возрастающей функцией. В работе [9] было доказано равенство

$$\mathbf{f}_2(\mu) = \mathbf{i}_2(\mu) - 2\mu \mathbf{i}_1(\mu),$$

где

$$\mathbf{i}_q(\mu) := q \int_{\mu}^{\rho(G)} t^{q-1} \mathbf{a}(t) dt, \quad q = 1, 2.$$

Из этого представления вытекают равенства

$$(\mathbf{f}_2(\mu))' = -2\mathbf{i}_1(\mu), \quad (\mathbf{f}_2(\mu))'' = 2\mathbf{a}(\mu). \quad (2.4)$$

Таким образом, $\mathbf{f}_2(\mu)$ является дважды дифференцируемой, монотонно убывающей и строго выпуклой вниз функцией. Отметим также, что у функции $\mathbf{f}_2(\mu)$ почти всюду существует третья производная (см. [8]).

Покажем, что аналогичными свойствами обладает и функция $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$.

Лемма 2.1. Пусть G — односвязная область, с ограниченным евклидовым моментом порядка $\alpha_0 (> -1)$. Тогда $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ является монотонно убывающей функцией при $\alpha \geq 0$, а также строго выпуклой вниз при $\alpha \geq 1$. Эта функция всюду дифференцируема при $\alpha \geq 1$, абсолютно непрерывна при $\alpha \in (0, 1)$, а также если $\mathbf{l}(s)$ — функция ограниченной вариации, то $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ почти всюду дифференцируема и при $0 > \alpha > -1$.

Доказательство. Следуя [9], заметим, что в области $G(\mu)$ существует своя функция расстояния до границы области, поэтому в дальнейшем будем различать линии уровня областей G и $G(\mu)$. Как нетрудно видеть, функцией расстояния до границы области $G(\mu)$ является функция $\rho(x, G) - \mu$, следовательно, $\mathbf{a}_\mu(s) = \mathbf{a}(s + \mu)$ ($0 \leq s \leq \rho(G(\mu))$), где $\mathbf{a}_\mu(s)$ — площадь множества уровня функции $\rho(x, G(\mu))$. Далее, применяя определение интеграла по Лебегу и интегрирование по частям, нетрудно получить следующее представление

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\alpha(\mu) &= \int_0^{\mathbf{a}(\mu)} s(\mathbf{a}_\mu)^\alpha d\mathbf{a}_\mu = \alpha \int_0^{\rho(G(\mu))} s^{\alpha-1} \mathbf{a}_\mu(s) ds = \\ &= \alpha \int_0^{\rho(G)-\mu} (s + \mu)^{\alpha-1} \mathbf{a}(s + \mu) ds = \alpha \int_\mu^{\rho(G)} (s - \mu)^{\alpha-1} \mathbf{a}(s) ds, \end{aligned}$$

где $\alpha > 0$. Из этого представления следуют дифференцируемость функции при $\alpha \geq 1$ и существование второй производной при $\alpha \geq 2$, а также равенства

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_\alpha(\mu))' &= -\alpha(\alpha - 1) \int_\mu^{\rho(G)} (s - \mu)^{\alpha-2} \mathbf{a}(s) ds = -\alpha \mathbf{f}_{\alpha-1}(\mu), \\ (\mathbf{f}_\alpha(\mu))'' &= \alpha(\alpha - 1) \mathbf{f}_{\alpha-2}(\mu). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Частными случаями последних равенств является (2.4). Таким образом, $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ монотонно убывает при $\alpha \geq 1$ и строго выпукла при $\alpha \geq 2$.

Покажем, что приведенные формулы справедливы при более общих предположениях. Обозначим через $\mathbf{l}_\mu(s)$ длину линии уровня функции $\rho(x, G(\mu))$, тогда почти всюду справедливо равенство $\mathbf{a}'_\mu(s) = -\mathbf{l}_\mu(s)$. Отсюда, применяя формулу коплощади [13] для функции расстояния до границы, получим

$$\mathbf{f}_\alpha(\mu) = \int_0^{\rho(G(\mu))} s^\alpha \mathbf{l}_\mu(s) ds = \int_\mu^{\rho(G)} (s - \mu)^\alpha \mathbf{l}(s) ds, \tag{2.6}$$

где $\alpha > -1$. Из последнего представления вытекает монотонность $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ уже при $\alpha \geq 0$, а также другая формула для производной:

$$\mathbf{f}'_\alpha(\mu) = -\alpha \int_\mu^{\rho(G)} (s - \mu)^{\alpha-1} \mathbf{l}(s) ds. \tag{2.7}$$

Из полученного представления и выражения производной следует, что равенства (2.5) справедливы при $\alpha > 0$ и $\alpha > 1$, соответственно.

Используя неотрицательность и измеримость подынтегральной функции и применяя теорему Фубини о повторном интегрировании, при $\alpha > 0$ и $0 \leq \nu \leq \rho(G)$ получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\nu \mathbf{f}'_\alpha(\mu) d\mu &= -\alpha \int_0^\nu d\mu \int_\mu^{\rho(G)} (s-\mu)^{\alpha-1} \mathbf{l}(s) ds = \\ &= -\alpha \int_0^\nu \mathbf{l}(s) ds \int_0^s (s-\mu)^{\alpha-1} d\mu - \alpha \int_\nu^{\rho(G)} \mathbf{l}(s) ds \int_0^\nu (s-\mu)^{\alpha-1} d\mu = \\ &= -\int_0^\nu s^\alpha \mathbf{l}(s) ds + \int_\nu^{\rho(G)} \left[(s-\nu)^\alpha - s^\alpha \right] \mathbf{l}(s) ds = \\ &= \int_\nu^{\rho(G)} (s-\nu)^\alpha \mathbf{l}(s) ds - \int_0^{\rho(G)} s^\alpha \mathbf{l}(s) ds = \mathbf{f}_\alpha(\nu) - \mathbf{f}_\alpha(0). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ является абсолютно непрерывной при $\alpha > 0$.

Далее, предположим, что $\mathbf{l}(\mu)$ является функцией ограниченной вариации. Тогда при $\alpha > -1$, применяя в (2.6) формулу интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\alpha(\mu) &= \frac{1}{\alpha+1} \int_0^{\rho(G)-\mu} \mathbf{l}(s+\mu) ds^{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1} \int_\mu^{\rho(G)} \mathbf{l}(s) d(s-\mu)^{\alpha+1} = \\ &= \frac{\mathbf{l}(\rho(G))(\rho(G)-\mu)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \int_\mu^{\rho(G)} (s-\mu)^{\alpha+1} d\mathbf{l}(s), \end{aligned}$$

где последний интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса и

$$\mathbf{l}(\rho(G)) := \lim_{\mu \rightarrow \rho(G)} \mathbf{l}(\mu).$$

Из условий леммы и полученного представления следует существование почти всюду производной

$$\mathbf{f}'_\alpha(\mu) = -\mathbf{l}(\rho(G))(\rho(G)-\mu)^\alpha + \int_\mu^{\rho(G)} (s-\mu)^\alpha d\mathbf{l}(s),$$

при $0 \geq \alpha > -1$. В частности,

$$(\mathbf{a}(\mu))' = -\mathbf{l}(\rho(G)) + \int_\mu^{\rho(G)} d\mathbf{l}(s) = -\mathbf{l}(\mu)$$

почти всюду.

В заключении доказательства приведем простые примеры областей, для которых функция $\mathbf{l}(\mu)$ не непрерывна. Область с конечным числом скачков функции $\mathbf{l}(\mu)$ нетрудно получить с помощью хорошо известной области в виде «гантели» (см. [7, стр. 313]). Действительно, рассмотрим область, являющуюся объединением двух одинаковых кругов и прямоугольника, ширина которого меньше диаметра кругов. Нетрудно убедиться, что в этом случае рассматриваемая функция будет иметь ровно один скачек. Область с конечным числом скачков можно получить, объединяя гантели, так чтобы они пересекались по

ручкам разной ширины. Ещё более простым примером является объединение двух прямоугольников различной ширины, образующих «лестницу» с двумя ступенями. В этом случае также получим ровно один скачок у функции $\mathbf{I}(\mu)$. Увеличивая число ступеней, получим конечное или бесконечное число скачков функции. \square

Частными случаями свойств монотонности и выпуклости являются двусторонние оценки для функции $\mathbf{f}_2(\mu)$ и её производной. Однако, эти оценки являются специальным случаем двусторонних неравенств, получаемых с применением неравенства типа Пейна [9]

$$\mathbf{I}_2(G) \leq \frac{2\rho(G)}{3} \left(\mathbf{I}_1(G) - \frac{\pi\rho(G)^3}{12} \right).$$

Действительно, учитывая первое из равенств (2.4), применим последнее неравенство на множествах уровня $G(\mu)$, тогда получим дифференциальное неравенство

$$\mathbf{f}_2(\mu) \leq -\frac{2(\rho(G) - \mu)}{3} \left(\frac{(\mathbf{f}_2(\mu))'}{2} + \frac{\pi(\rho(G) - \mu)^3}{12} \right).$$

С помощью несложных алгебраических выкладок можно показать, что последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\left(\frac{\mathbf{f}_2(\mu)}{(\rho(G) - \mu)^3} \right)' \leq -\frac{\pi}{6}. \tag{2.8}$$

Проинтегрируем полученное неравенство по $[0, \mu]$ и $[\mu, \rho(G)]$, получим двустороннюю оценку

$$\frac{2}{3} \mathbf{l}(\rho(G))(\rho(G) - \mu)^3 + \frac{\pi}{6}(\rho(G) - \mu)^4 \leq \mathbf{f}_2(\mu) \leq \left(\frac{\mathbf{f}_2(0)}{\rho(G)^3} - \frac{\pi\mu}{6} \right) (\rho(G) - \mu)^3,$$

где $\mathbf{l}(\rho(G))$ — длина линии уровня функции $\rho(x, G)$, находящаяся на расстоянии $\mu = \rho(G)$ от границы области. Далее, применяя равенства (2.4), из последнего неравенства нетрудно получить двусторонние оценки для $\mathbf{f}'_2(\mu)$ и $\mathbf{f}''_2(\mu)$. В частности, из этих оценок следует полиномиальное поведение $\mathbf{f}_2(\mu)$ и её производных.

Чтобы обобщить последнее неравенство, правое неравенство запишем в виде

$$\frac{1}{\rho(G(\mu))^3} \left(\mathbf{f}_2(\mu) - \frac{\pi\rho(G(\mu))^4}{6} \right) \leq \frac{1}{\rho(G)^3} \left(\mathbf{f}_2(0) - \frac{\pi\rho(G)^4}{6} \right). \tag{2.9}$$

Заметим, что

$$\mathbf{I}_2(D) = \frac{\pi r^4}{6},$$

где D — круг радиуса r . Поэтому естественным является рассмотреть функционал

$$\mathbf{F}_\alpha(\mu) := \frac{1}{\rho(G(\mu))^{\alpha+1}} \left(\mathbf{f}_\alpha(\mu) - \frac{2\pi\rho(G(\mu))^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right). \tag{2.10}$$

Во введенных обозначениях неравенство (2.9) принимает очень простой вид

$$\mathbf{F}_2(\mu) \leq \mathbf{F}_2(0).$$

Таким образом, естественной является гипотеза о том, что аналогичное неравенство имеет место и для $\mathbf{F}_\alpha(\mu)$. Рассуждая аналогично, получаем оценку снизу

$$\mathbf{F}_2(\rho(G)) \leq \mathbf{F}_2(\mu)$$

и соответствующую гипотезу для $\mathbf{F}_\alpha(\mu)$.

Покажем, что последние два неравенства также являются частными случаями свойства монотонности функции $\mathbf{F}_\alpha(\mu)$.

Теорема 2.1. Пусть G — односвязная область, с ограниченным евклидовым моментом порядка $\alpha (> 0)$. Тогда $\mathbf{F}_\alpha(\mu)$ является монотонно убывающей функцией при $\alpha \geq 0$.

Следствие 1. В условиях теоремы 2.1 функция $\mathbf{f}_\alpha(\mu)\rho(G(\mu))^{-(\alpha+1)}$ монотонно убывает на $[0, \rho(G)]$, в частности, справедливо неравенство

$$\mathbf{f}_\alpha(\mu) < \left(1 - \frac{\mu}{\rho(G)}\right)^{\alpha+1} \mathbf{I}_\alpha(G),$$

где $\mu \in (0, \rho(G))$.

Другим важным следствием теоремы 2.1 является свойство о степенном поведении функционала $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$.

Следствие 2. Пусть G — односвязная область и $\alpha \geq 0$. Тогда справедливы неравенства

$$\mathbf{f}_\alpha(\mu) \leq \left(\mathbf{I}_\alpha(G) - \frac{2\pi\mu\rho(G)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) \left(1 - \frac{\mu}{\rho(G)}\right)^{\alpha+1}, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{f}_\alpha(\mu) \geq \frac{\rho(G)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\mathbf{l}(\rho(G)) + \frac{2\pi(\rho(G) - \mu)}{\alpha+2} \right) \left(1 - \frac{\mu}{\rho(G)}\right)^{\alpha+1}, \quad (2.12)$$

где $0 \leq \mu \leq \rho(G)$. Оба неравенства обращаются в равенство тогда и только тогда, когда G — область типа Боннезена.

При $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ последние неравенства доказаны в [9] и применены для оценок жесткости кручения и евклидовых моментов области относительно границы.

Очевидно, что неравенство (2.11) обобщает следствие 1. С другой стороны, следствием (2.12) является изопериметрическое неравенство

$$\mathbf{f}_\alpha(\mu) \geq \frac{2\pi\rho(G)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left(1 - \frac{\mu}{\rho(G)}\right)^{\alpha+2}, \quad (2.13)$$

являющиеся противоположным к неравенству из следствия 1, причем неравенство (2.13) обращается в равенство тогда и только тогда, когда G — круг.

Утверждение следствия 2 можно представить в виде следующего двойного неравенства

$$\frac{\mathbf{l}(\rho(G))\rho(G)^{\alpha+1}}{\alpha+1} (\rho(G) - \mu)^{\alpha+1} \leq \mathbf{f}_\alpha(\mu) - \frac{2\pi(\rho(G) - \mu)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \leq \left(\mathbf{I}_\alpha(G)\rho(G)^{-(\alpha+1)} - \frac{2\pi\rho(G)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) (\rho(G) - \mu)^{\alpha+1},$$

выделяющем степенное поведение в явном виде, где область и параметр α являются фиксированными.

Далее, оценки производных функции $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ получаются с использованием равенств (2.5).

Следствие 3. Пусть G — односвязная область и $\alpha \geq 1$. Тогда справедливы неравенства

$$\mathbf{f}'_\alpha(\mu) \geq -\alpha \left(\mathbf{I}_{\alpha-1}(G) - \frac{2\pi\mu\rho(G)^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \right) \left(1 - \frac{\mu}{\rho(G)}\right)^\alpha,$$

$$\mathbf{f}'_\alpha(\mu) \leq -\rho(G)^\alpha \left(\mathbf{l}(\rho(G)) + \frac{2\pi(\rho(G) - \mu)}{\alpha+1} \right) \left(1 - \frac{\mu}{\rho(G)}\right)^\alpha,$$

где $0 \leq \mu \leq \rho(G)$. Оба неравенства обращаются в равенство тогда и только тогда, когда G — область типа Боннезена.

Следствие 4. Пусть G — односвязная область и $\alpha \geq 2$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\alpha''(\mu) &\leq \alpha(\alpha - 1) \left(\mathbf{I}_{\alpha-2}(G) - \frac{2\pi\mu\rho(G)^{\alpha-1}}{\alpha(\alpha - 1)} \right) \left(1 - \frac{\mu}{\rho(G)} \right)^{\alpha-1}, \\ \mathbf{f}_\alpha''(\mu) &\geq (\alpha - 1)\rho(G)^{\alpha-1} \left(\mathbf{l}(\rho(G)) + \frac{2\pi(\rho(G) - \mu)}{\alpha} \right) \left(1 - \frac{\mu}{\rho(G)} \right)^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

где $0 \leq \mu \leq \rho(G)$. Оба неравенства обращаются в равенство тогда и только тогда, когда G — область типа Боннезена.

Из [10] и теоремы 2.1 следует, что функционал

$$\mathbf{E}(\alpha, \mu) := (\alpha + 1)\mathbf{F}_\alpha(\mu) \tag{2.14}$$

является монотонно убывающей функцией по обоим своим аргументам. При этом монотонность по первому аргументу называется изопериметрической монотонностью по параметру α . Действительно, фиксируя μ , мы получаем связь между различными геометрическими характеристиками множества $G(\mu)$ в форме неравенства. С другой стороны, фиксируя α , мы получаем неравенства, аналогичные монотонности, например, функционала $\mathbf{a}(\mu)$. В действительности, следствие 3 выражает количественное изменение производной функционала.

Если вместо функции $\rho(x, G)$ рассмотреть классическую функцию напряжения области, при этом от класса односвязных областей можно перейти к классу конечносвязных областей на плоскости, то оказывается, что можно доказать утверждения, аналогичные вышеизложенным. В данном случае базовыми являются результаты, полученные в работах [1, 11, 14]. Далее сформулируем результаты, опуская их подробное обсуждение.

Пусть G — конечносвязная область на плоскости. Обозначим через Γ_0 внешнюю граничную компоненту границы ∂G , а через $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ — внутренние компоненты границы. Функцией напряжения области G называют единственное решение $u(x, G)$ следующей краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = -2 & \text{в } G, \\ u = 0 & \text{на } \Gamma_0, \\ u = c_i & \text{на } \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

где константы c_i определяются из условия

$$\oint_{\Gamma_i} \frac{\partial u}{\partial n} ds = -2a_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

здесь $\partial/\partial n$ обозначает внутреннюю нормаль и a_i — площадь, ограниченную кривой Γ_i .

Обозначим через G_0 область, граница которой совпадает с Γ_0 и содержащую G . Продолжим по непрерывности константами $u(x, G)$ в множества, ограниченные кривыми Γ_i ($i = 1, \dots, n$). При этом сохраним за продолжением обозначение. Рассмотрим следующий интегральный функционал области

$$\mathbf{T}_\beta(G) := \int_{G_0} u(x, G)^\beta dA,$$

где $\beta > -1$. В случае односвязной области при $\beta = 1$ последний функционал с точностью до константы совпадает с жесткостью кручения области G .

Обозначим через $G(\nu)$ множество уровня функции $u(x, G)$, т. е.

$$G(\nu) := \{x \in G_0 \mid u(x, G) > \nu\}.$$

Заметим, что частью границы множеств $G(\nu)$ могут выступать кривые Γ_i . Для области с ограниченным функционалом $\mathbf{T}_\beta(G)$ ($\beta < +\infty$) все множества уровня имеют конечную площадь при $\nu < \mathbf{u}(G)$ (см. [14]), где $\mathbf{u}(G) := \sup_{x \in G} u(x, G)$.

По аналогии с евклидовыми моментами рассмотрим функционал

$$\phi_\beta(\nu) := \mathbf{T}_\beta(G(\nu)),$$

где $0 \leq \nu \leq \mathbf{u}(G)$, $\beta > -1$.

Лемма 2.2. Пусть G — конечносвязная область, с ограниченным функционалом $\mathbf{T}_\beta(G)$ ($\beta \geq 0$). Тогда $\phi_\beta(\mu)$ является монотонно убывающей при $\beta \geq 0$ функцией и строго выпуклой вниз при $\beta \geq 1$, а также абсолютно непрерывной при $\beta > 0$.

Доказательство. Из определений функции $u(x, G)$ и множеств $G(\nu)$ нетрудно установить равенство

$$u(x, G(\nu)) = u(x, G) - \nu \quad (x \in G(\nu)), \quad (2.15)$$

в частности, $\mathbf{u}(G(\nu)) = \mathbf{u}(G) - \nu$. Применяя определение интеграла по Лебегу, получим

$$\phi_\beta(\nu) = \int_0^{\mathbf{A}(G(\nu))} t(\mathbf{a}_\nu)^\beta d\mathbf{a}_\nu = \int_\nu^{\mathbf{u}(G)} (t - \nu)^\beta d\mathbf{a}(t) + \sum_{c_i > \nu} (c_i - \nu)^\beta a_i.$$

Далее, применяя формулу коплощади [13], применённой к функции $u(x, G)$, имеем

$$\phi_\beta(\nu) = \int_\nu^{\mathbf{u}(G)} (t - \nu)^\beta \ell(t) dt + \sum_{c_i > \nu} (c_i - \nu)^\beta a_i, \quad (2.16)$$

где

$$\ell(t) := \int_{\Gamma(t)} \frac{ds}{|\nabla u(x, G)|}$$

и $\Gamma(t) = \{x \in G | u(x, G) = t\}$. Из полученной формулы следует монотонное убывание $\phi_\beta(\nu)$ при $\beta \geq 0$.

Также, из формулы (2.16) следует равенство

$$\phi'_\beta(\nu) = -\beta \int_\nu^{\mathbf{u}(G)} (t - \nu)^{\beta-1} \ell(t) dt - \beta \sum_{c_i > \nu} (c_i - \nu)^{\beta-1} a_i = -\beta \phi_{\beta-1}(\nu). \quad (2.17)$$

Отсюда вытекает строгая выпуклость вниз $\phi_\beta(\nu)$ при $\beta \geq 1$.

Абсолютная непрерывность функции $\phi_\beta(\nu)$ доказывается так же, как и в случае Леммы 2.1. \square

Далее, анализируя результаты работы [14], по аналогии с определением (2.10) рассмотрим функционал

$$\Phi_\beta(\nu) := \frac{1}{\mathbf{u}(G(\nu))^\beta} \left(\phi_\beta(\nu) - \frac{2\pi \mathbf{u}(G(\nu))^{\beta+1}}{\beta+1} \right),$$

где $\beta \geq 0$. В случае когда область G ограничена концентрическим кольцом, то хорошо известно, что выражение в скобках обращается тождественно в нуль, а в остальных случаях, как показал Пейн [6], строго положительно.

Имеет место следующий аналог теоремы 2.1.

Теорема 2.2. Пусть G — конечносвязная область, с ограниченным функционалом $\mathbf{T}_\beta(G)$ для некоторого $\beta (\geq 0)$. Тогда $\Phi_\beta(\nu)$ является монотонно убывающей функцией при $\beta \geq 1$.

Приведем также следствия, иллюстрирующие степенное поведение функции $\phi_\beta(\nu)$.

Следствие 5. В условиях теоремы 2.2 справедливы неравенства

$$0 \leq \phi_\beta(\nu) - \frac{2\pi \mathbf{u}(G)^{\beta+1}}{\beta+1} \left(1 - \frac{\nu}{\mathbf{u}(G)} \right)^{\beta+1} \leq \mathbf{T}_\beta(G) \left(1 - \frac{\nu}{\mathbf{u}(G)} \right)^\beta,$$

где $0 \leq \nu \leq \mathbf{u}(G)$. Оба неравенства обращаются в равенство тогда и только тогда, когда G — концентрическое кольцо.

Следствие 6. Пусть G — конечносвязная область и $\beta \geq 1$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\phi'_\beta(\nu) &\geq -(\beta \mathbf{T}_{\beta-1}(G) - 2\pi\nu \mathbf{u}(G)^{\beta-1}) \left(1 - \frac{\nu}{\mathbf{u}(G)}\right)^{\beta-1}, \\ \phi'_\beta(\nu) &\leq -2\pi(\mathbf{u}(G) - \nu)^\beta,\end{aligned}$$

где $0 \leq \nu \leq \mathbf{u}(G)$. Оба неравенства обращаются в равенство тогда и только тогда, когда G — концентрическое кольцо.

Следствие 7. Пусть G — конечносвязная область и $\beta \geq 2$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\phi''_\beta(\nu) &\leq \beta((\beta-1)\mathbf{T}_{\beta-2}(G) - 2\pi\nu \mathbf{u}(G)^{\beta-2}) \left(1 - \frac{\nu}{\mathbf{u}(G)}\right)^{\beta-2}, \\ \phi''_\beta(\nu) &\geq 2\pi\beta(\mathbf{u}(G) - \nu)^{\beta-1},\end{aligned}$$

где $0 \leq \nu \leq \mathbf{u}(G)$. Оба неравенства обращаются в равенство тогда и только тогда, когда G — концентрическое кольцо.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 2.1. Из утверждения Леммы 2.1 об абсолютной непрерывности функции $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ следует, что убывание $\mathbf{F}_\alpha(\mu)$ эквивалентно неравенству $\mathbf{F}'_\alpha(\mu) \leq 0$ для почти всех $\mu \in (0, \boldsymbol{\rho}(G))$. Последнее неравенство, ввиду тождества $\boldsymbol{\rho}(G(\mu)) = \boldsymbol{\rho}(G) - \mu$ и определения (2.10), равносильно оценке

$$\left(\frac{\mathbf{f}_\alpha(\mu)}{(\boldsymbol{\rho}(G) - \mu)^{\alpha+1}}\right)' \leq -\frac{2\pi}{(\alpha+1)(\alpha+2)}. \quad (3.1)$$

Это неравенство при $\alpha = 2$ совпадает с (2.8), следовательно, утверждение теоремы в этом частном случае обоснованно нами ранее.

В работах [9, 10] были изучены свойства функционала $(\alpha+1)\mathbf{F}_\alpha(0)$ как функции аргумента α . Будем называть областью типа Боннезена выпуклую область, являющуюся объединением двух полукругов и прямоугольника, в частности, при вырождении прямоугольника получаем круг. Так как утверждение является одним из ключевых в доказательстве, мы приведем его формулировку, используя обозначения, введенные в данной работе.

Теорема А. [10] Пусть G — односвязная область и $\mathbf{I}_{p_0}(G) < +\infty$ для некоторого $p_0 \in [-1, \infty)$. Тогда

- 1) если G не совпадает с экстремалью в неравенстве Боннезена, то $(\alpha+1)\mathbf{F}_\alpha(0)$ — строго убывающая функция от α ,
- 2) если G совпадает с одной из экстремалей в неравенстве Боннезена, то $(\alpha+1)\mathbf{F}_\alpha(0) \equiv \mathbf{I}(\boldsymbol{\rho}(G))$, для $\alpha \in [-1, +\infty)$.

В частности, справедливо неравенство

$$(\alpha+1)\mathbf{F}_\alpha(0) \leq \alpha\mathbf{F}_{\alpha-1}(0).$$

Неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда G является областью типа Боннезена. Важным является тот факт, что все линии уровня функции расстояния области типа Боннезена также ограничивают область типа Боннезена.

Применим последнее неравенство на множествах уровня $G(\mu)$. Учитывая определения (2.2), неравенство примет вид

$$\mathbf{f}_\alpha(\mu) \leq \frac{\alpha \rho(G(\mu))}{\alpha + 1} \mathbf{f}_{\alpha-1}(\mu) - \frac{2\pi \rho(G(\mu))^{\alpha+2}}{(\alpha + 1)^2(\alpha + 2)}.$$

Учитывая равенства (2.5) и проделав несложные алгебраические преобразования, получаем, что последнее неравенство эквивалентно неравенству (3.1). Это завершает доказательство теоремы. \square

Доказательство следствия 2. Неравенство (2.11) эквивалентно неравенству

$$\mathbf{F}_\alpha(\mu) \leq \mathbf{F}_\alpha(0),$$

являющееся прямым следствием теоремы 2.1.

Снова воспользуемся тем, что функционал $(\alpha + 1)\mathbf{F}_\alpha(0)$ является монотонно убывающей функцией аргумента α . С другой стороны, в работе [9, с. 2952] доказано, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\alpha \mathbf{I}_\alpha(G)}{\rho(G)^{\alpha+1}} = \mathbf{l}(\rho(G)).$$

Следствием этих двух утверждений является следующее изопериметрическое неравенство

$$\mathbf{I}_\alpha(G) \geq \frac{\rho(G)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \left(\mathbf{l}(\rho(G)) + \frac{2\pi \rho(G)}{p + 2} \right).$$

Применяя полученное неравенство на множествах уровня $G(\mu)$, а также $\rho(G(\mu)) = \rho(G) - \mu$, получим неравенство (2.12). \square

Доказательство теоремы 2.2. Из утверждения Леммы 2.2 об абсолютной непрерывности функции $\phi_\beta(\nu)$ следует, что убывание $\Phi_\beta(\nu)$ эквивалентно неравенству $\Phi'_\beta(\nu) \leq 0$ для почти всех $\nu \in (0, \mathbf{u}(G))$. Последнее неравенство, ввиду тождества $\mathbf{u}(G(\nu)) = \mathbf{u}(G) - \nu$ и соответствующих определений, равносильно оценке

$$\left(\frac{\phi_\beta(\nu)}{(\mathbf{u}(G) - \nu)^\beta} \right)' \leq -\frac{2\pi}{\beta + 1}. \quad (3.2)$$

В данном случае ключевым в доказательстве является утверждение из работы [14]. Мы приведем утверждение, адаптированное к введенным обозначениям.

Теорема В. Пусть G конечносвязна область, $\mathbf{T}_{r_0}(G) < +\infty$ для некоторого $r_0 \in [0, \infty)$. Then

- 1) Если G не является концентрическим кольцом, то $\Phi_\beta(0)(\mathbf{u}(G))^{-1}$ является строго убывающей функцией от β для $\beta \geq r_0$.
- 2) Если G — концентрической кольцо, то $\Phi_\beta(0)(\mathbf{u}(G))^{-1} \equiv 0$ для $\beta \in [0, +\infty)$.

В частности, имеет место неравенство

$$\Phi_\beta(0) \leq \Phi_{\beta-1}(0). \quad (3.3)$$

Неравенство обращается в равенство только в случае концентрического кольца. Заметим, что линии уровня функции напряжения концентрического кольца также ограничивают концентрическое кольцо.

Применяя последнее неравенство на множествах уровня $G(\nu)$, получим

$$\phi_\beta(\nu) \leq \mathbf{u}(G(\nu))\phi_{\beta-1}(\nu) - \frac{2\pi \mathbf{u}(G(\nu))^{\beta+1}}{\beta(\beta + 1)}. \quad (3.4)$$

Применяя (2.17), нетрудно установить, что неравенство (3.4) эквивалентно неравенству (3.2). Теорема 2.2 доказана. \square

Доказательство следствия 5. Левое неравенство в утверждении следствия представляет собой неравенство Пейна для $G(\nu)$, а правое неравенство эквивалентно неравенству $\Phi_\beta(\nu) \leq \Phi_\beta(0)$. \square

В заключении отметим, что аналогом функционала (2.14) в данном случае будет функционал

$$\mathbf{R}(\beta, \nu) := \Phi_\beta(\nu),$$

являющийся монотонным по обоим переменным. Монотонное поведение по свободному параметру β доказано в работе [14], как и в случае с функцией расстояния до границы, эта монотонность изопериметрическая.

Автор выражает благодарность анонимному рецензенту за ценные замечания и рекомендации к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Салахудинов Р.Г. Интегральные свойства классической функции напряжения односвязной области // *Матем. заметки*, 92(3):447–458, 2012.
2. Авхадиев Ф.Г. Решение обобщенной задачи Сен-Венана // *Матем. сборник*, 189(12):3–12, 1998.
3. F.G. Avkhadiev Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants // *Lobachevskii J. Math.*, 21:3–31, 2006.
4. R. Bañuelos, M. van den Berg, and T. Carroll Torsional rigidity and expected lifetime of brownian motion // *J. London Math. Soc. (2)*, 66:499–512, 2002.
5. Салахудинов Р.Г. Двухсторонние оценки L^p -нормы функции напряжения выпуклых областей в \mathbb{R}^n // *Изв. вузов. Математика*, (3):41–49, 2006.
6. L.E. Payne *Some inequalities in the torsion problem for multiply connected regions* // *Studies in Mathematical analysis and Related Topics*. Stanford University Press, Stanford, California, 1962. Essays in honor of G. Pólya. P. 270–280
7. Поля Г. и Сегё Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике*. Физматгиз, М., 1962.
8. C. Bandle *Isoperimetric inequalities and applications*. Pitman Advanced Publishing Program, Boston, London, Melbourne, 1980.
9. R.G. Salakhudinov Refined inequalities for euclidian moments of a domain with respect to its boundary // *SIAM J. Math. Anal.*, 44(4):2949–2961, 2012.
10. Салахудинов Р.Г. Изопериметрическая монотонность евклидовых граничных моментов односвязной области // *Изв. вузов. Математика*, (8):66–79, 2013.
11. Салахудинов Р.Г. Изопериметрические неравенства для L^p -норм функции напряжения многосвязной области на плоскости // *Изв. вузов. Математика*, (9):75–80, 2013.
12. R.G. Salakhudinov Isoperimetric inequalities for L^p -norms of the distance function to the boundary // *Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 148(2):151–162, 2006.
13. J. Maly, D. Swanson, and W. Ziemer. The coarea formula for sobolev mappings // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355:477–492, 01 2002.
14. R.G. Salakhudinov Payne type inequalities for L^p -norms of the warping functions // *J. Math. Anal. Appl.*, 410(2):659–669, 2014.

Рустем Гумерович Салахудинов,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,
ул. Кремлёвская, 35,
420037, г. Казань, Россия
E-mail: rsalakhud@gmail.com