ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 2 (2019). С. 72-82.

УДК 517.95

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА АЛЛЕРА–ЛЫКОВА С ДРОБНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ПРОИЗВОДНОЙ

С.Х. ГЕККИЕВА, М.А. КЕРЕФОВ

Аннотация. Вопросы тепловлагопереноса в почвах являются фундаментальными при решении многих задач гидрологии, агрофизики, строительной физики и других областей науки. Исследователи при этом концентрируют свое внимание на возможности отражения в характере исходных уравнений специфических особенностей изучаемых массивов, их структуры, физических свойств, протекающих в них процессов и т.д. В связи с этим возникает качественно новый класс дифференциальных уравнений состояния и переноса с дробной производной, являющихся основой большинства математических моделей, описывающих широкий класс физических и химических процессов в средах с фрактальной структурой и памятью.

В работе исследована первая краевая задача для уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова с дробной по времени производной Римана–Лиувилля. Рассматриваемое уравнение является обобщением уравнения Аллера–Лыкова, посредством введения понятия фрактальной скорости изменения влажности, которая объясняет наличие потоков против потенциала влажности.

Существование решения первой краевой задачи доказано методом Фурье. С помощью метода энергетических неравенств для решения задачи получена априорная оценка в терминах дробной производной Римана–Лиувилля, из которой следует единственность решения.

Ключевые слова: уравнение влагопереноса Аллера-Лыкова, дробная производная Римана-Лиувилля, метод Фурье, априорная оценка.

Mathematics Subject Classification: 35E99

1. Введение

Движение влаги в почве можно описать квазилинейным уравнением [1, с. 136]

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

где $w(x,t)$ – влажность почвы в долях единицы на глубине x в момент времени t, $D(w)$ – коэффициент диффузии. Это уравнение получено на основе анализа механизма диффузии в пористом массиве, когда учитывается возникновение потоков влаги под действием градиента капиллярного давления. Однако достаточно убедительные и многократные опыты демонстрируют иногда обратный знак потока от слоев с малым к слоям с большим влагосодержанием. Правильное объяснение движения влаги в прямом и обратном направлении возможно на основе модифицированного уравнения Аллера [1, с. 158]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(w)\frac{\partial w}{\partial x} + A\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right), \qquad (1)$$

S.Kh. Gekkieva, M.A. Kerefov, Dirichlet boundary value problem for Aller–Lykov moisture transfer equation with time fractional derivative.

Поступила 20 февраля 2018 г.

где дополнительный член $A\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}$ призван объяснить факт движения влаги против градиента влажности, A – варьируемый коэффициент Аллера.

Уравнение Аллера (1) предполагает бесконечную скорость распространения возмущения в почве, уравнение А. В. Лыкова

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{2}$$

учитывает конечную его скорость. В (2) вводится дополнительное слагаемое $A_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, роль которого становится заметной в процессах, предполагающих быстрые колебания влажности на границах исследуемого образца почвы. А. В. Лыков полагает, что $A_1 = Cx^2$, где $C = const$, зависит от коэффициента диффузии, а также пористости тела, его капиллярных свойств и вязкости жидкости [2, с. 197].

Так как коллоидное капиллярно-пористое тело поликапиллярной структуры является примером фрактальной среды или допускает такую интерпретацию, А.М. Нахушевым на основе уравнения (2) в [2, с. 197], было представлено «качественно новое уравнение влагопереноса»

$$D_{0t}^{\alpha} w = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right) - A_1 D_{0t}^{\alpha+1} w, \tag{3}$$

где D_{0t}^{γ} – оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля [2, с. 9], $0 < \alpha < 1$. Уравнение (3) при $\alpha = 1$ совпадает с уравнением влагопереноса Лыкова (2).

При таком подходе в случае уравнения Аллера (1) мы получаем так называемое, модифицированное уравнение влагопереноса с дробной производной, рассмотренное в работах [3, 4].

Для описания процессов испарения и инфильтрации В.Я. Кулик [5] предлагает привлекать гибридное уравнение, совмещая два известных подхода Аллера и Лыкова. Такого рода уравнения рассмотрены в работах [6, 7].

В данной работе исследовано уравнение вида

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} w + D_{0t}^{\alpha} w = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(w)\frac{\partial w}{\partial x} + A D_{0t}^{\alpha}\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

где A, $A_1 = const > 0$, $0 < \alpha < 1$, в случае $D(\omega) \equiv 1$, которое является обобщением уравнения Аллера-Лыкова в классической постановке.

Исследование будем проводить методом Фурье и методом априорных оценок.

Ранее методом Фурье краевые задачи для уравнений с дробной производной исследовались в работах С.Х. Геккиевой [8], O.P. Agrawal [9], В.А. Нахушевой [10, с. 60], О.Х. Масаевой [11] и других авторов, в том числе методом априорных оценок в работах [12], [13].

2. Постановка задачи

В области $Q = \{(x,t): \ 0 < x < 1, \ t > 0\}$ рассмотрим уравнение

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} u + D_{0t}^{\alpha} u = u_{xx} + A D_{0t}^{\alpha} u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0. \tag{4}$$

Регулярным решением уравнения (4) в области Q назовем функцию $u = u(x,t)$ из класса $D_{0t}^{\alpha-1} u(x,t)$, $D_{0t}^{\alpha} u(x,t) \in \ C\left(\overline{Q}\right)$; $D_{0t}^{\alpha+1} u(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$, $D_{0t}^{\alpha} u_{xx}(x,t) \in C\left(Q\right)$, которая удовлетворяет уравнению (4) во всех точках $(x,t) \in Q$.

Сформулируем первую краевую задачу для уравнения (4).

Задача 1. *Найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (4) в области Q, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0, \tag{5}$$

и начальным условиям

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) = \tau(x), \quad \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha}u(x,t) = \nu(x), \tag{6}$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$ *– заданные функции.*

3. Решение задачи для однородного уравнения Аллера-Лыкова с дробной по времени производной

Для решения задачи 1 применим метод разделения переменных.

Для начала найдем класс нетривиальных решений уравнения (4), удовлетворяющих однородным граничным условиям (5), представимых в виде

$$u(x,t) = \varphi(x)y(t). \tag{7}$$

Подставляя предполагаемую форму решения (7) в уравнение (4), получаем следующие уравнения для определения функций $\varphi(x)$, $y(t)$:

$$\varphi'' + \lambda\varphi = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0, \tag{8}$$

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1}y + (1 + A\lambda)\, D_{0t}^{\alpha}y + \lambda y = 0$$

или

$$D_{0t}^{\alpha+1}y + aD_{0t}^{\alpha}y + by = 0, \tag{9}$$

где $a = \frac{1+A\lambda}{A_1}$, $b = \frac{\lambda}{A_1}$, $\lambda = const$.

Как известно, решение спектральной задачи (8) имеет вид

$$\varphi_k(x) = \sin(\pi kx),\ \lambda = \lambda_k = (\pi k)^2,\ k = 1,\ 2,\ \dots\ . \tag{10}$$

Прежде, чем выписывать решение уравнения (9), отметим, что обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами исследовались достаточно интенсивно. Для них найдены явные представления решений начальных и краевых задач в терминах обобщенных функций Миттаг-Леффлера и функций Райта. Подробное изложение этих результатов и библиографию по теме можно найти в работах [14, 15]. Для нашей работы, чтобы избежать технически непростого аппарата теории специальных функций, возникающих при решении этих уравнений, позволим себе решить уравнение (9), редуцируя его к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода со степенным ядром и решить его методом последовательных приближений.

Пусть $y_k(t)$ – решение уравнения (9), соответствующее собственному значению λ_k. Подействовав на уравнение (9) оператором дробного интегрирования порядка $\alpha+1$ [16, с. 15], получим:

$$y_k(t) + \int_0^t y_k(\tau)\left[a_k + \frac{b_k}{\Gamma(\alpha+1)(t-\tau)^{-\alpha}}\right] d\tau = f(t), \tag{11}$$

где $a_k = \frac{1+A\lambda_k}{A_1}$, $b_k = \frac{\lambda_k}{A_1}$, $f(t) = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(\nu_k + a_k\tau_k) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau_k$, $D_{0t}^{\alpha-1}y_k(t)\big|_{t=0} = \tau_k$, $D_{0t}^{\alpha}y_k(t)\big|_{t=0} = \nu_k$.

Применим к (11) теорию интегральных уравнений Вольтерра. Вводя обозначение

$$K_1(t,\tau) = \left[a_k + \frac{b_k(t-\tau)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right] H(t-\tau), \tag{12}$$

где $H(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда, и определяя далее последовательность ядер $\{K_n(t,\ \tau)\}_1^\infty$ посредством рекуррентных соотношений

$$K_{n+1}(t,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}K_n\left(t,t_1\right)K_1\left(t_1,\tau\right)dt_1, \tag{13}$$

методом индукции докажем, что

$$K_{n+1}(t,\tau)=\left[\sum_{s=0}^{n+1}\left(\begin{array}{c}n+1\\ s\end{array}\right)a_k^{n+1-s}b_k^s\frac{(t-\tau)^{n+s\alpha}}{\Gamma(n+1+s\alpha)}\right]H(t-\tau), \tag{14}$$

где $\left(\begin{array}{c}n+1\\ s\end{array}\right)=\frac{(n+1)!}{s!(n+1-s)!}$.

Действительно, для $n=0$ (14) следует из (12). Предположим, что (14) верна для любого $l\le n$

$$K_l(t,\tau)=\left[\sum_{s=0}^{l}\left(\begin{array}{c}l\\ s\end{array}\right)a_k^{l-s}b_k^s\frac{(t-\tau)^{l+s\alpha-1}}{\Gamma(l+s\alpha)}\right]H(t-\tau),\quad l\le n. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (13), после элементарных преобразований получаем, что (14) верна и для любого $l=n+1$. Это доказывает справедливость (14) для любых n.

Итак, для резольвенты уравнения (11) имеем формулу

$$R(t,\tau,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nK_{n+1}(t,\tau)=$$

$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum_{s=0}^{n+1}\left(\begin{array}{c}n+1\\ s\end{array}\right)a_k^{n+1-s}b_k^s\frac{(t-\tau)^{n+s\alpha}}{\Gamma(n+1+s\alpha)}\right]H(t-\tau).$$

Таким образом, интегральное уравнение (11) имеет единственное решение, представимое в виде:

$$y_k(t)=f(t)-\int\limits_0^tR(t,\tau,\lambda)f(t)d\tau=$$

$$=(\nu_k+a_k\tau_k)\left[\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sum_{s=0}^{n+1}\left(\begin{array}{c}n+1\\ s\end{array}\right)\frac{a_k^{n+1-s}b_k^st^{n+s\alpha+\alpha+1}}{\Gamma(n+s\alpha+\alpha+2)}\right]+$$

$$+\tau_k\left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sum_{s=0}^{n+1}\left(\begin{array}{c}n+1\\ s\end{array}\right)\frac{a_k^{n+1-s}b_k^st^{n+s\alpha+\alpha}}{\Gamma(n+s\alpha+\alpha+1)}\right].$$

Итак, решения уравнения (9), соответствующие собственным значениям λ_k, имеют вид

$$y_k(t)=(\nu_k+a\tau_k)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^n\left(\begin{array}{c}n\\ s\end{array}\right)\frac{a_k^{n-s}b_k^st^{n+s\alpha+\alpha}}{\Gamma(n+s\alpha+\alpha+1)}+$$

$$+\tau_k\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^n\left(\begin{array}{c}n\\ s\end{array}\right)\frac{a_k^{n-s}b_k^st^{n+s\alpha+\alpha-1}}{\Gamma(n+s\alpha+\alpha)}.$$

Возвращаясь к задаче (4)–(6), заключаем, что функции

$$u_k(x,t)=\varphi_k(x)y_k(t)=$$

$$=\Bigg(\left(\nu_k+a_k\tau_k\right)t^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^n\left(\begin{array}{c}n\\ s\end{array}\right)\frac{a_k^{n-s}b_k^st^{n+s\alpha}}{\Gamma(n+s\alpha+\alpha+1)}+$$

$$+\tau_k t^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^n\left(\begin{array}{c}n\\s\end{array}\right)\frac{a_k^{n-s}b_k^s t^{n+s\alpha}}{\Gamma(n+s\alpha+\alpha)}\Bigg)\sin(\pi kx)$$

являются частными решениями уравнения (4), удовлетворяющими граничным условиям (5), что проверяется непосредственной подстановкой.

Обратимся теперь к решению задачи (4)–(6) в общем случае. Составим ряд

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}y_k(t)\varphi_k(x)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\left(\nu_k+a_k\tau_k\right)t^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\s\end{array}\right)\frac{(-1)^n\,a_k^{n-s}b_k^s t^{n+s\alpha}}{\Gamma(n+s\alpha+\alpha+1)}+$$

$$+\tau_k t^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n+1}\left(\begin{array}{c}n\\s\end{array}\right)\frac{(-1)^n\,a_k^{n-s}b_k^s t^{n+s\alpha}}{\Gamma(n+s\alpha+\alpha)}\Bigg)\sin(\pi kx). \quad (16)$$

Функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям, так как им удовлетворяют все члены ряда (16). Требуя выполнения начальных условий (6), получаем:

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)=\lim_{t\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}y_k\left(t\right)\varphi_k\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\left(x\right)\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}y_k\left(t\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\left(x\right)\tau_k=\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k\sin\left(\pi kx\right)=\tau(x),$$

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\left(x\right)\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha}y_k\left(t\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\left(x\right)\nu_k=\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k\sin\left(\pi kx\right)=\nu(x).$$

Таким образом, в силу (10) получаем: разложимость начальных функций в следующие ряды Фурье по синусам

$$\tau\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k\sin\left(\pi kx\right),\ \nu\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k\sin\left(\pi kx\right), \quad (17)$$

является необходимым условием разрешимости задачи 1 в классе функций, представимых в виде ряда (16).

Представления (17) имеют место тогда и только тогда, когда

$$\tau(0)=\tau(1),\quad \nu(0)=\nu(1),$$

$$\tau_k=2\int\limits_0^1\tau(x)\sin(\pi kx)dx,\ \nu_k=2\int\limits_0^1\nu(x)\sin(\pi kx)dx.$$

Как известно из теории рядов Фурье [17, с. 696], если функция $\tau(x)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка и удовлетворяет условиям $\tau(0)=\tau(1)=\tau''(0)=\tau''(1)=0$, а $\nu(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка и $\nu(0)=\nu(1)=0$, то представленная формулой (16) функция $u(x,t)$ будет обладать необходимыми производными, которые могут быть вычислены дифференцированием почленно в правой части (16).

Для обоснования метода Фурье нам понадобится лемма [18, с. 136] об асимптотических свойствах функции типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(z;\mu)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+k\rho^{-1})}$.

Лемма 1. *Пусть $\rho > \frac{1}{2}$, μ – вещественная постоянная и α_1 – фиксированное число из интервала $\left(\frac{\pi}{2\rho}, \min\left\{\pi, \frac{\pi}{\rho}\right\}\right)$. Тогда справедливы следующие оценки:*

1. Если $|\arg z| \le \alpha_1$ и $|z| \ge 0$, то

$$|E_\rho(z;\mu)| \le M_1 \left(1+|z|\right)^{\rho(1-\mu)} e^{Rez^\rho} + \frac{M_2}{1+|z|}.$$

2. Если $\alpha_1 \le |\arg z| \le \pi$ и $|z| \ge 0$, то

$$|E_\rho(z;\mu)| \le \frac{M_2}{1+|z|},$$

где M_1 и M_2 – постоянные, не зависящие от z.

Продолжим обоснование метода Фурье.

Покажем, что ряд (16) и ряды производных $D_{0t}^{\alpha+1}u$, $D_{0t}^{\alpha}u$, u_{xx}, $D_{0t}^{\alpha}u_{xx}$, которые получаются из него, будут равномерно сходиться.

Для доказательства равномерной сходимости ряда (16) получим следующее соотношение, при этом также будем использовать известные оценки коэффициентов Фурье [17, с. 647] и свойства гамма-функции:

$$\begin{aligned}
|u_k| \le &\left|(\nu_k + a_k\tau_k)\, t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^n \binom{n}{s} \frac{a_k^{n-s} b_k^s t^{n+s\alpha}}{\Gamma(n+s\alpha+\alpha+1)}\right| + \\
&+\left|\tau_k t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^n \binom{n}{s} \frac{a_k^{n-s} b_k^s t^{n+s\alpha}}{\Gamma(n+s\alpha+\alpha)}\right| \le \\
&\le ct^\alpha |\nu_k| \left|\sum_{n=0}^{\infty}(-a_k t)^n \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\frac{\left(a_k^{-1}b_k t^\alpha\right)^s}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right| + \\
&+ct^\alpha a_k |\tau_k| \left|\sum_{n=0}^{\infty}(-a_k t)^n \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\frac{\left(a_k^{-1}b_k t^\alpha\right)^s}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right| + \\
&+ct^{\alpha-1} |\tau_k| \left|\sum_{n=0}^{\infty}(-a_k t)^n \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\frac{\left(a_k^{-1}b_k t^\alpha\right)^s}{\Gamma(n+\alpha)}\right| \le \\
&\le ct^\alpha \frac{M_3}{k^2}\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-a_k t)^n \frac{\left(1+a_k^{-1}b_k t^\alpha\right)^n}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right| + \\
&+ct^\alpha \frac{M_4}{k^2}\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-a_k t)^n \frac{\left(1+a_k^{-1}b_k t^\alpha\right)^n}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right| + \\
&+ct^{\alpha-1} \frac{M_5}{k^2}\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-a_k t)^n \frac{\left(1+a_k^{-1}b_k t^\alpha\right)^n}{\Gamma(n+\alpha)}\right| = \\
= t^\alpha \frac{M_6}{k^2}&\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[-\left(a_k t + b_k t^{\alpha+1}\right)\right]^n}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right| + t^{\alpha-1}\frac{M_7}{k^2}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[-\left(a_k t + b_k t^{\alpha+1}\right)\right]^n}{\Gamma(n+\alpha)}\right| = \\
&= t^\alpha \frac{M_6}{k^2}\left|E_1\left[-\left(a_k t + b_k t^{\alpha+1}\right); \alpha+1\right]\right| + \\
&+t^{\alpha-1}\frac{M_7}{k^2}\left|E_1\left[-\left(a_k t + b_k t^{\alpha+1}\right); \alpha\right]\right|.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались свойством Гамма-функции:

$$\frac{1}{\Gamma(n+s\alpha+\mu)} \le \frac{c}{\Gamma(n+\mu)},$$

где $\mu > 0$, c – зависит от α и μ и не зависит от s и n.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(t^{\alpha}\frac{M_6}{k^2}E_1\left[-\left(a_kt+b_kt^{\alpha+1}\right);\alpha+1\right]+t^{\alpha-1}\frac{M_7}{k^2}E_1\left[-\left(a_kt+b_kt^{\alpha+1}\right);\alpha\right]\right). \qquad (18)$$

Используя вторую оценку из леммы 1, получим

$$|u_k|\leq\frac{M_6M_2t^{\alpha}}{k^2\left[1+|a_kt+b_kt^{\alpha+1}|\right]}+\frac{M_7M_2t^{\alpha-1}}{k^2\left[1+|a_kt+b_kt^{\alpha+1}|\right]},$$

откуда следует равномерная сходимость ряда (18).

Из сходимости мажорантного ряда, имеющего порядок $\frac{1}{k^4}$, следует и равномерная сходимость ряда (18), а значит и ряда (16) при $t\geq t_0>0$, где t_0 – любое число.

Равномерная сходимость рядов

$$D_{0t}^{\alpha+1}u(x,t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}D_{0t}^{\alpha}u_k,\ D_{0t}^{\alpha}u(x,t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}D_{0t}^{\alpha}u_k,$$

$$u_{xx}(x,t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2u_k}{\partial x^2},\ D_{0t}^{\alpha}u_{xx}(x,t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}D_{0t}^{\alpha}u_k$$

доказывается аналогично, и отсюда следует возможность почленного дифференцирования ряда (17) и применения обобщенного принципа суперпозиции, т.е. функция $u(x,t)$, определяемая рядом (17), удовлетворяет уравнению (4).

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\tau\in C^3[0,1]$, $\nu\in C^2[0,1]$ и выполнены условия согласования $\tau(0)=\tau(1)=\tau''(0)=\tau''(1)=0$, $\nu(0)=\nu(1)=0$, тогда функция, определяемая рядом (16):*

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\nu_k+a_k\tau_k\right)t^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\frac{(-1)^n\,a_k^{n-s}b_k^st^{n+s\alpha}}{\Gamma\left(n+s\alpha+\alpha+1\right)}+\right.$$

$$\left.+\tau_kt^{\alpha-1}\Gamma\left(\alpha\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\frac{(-1)^n\,a_k^{n-s}b_k^st^{n+s\alpha}}{\Gamma\left(n+s\alpha+\alpha\right)}\right)\sin(\pi kx),$$

где

$$\tau_k=2\int_0^1\tau\left(x\right)\sin\left(\pi kx\right)dx,\ \nu_k=2\int_0^1\nu\left(x\right)\sin\left(\pi kx\right)dx,$$

$$a_k=\frac{1+A(\pi k)^2}{A_1},\ b_k=\frac{(\pi k)^2}{A_1},\ 0<\alpha<1,$$

представляет регулярное решение задачи 1.

4. Единственность решения задачи для неоднородного уравнения Аллера-Лыкова с дробной по времени производной

Задача 2. *В области Q рассмотрим краевую задачу для неоднородного уравнения*

$$A_1D_{0t}^{\alpha+1}u+D_{0t}^{\alpha}u=u_{xx}+AD_{0t}^{\alpha}u_{xx}+f(x,t),\quad 0<x<1,\quad 0<t\leq T, \qquad (19)$$

с краевыми условиями (5) и начальными условиями (6).

Обозначим $Q_T=\{(x,t):\ 0<x<1,\ 0<t<T\}$.

Предполагая существование регулярного решения уравнения (19) в области Q_T, сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $f(x,t) \in \mathrm{C}\left(\bar{Q}_T\right)$; $\nu(x) \in \mathrm{C}[0,1]$, $\tau(x) \in \mathrm{C}^2[0,1]$ всюду на $\bar{Q}$ и выполнено условие $\tau(0) = \tau(1) = 0$, тогда для решения задачи (19), (5), (6) справедлива априорная оценка*

$$\|D_{0t}^{\alpha} u\|_0^2 + \|D_{0t}^{\alpha} u_x\|_{2,Q_t}^2 + \|D_{0t}^{\alpha} u\|_{2,Q_t}^2 \leq M_1(t)\left(\|f\|_{2,Q_t}^2 + \|\tau''(x)\|_0^2 + \|\nu(x)\|_0^2\right), \qquad (20)$$

где $\|u\|_0^2 = \int_0^1 u^2(x,t)dx$, $\|u\|_{2,Q_t}^2 = \int_0^t \|u(x,\tau)\|_0^2 d\tau$.

Доказательство. Аналогично [19], введем новую неизвестную функцию $v(x,t)$, полагая

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x)$$

так, что $v(x,t)$ представляет собой отклонение функции $u(x,t)$ от известной функции $\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x)$. С учетом $D_{0t}^{\alpha+1} t^{\alpha-1} = 0$, $D_{0t}^{\alpha} t^{\alpha-1} = 0$ [16, с. 15], имеем

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} v + D_{0t}^{\alpha} v - v_{xx} - A D_{0t}^{\alpha} v_{xx} =$$
$$= f(x,t) - \left(A_1 D_{0t}^{\alpha+1} + D_{0t}^{\alpha} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - A D_{0t}^{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x)\right) =$$
$$= f(x,t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau''(x).$$

Итак, функция $v(x,t)$ будет определяться, как решение уравнения

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} v + D_{0t}^{\alpha} v - v_{xx} - A D_{0t}^{\alpha} v_{xx} = F(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \qquad (21)$$

с начальными условиями

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} v(x,t) = \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}\left(u(x,t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x)\right) =$$
$$= \tau(x) - \frac{\tau(x)}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} t^{\alpha-1} = 0,$$

$$(22)$$

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha} v(x,t) = \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha}\left(u(x,t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x)\right) = \nu(x) - \frac{\tau(x)}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha} t^{\alpha-1} = \nu(x)$$

и граничными условиями

$$v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \qquad (23)$$

где $F(x,t) = f(x,t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau''(x)$.

Получим априорную оценку в терминах дробной производной Римана-Лиувилля, для чего умножим уравнение (21) скалярно на $D_{0t}^{\alpha} v$:

$$A_1\left(D_{0t}^{\alpha+1} v, D_{0t}^{\alpha} v\right) + \left(D_{0t}^{\alpha} v, D_{0t}^{\alpha} v\right) - \left(v_{xx}, D_{0t}^{\alpha} v\right) - A\left(D_{0t}^{\alpha} v_{xx}, D_{0t}^{\alpha} v\right) = \left(F, D_{0t}^{\alpha} v\right), \qquad (24)$$

где $(u,v) = \int\limits_0^1 uv dx$, $(u,u) = \|u\|_0^2$.

Преобразуем слагаемые тождества (24) с учетом (22), (23):

$$A_1\left(D_{0t}^{\alpha+1} v, D_{0t}^{\alpha} v\right) = A_1\int\limits_0^1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_0^t \frac{v(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{v(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx =$$
$$= \frac{A_1}{2}\int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(D_{0t}^{\alpha} v\right)^2 dx = \frac{A_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|D_{0t}^{\alpha} v\|_0^2,$$
$$\left(D_{0t}^{\alpha} v, D_{0t}^{\alpha} v\right) = \|D_{0t}^{\alpha} v\|_0^2,$$

$$(v_{xx}, D_{0t}^{\alpha} v) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 v_{xx}(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ v_x(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \right|_0^1 - \int\limits_0^1 v_x(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx \right\}.$$

В силу (23)

$$v_x(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \Bigg|_0^1 = 0,$$

тогда

$$\left(v_{xx}, D_{0,t}^{\alpha} v\right) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 v_x(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx.$$

Аналогично получим

$$A\left(D_{ot}^{\alpha} v_{xx}, D_{ot}^{\alpha} v\right) = A \int\limits_0^1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v_{xx}(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx =$$

$$= A \frac{1}{\Gamma^2(1-\alpha)} \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v_{xx}(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx =$$

$$= A \frac{1}{\Gamma^2(1-\alpha)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \right|_0^1 -$$

$$\left. - A \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx \right\} =$$

$$= -A \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \right)^2 dx = -A \left\| D_{0t}^{\alpha} v_x \right\|_0^2.$$

Для оценки правой части воспользуемся неравенством Коши-Буняковского и ε-неравенством [20, с. 100], которое справедливо для любого числа $\varepsilon > 0$:

$$(F, D_{0t}^{\alpha} v) \le \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_0^2 + \varepsilon \left\| D_{0t}^{\alpha} v \right\|_0^2.$$

С учетом полученных неравенств из (24) получим

$$\frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\| D_{0t}^{\alpha} v \right\|_0^2 + \left\| D_{0t}^{\alpha} v \right\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 v_x(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx +$$

$$+ A \left\| D_{0t}^{\alpha} v_x \right\|_0^2 \le \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_0^2 + \varepsilon \left\| D_{0t}^{\alpha} v \right\|_0^2. \tag{25}$$

Проинтегрируем (25) по τ от 0 до t:

$$\frac{A_1}{2} \left\| D_{0t}^{\alpha} v \right\|_0^2 + \int\limits_0^t \left\| D_{0t}^{\alpha} v(x,\tau) \right\|_0^2 d\tau + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^1 v_x(x,\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \int\limits_0^{\tau} \frac{v_x\left(x,\tau_1\right) d\tau_1}{\left(\tau-\tau_1\right)^{\alpha}} dx +$$

$$+A\int\limits_0^t \|D_{0t}^{\alpha}v_x(x,\tau)\|_0^2\,d\tau \le \frac{1}{4\varepsilon}\|F\|_{2,Q_t}^2 + \varepsilon\int\limits_0^t \|D_{0t}^{\alpha}v(x,\tau)\|_0^2\,d\tau + \frac{A_1}{2}\|D_{0t}^{\alpha}v(x,0)\|_0^2.$$

Усилим последнее неравенство, учитывая неотрицательность интеграла, стоящего в левой части этого неравенства [2, с. 43], в результате получим

$$A_1\|D_{0t}^{\alpha}v\|_0^2 + 2A\|D_{0t}^{\alpha}v_x\|_{2,Q_t}^2 + 2\varepsilon_1\|D_{0t}^{\alpha}v\|_{2,Q_t}^2 \le \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_{2,Q_t}^2 + A_1\|\nu(x)\|_0^2,$$

где $\|D_{0t}^{\alpha}v\|_{2,Q_t}^2 = \int_0^t \|D_{0t}^{\alpha}v(x,t)\|_0^2\,d\tau$, $\varepsilon_1 = 1-\varepsilon$. Откуда следует оценка

$$\|D_{0t}^{\alpha}v\|_0^2 + \|D_{0t}^{\alpha}v_x\|_{2,Q_t}^2 + \|D_{0t}^{\alpha}v\|_{2,Q_t}^2 \le M(t)\left(\|F\|_{2,Q_t}^2 + \|\nu(x)\|_0^2\right)$$

или, возвращаясь к $u(x,t)$, получим (20).

Теорема доказана.

Замечание 1. *Из (20)следует единственность решения задачи (20), (5), (6).*

Действительно, пусть u – решение однородной задачи, т.е. $f=\tau=\nu=0$, тогда из (20) имеем

$$\|D_{0t}^{\alpha}u\|_0^2 + \|D_{0t}^{\alpha}u_x\|_{2,Q_t}^2 + \|D_{0t}^{\alpha}u\|_{2,Q_t}^2 = 0.$$

Применяя обобщенную формулу Ньютона – Лейбница [16, с. 15]:

$$D_{0t}^{-\alpha}D_{0t}^{\alpha}u(x,t) = u(x,t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t),$$

в частности, получим

$$u(x,t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x) = 0 \text{ в } Q_T.$$

Учитывая произвольность T, получаем что $u(x,t)\equiv 0$ во всех точках $(x,t)\in\ Q$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чудновский А.Ф. *Теплофизика почв.* М.: Наука. 1976. 352 с.
2. Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит. 2003. 272 с.
3. Керефов М.А. *Об одной краевой задаче для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной* // Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. акад. наук. Т. 4, № 1. 1999. С. 12–14.
4. Керефов М.А., Геккиева С.Х. *Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной в многомерной области* // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. Вып. 41, № 23 (220). 2015. С. 17–23.
5. Кулик В.Я. *Исследование движения почвенной влаги с точки зрения инвариантности относительно непрерывных групп преобразований* // В сб. «Исследование процессов обмена энергией и веществом в системе почва-растение-воздух». Л.: Наука. 1972.
6. Лафишева М.М., Керефов М.А., Дышекова Р.В. *Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера-Лыкова с нелокальным условием* // Владикавказский математический журнал. Т. 19, вып. 1. 2017. С. 50–58.
7. Геккиева С.Х. *Первая краевая задач для уравнения влагопереноса Аллера-Лыкова с дробной по времени производной* // Материалы Всероссийской конференции с международным участием «Устойчивое развитие: проблемы, концепции, модели». Нальчик. 2017. С. 99–102.
8. Геккиева С.Х. *Краевая задач для обобщенного уравнения переноса с дробной производной по времени* // Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. акад. наук. 1994. Т. 1, № 1. С. 17–18.
9. O.P. Agrawal *Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain* // Nonlinear Dynamics. 2002. Vol. 29. P. 145–155.

10. Нахушева В.А. *Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов.* М.: Наука. 2006. 173 с.
11. O.Kh. Masaeva, *Uniqueness of solutions to Dirichlet problems for generalized Lavrent'ev – Bitsadze equations with a fractional derivative* // Electron. J. Differential Eq. 2017. Vol. 2017. P. 1–8.
12. Шогенов В.Х., Кумыкова С.К., Шхануков-Лафишев М.Х. *Обобщенное уравнение переноса и дробные производные* // Докл. НАН Украины. № 12. 1997. С. 47–54.
13. Керефов М.А. Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Нальчик, 2000. 75 с.
14. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo *Theory and applications of fractional differential equations.* North-Holland Math. Stud., 204, Elsevier, Amsterdam, 2006.
15. Псху А.В. *Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка* // Матем. сб. Т. 202, № 4. 2011. С. 111–122.
16. Псху А.В. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука. 2005. 199 с.
17. Смирнов В.И. *Курс высшей математики.* Т. 2, СПб.: БХВ-Петербург. 2008. 848 с.
18. Джрбашян М.М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.* М.: Наука. 1966. 672 с.
19. Керефов М.А., Геккиева С.Х. *Первая краевая задача для неоднородного нелокального волнового уравнения* // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. № 4. 2016. С. 76–86.
20. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* М.: Наука. 1989. 616 с.

Сакинат Хасановна Геккиева,
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
ул. Шортанова, 89 А,
360000, г. Нальчик, Россия
E-mail: gekkieva_s@mail.ru

Марат Асланбиевич Керефов,
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
ул. Чернышевского, 173,
360004, г. Нальчик, Россия
E-mail: kerefov@mail.ru