ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 2 (2019). С. 83-98.

УДК 517.977

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА, ТЕРМИНАЛЬНАЯ ЧАСТЬ КОТОРОГО ЗАВИСИТ ОТ МЕДЛЕННЫХ И БЫСТРЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

А.Р. ДАНИЛИН, А.А. ШАБУРОВ

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества для одной линейной системы с быстрыми и медленными переменными в классе кусочно–непрерывных управлений с гладкими ограничениями на управление

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u, \quad t \in [0,T], \quad \|u\| \leqslant 1, \\ \varepsilon\dot{y}_\varepsilon = A_{22}y_\varepsilon + B_2u, \quad x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \quad \nabla\varphi_2(0) = 0, \\ J(u) := \varphi_1\left(x_\varepsilon(T)\right) + \varphi_2\left(y_\varepsilon(T)\right) + \int\limits_0^T \|u(t)\|^2\,dt \to \min, \end{cases}$$

где $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$; A_{ij}, B_i, $i,j = 1,2$ — постоянные матрицы соответствующей размерности, а $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемые на $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ строго выпуклые и кофинитные функции в смысле выпуклого анализа. В общем случае для такой задачи принцип максимума Понтрягина является необходимым и достаточным условием оптимальности и существуют единственные векторы l_ε и ρ_ε, определяющие оптимальное управление по формуле

$$u_\varepsilon(T-t) := \frac{C^*_{1,\varepsilon}(t)l_\varepsilon + C^*_{2,\varepsilon}(t)\rho_\varepsilon}{S\left(C^*_{1,\varepsilon}(t)l_\varepsilon + C^*_{2,\varepsilon}(t)\rho_\varepsilon\right)},$$

где

$$C^*_{1,\varepsilon}(t) := B^*_1 e^{A^*_{11}t} + \varepsilon^{-1}B^*_2\mathcal{W}^*_\varepsilon(t), \quad C^*_{2,\varepsilon}(t) := \varepsilon^{-1}B^*_2 e^{A^*_{22}t/\varepsilon},$$

$$\mathcal{W}_\varepsilon(t) := e^{A_{11}t}\int\limits_0^t e^{-A_{11}\tau}A_{12}e^{A_{22}\tau/\varepsilon}\,d\tau, \quad S(\xi) := \begin{cases} 2, & 0 \leqslant \xi \leqslant 2, \\ \xi, & \xi > 2. \end{cases}$$

Основное отличие статьи от ранее опубликованных работ по данной тематике заключается в том, что терминальная часть функционала качества зависит не только от медленных переменных, но и от быстрых переменных, а сама управляемая система имеет более общий вид. Доказано, что в случае конечного числа точек смены вида управления, начинающихся с постоянного знаменателя, можно построить асимптотику начального вектора сопряженного состояния $\lambda_\varepsilon = (l^*_\varepsilon\ \rho^*_\varepsilon)^*$, который определяет вид оптимального управления. Показано, что асимптотика имеет степенной характер.

A.R. Danilin, A.A. Shaburov, Asymptotic expansion of solution to singularly perturbed optimal control problem with a convex quality criterion whose terminal part depends on slow and fast variables.

Ключевые слова: оптимальное управление, сингулярно возмущенные задачи, асимптотическое разложение, малый параметр.

Mathematical Subject Classification: 49N05, 93C70

1. Введение

Статья посвящена исследованию асимптотики вектора сопряженного состояния в задаче оптимального управления [1, 2, 3] линейной системой с быстрыми и медленными переменными (см. обзор [4]), с интегральным выпуклым функционалом качества [3, Глава 3] и гладкими геометрическими ограничениями на управление.

В [5, 6] рассматривались проблемы, связанные с предельной задачей для задач оптимального управления линейной системой с быстрыми и медленными переменными. В других постановках асимптотика решений возмущенных задач управления рассматривалась в [7]–[9]. Отметим, что данный вид управляемой системы, но с терминальным критерием качества, зависящим только от медленных переменных, был рассмотрен в [8].

В данной работе получено полное асимптотическое разложение вектора сопряженной системы, определяющего оптимальное управление. Главной отличительной особенностью задачи от рассмотренной в [10] является зависимость терминальной части критерия управления не только от медленных переменных, но и от быстрых.

2. Постановка задачи и основные соотношения

В классе кусочно–непрерывных управлений рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u, \quad t\in[0,T], \quad \|u\|\leqslant 1, \\ \varepsilon\dot{y}_\varepsilon = A_{22}y_\varepsilon + B_2u, \quad x_\varepsilon(0)=x^0, \quad y_\varepsilon(0)=y^0, \quad \nabla\varphi_2(0)=0, \\ J(u):=\varphi_1\left(x_\varepsilon(T)\right)+\varphi_2\left(y_\varepsilon(T)\right)+\int\limits_0^T\|u(t)\|^2\,dt\to\min, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_\varepsilon\in\mathbb{R}^n$, $y_\varepsilon\in\mathbb{R}^m$, $u\in\mathbb{R}^r$; A_{ij}, B_i, i, $j=1,2$ — постоянные матрицы соответствующей размерности, а $\varphi_1(\cdot)$, $\varphi_2(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемые на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, соответственно, строго выпуклые и кофинитные функции в смысле выпуклого анализа [11, § 13]. Все пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^r$ рассматриваются с евклидовой нормой, которая обозначается одинаково: $\|\cdot\|$.

Отметим, что терминальная часть функционала качества зависит от медленных и быстрых переменных.

При каждом фиксированном $\varepsilon>0$ управляемая система и функционал качества из задачи (1) имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{z}_\varepsilon=\mathcal{A}_\varepsilon z_\varepsilon+\mathcal{B}_\varepsilon u, & t\in[0,T], \\ z_\varepsilon(0)=z^0, & \|u\|\leqslant 1, \\ J(u):=\varphi\left(z_\varepsilon(T)\right)+\int\limits_0^T\|u(t)\|^2\,dt\to\min, \end{cases}$$

где

$$z_\varepsilon(t)=\begin{pmatrix} x_\varepsilon(t) \\ y_\varepsilon(t)\end{pmatrix}, \quad z_\varepsilon(0):=z^0=\begin{pmatrix} x^0 \\ y^0\end{pmatrix}, \quad \varphi\left(z_\varepsilon(T)\right):=\varphi_1\left(x_\varepsilon(T)\right)+\varphi_2\left(y_\varepsilon(T)\right),$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & \varepsilon^{-1}A_{22}\end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon=\begin{pmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2\end{pmatrix}.$$

Отметим, что в рассматриваемом интегральном выпуклом критерии качества J терминальную часть можно интерпретировать как штраф за ошибку управления в конечный момент времени T, а второе — как учет энергозатрат на реализацию управления.

Мы будем говорить, что пара матриц (A, B) вполне управляема, если вполне управляема система $\dot{x} = Ax + Bu$.

Предположение 1. *При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ пара $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ вполне управляема, т.е. $rank\big(\mathcal{B}_\varepsilon, \mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{B}_\varepsilon, \ldots, \mathcal{A}_\varepsilon^{n+m-1}\mathcal{B}_\varepsilon\big) = n + m$.*

Предположение 2. *Все собственные значения матрицы A_{22} имеют отрицательные вещественные части.*

При выполнении предположения 1 принцип максимума Понтрягина есть необходимое и достаточное условие оптимальности, которое дает единственное решение задачи (1) [3, п. 3.5, теорема 14].

Как доказано в [10, Утверждение 1 и формула (1.6)] функция $u_\varepsilon(t)$ — единственное оптимальное управление в задаче (1), имеет вид:

$$u_\varepsilon(T-t) := \frac{\mathcal{B}_\varepsilon{}^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* t}\lambda_\varepsilon}{S\left(\|\mathcal{B}_\varepsilon{}^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* t}\lambda_\varepsilon\|\right)}, \quad S(\xi) := \begin{cases} 2, & 0 \leqslant \xi \leqslant 2, \\ \xi, & \xi > 2, \end{cases} \tag{2}$$

а вектор λ_ε есть единственное (с учетом кофинитности функции φ — [11, Теорема 26.6]) решение уравнения

$$\nabla\varphi^*(-\lambda) = e^{\mathcal{A}_\varepsilon T}z^0 + \int\limits_0^T e^{\mathcal{A}_\varepsilon \tau}\mathcal{B}_\varepsilon \frac{\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* \tau}\lambda}{S\big(\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*\tau}\lambda\|\big)}\,d\tau. \tag{3}$$

Здесь $\nabla\varphi^*$ — градиент функции φ^*, сопряженной к функции φ в смысле выпуклого анализа (см. [11, § 12]).

Отметим, что в рассмотренном случае

$$\varphi^*(\lambda) = \varphi_1^*(l) + \varphi_2^*(\rho) \ \text{ и } \ \nabla\varphi_2^*(0) = 0. \tag{4}$$

Вектор λ_ε, определяющий оптимальное управление в задаче (1), будем рассматривать в виде $\lambda_\varepsilon = \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ \rho_\varepsilon \end{pmatrix}$, где $l_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $\rho_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$.

Непосредственным вычислением матричной экспоненты управляемой системы из задачи (1) получаем

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} := \begin{pmatrix} e^{A_{11}t} & \mathcal{W}_\varepsilon(t) \\ 0 & e^{A_{22}t/\varepsilon} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $\mathcal{W}_\varepsilon'(t) = A_{11}\mathcal{W}_\varepsilon(t) + A_{12}e^{A_{22}t/\varepsilon}$ и $\mathcal{W}_\varepsilon(0) = 0$. Поэтому

$$\mathcal{W}_\varepsilon(t) := e^{A_{11}t}\int\limits_0^t e^{-A_{11}\tau}A_{12}e^{A_{22}\tau/\varepsilon}\,d\tau. \tag{6}$$

Интегрируя в правой части равенства (6) по частям один раз, получим

$$\mathcal{W}_\varepsilon(t) = \varepsilon\Big(A_{12}e^{A_{22}t/\varepsilon} - e^{A_{11}t}A_{12}\Big)A_{22}^{-1} + \varepsilon A_{11}\mathcal{W}_\varepsilon(t)A_{22}^{-1},$$

откуда, в силу ограниченности $A_{12}e^{A_{22}t/\varepsilon} - e^{A_{11}t}A_{12}$ на $[0, T]$

$$\mathcal{W}_\varepsilon(t) = \varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k A_{11}^k\Big(A_{12}e^{A_{22}t/\varepsilon} - e^{A_{11}t}A_{12}\Big)A_{22}^{-(k+1)}. \tag{7}$$

Будем использовать следующее обозначение:

$$C_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} C_{1,\varepsilon}(t) \\ C_{2,\varepsilon}(t) \end{pmatrix} := e^{\mathcal{A}_\varepsilon t}\mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} e^{A_{11}t}B_1 + \varepsilon^{-1}\mathcal{W}_\varepsilon(t)B_2 \\ \varepsilon^{-1}e^{A_{22}t/\varepsilon}B_2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Согласно равенству (4) и обозначению (8) уравнение (3) переходит в систему уравнений

$$\begin{cases} \nabla\varphi_1^*(-l_\varepsilon) = e^{A_{11}T}x^0 + \mathcal{W}_\varepsilon(T)y^0 + \int\limits_0^T C_{1,\varepsilon}(t)u_\varepsilon(T-t)\,dt, \\ \nabla\varphi_2^*(-\rho_\varepsilon) = e^{A_{22}T/\varepsilon}y^0 + \int\limits_0^T C_{2,\varepsilon}(t)u_\varepsilon(T-t)\,dt, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$u_\varepsilon(T-t) := \frac{C_{1,\varepsilon}^*(t)l_\varepsilon + C_{2,\varepsilon}^*(t)\rho_\varepsilon}{S\left(\|C_{1,\varepsilon}^*(t)l_\varepsilon + C_{2,\varepsilon}^*(t)\rho_\varepsilon\|\right)}. \tag{10}$$

Определение 1. *Предельной задачей для задачи* (1) *называется задача*

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = A_0x_0 + B_0u, \qquad t\in[0,T], \qquad \|u\|\leqslant 1, \\ A_0 := A_{11}, \qquad B_0 := B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2, \qquad x_0(0) = x^0, \\ J_0(u) := \varphi_1(x_0(T)) + \int\limits_0^T \|u(t)\|^2\,dt \to \min. \end{cases}$$

Предположение 3. *Пары матриц* (A_0, B_0), (A_{22}, B_2) *вполне управляемы.*

В силу [5] выполнение предположений 2 и 3 являются достаточными условиями выполнения предположения 1 при всех достаточно малых ε.

Из формул (5), (7) и (8) следует, что справедливы асимптотические формулы

$$C_{1,\varepsilon}(t) = C_{1,0}(t) + A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}t/\varepsilon}B_2 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon\to 0, \quad C_{1,0}(t) := e^{A_0t}B_0, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}C_{1,\varepsilon}(t) = \frac{d}{dt}C_{1,0}(t) &+ \varepsilon^{-1}A_{12}e^{A_{22}t/\varepsilon}B_2 \\ &+ A_{11}A_{12}e^{A_{22}t/\varepsilon}A_{22}^{-1}B_2 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon\to 0 \end{aligned} \tag{12}$$

равномерно на отрезке $[0,T]$.

Отметим известный факт, что при выполнении предположения 2 существуют $\gamma > 0$ и $K > 0$ такие, что

$$\|e^{A_{22}t/\varepsilon}\| \leqslant Ke^{-\gamma t/\varepsilon}. \tag{13}$$

Если вектор-функция $f_\varepsilon(t)$ такова, что $f_\varepsilon(t) = O(\varepsilon^\alpha)$ при $\varepsilon\to 0$ для любого $\alpha > 0$ равномерно по $t\in[a,b]$, то вместо $f_\varepsilon(t)$ будем писать $\mathbb{O}$. В частности,

$$\|e^{A_{22}t/\varepsilon}\| = \mathbb{O}, \quad e^{-\gamma t/\varepsilon} = \mathbb{O} \ \text{ при } \ t\in[\varepsilon^p, T],\ p\in(0,1), \tag{14}$$

где $\gamma > 0$.

Из формул (11), (12) и оценки (13) следует, что существуют $K_1 > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ и $t\in[\sqrt{\varepsilon}, T]$ справедливы неравенства

$$\|C_{1,\varepsilon}^*(t) - C_{1,0}^*(t)\| \leqslant K_1\varepsilon, \quad \left\|\frac{\partial}{\partial t}C_{1,\varepsilon}^*(t) - \frac{d}{dt}C_{1,0}^*(t)\right\| \leqslant K_1\varepsilon. \tag{15}$$

3. Некоторые вспомогательные утверждения о кофинитных функциях

Согласно [11, теорема 26.6], если f — дифференцируемая, строго выпуклая кофинитная функция на R^n, то $\nabla f : R^n \to R^n$ — взаимно-однозначное отображение на R^n, а также f^* — дифференцируемая, строго выпуклая кофинитная функция на R^n.

Лемма 1. *Пусть f — дифференцируемая, строго выпуклая кофинитная функция на R^n, $\mathbb{L}$ — неотрицательный линейный оператор в $\mathbb{R}^n$, т. е.*

$$\forall\, l \in \mathbb{R}^n \ \langle \mathbb{L}l, l\rangle \geqslant 0.$$

Тогда функция $g(l) = f(l) + \frac{1}{2}\langle \mathbb{L}l, l\rangle$ — дифференцируемая, строго выпуклая, кофинитная функция на R^n. При этом $\nabla g(l) = \nabla f(l) + \mathbb{L}l$.

Доказательство. Сначала докажем, что функция $g(l)$ — дифференцируемая, строго выпуклая функция на R^n.

Вычислив производную по направлению Δl скалярного произведения $\frac{1}{2}\langle \mathbb{L}l, l\rangle$:

$$D\left(\frac{1}{2}\langle \mathbb{L}l, l\rangle\right)(\Delta l) = \frac{\partial}{\partial l}\bigg|_{t=0} \frac{\langle \mathbb{L}(l + t\Delta l), l + t\Delta l\rangle}{2} = \langle \mathbb{L}l, \Delta l\rangle,$$

получим, что $\nabla\left(\frac{1}{2}\langle \mathbb{L}l, l\rangle\right) = \mathbb{L}l$.

Согласно определению [11, стр. 276] — выпуклая функция f является кофинитной, если справедливо следующее соотношение:

$$\forall\, l \neq 0 \quad \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{f(\lambda l)}{\lambda} = +\infty. \tag{16}$$

Покажем, что функция $g(l)$ удовлетворяет условию (16).

Для любого $\lambda > 0$:

$$\frac{g(\lambda l)}{\lambda} = \frac{f(\lambda l)}{\lambda} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\langle \mathbb{L}(\lambda l), \lambda l\rangle}{\lambda} = \frac{f(\lambda l)}{\lambda} + \frac{\lambda}{2} \cdot \langle \mathbb{L}l, l\rangle$$
$$\geqslant \frac{f(\lambda l)}{\lambda} \to +\infty \text{ при } \lambda \to +\infty.$$

□

Следствие 1. *Пусть функция f удовлетворяет условиям леммы 1, а f^* — сопряженная функция к функции f в смысле выпуклого анализа. Тогда уравнение $\nabla f^*(l) + \mathbb{L}l = d$ имеет единственное решение для любого вектора d.*

Доказательство. Справедливость данного следствия вытекает из леммы 1 и теоремы 26.6 из [11].

4. Предельные значения векторов l_ε и ρ_ε

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения 1 и 2 и вектор $\lambda_\varepsilon^* = (l_\varepsilon^* \quad \rho_\varepsilon^*)$ — единственное решение системы (9). Тогда векторы l_ε, ρ_ε ограничены и*

$$l_\varepsilon \to l_0 \text{ при } \varepsilon \to +0, \tag{17}$$

где l_0 – единственное решение уравнения

$$0 = -\nabla\varphi_1^*(-l) + e^{A_{11}T}x^0 + \int_0^T C_{1,0}(t)\frac{C_{1,0}^*(t)l}{S\left(\left\|C_{1,0}^*(t)l\right\|\right)}dt. \tag{18}$$

Доказательство. Известно, что множество достижимости управляемой системы из задачи (1) к моменту времени T равномерно ограничено при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ (см., например, [6, теорема 3.1]). Таким образом, левая часть уравнения (3) ограничена. Поэтому при $\varepsilon \to 0$ ограничена и величина $\nabla\varphi^*(-\lambda_\varepsilon)$. Поскольку функция φ^* кофинитная, то согласно [11, лемма 26.7] вектор λ_ε ограничен. Следовательно, векторы l_ε, ρ_ε ограничены.

Разобъем отрезок интегрирования в первом равенстве из (9) на два: $[0, \sqrt{\varepsilon}]$ и $[\sqrt{\varepsilon}, T]$. Учитывая равенство (6) и обозначение (8) — представление матриц $\mathcal{W}_\varepsilon(t)$ и $C_\varepsilon(t)$ из системы (9)–(10), первое равенство из (9) можно записать в виде

$$\nabla\varphi_1^*(-l_\varepsilon) = e^{A_{11}T}x^0 + O(\sqrt{\varepsilon}) + \int\limits_{\sqrt{\varepsilon}}^{T} C_{1,\varepsilon}(t)\frac{C_{1,\varepsilon}^*(t)l_\varepsilon}{S\|C_{1,\varepsilon}^*(t)l_\varepsilon\|}dt \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{19}$$

Пусть l_0 — произвольная предельная точка функции l_ε при $\varepsilon \to 0$. В силу неравенств (15), переходя в равенстве (19) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получается равенство

$$\nabla\varphi_1^*(-l_0) = e^{A_{11}T}x^0 + \int\limits_0^T C_{1,0}(t)\frac{C_{1,0}^*(t)l_0}{S\|C_{1,0}^*(t)l_0\|}dt,$$

т.е. l_0 удовлетворяет уравнению (18). Это уравнение имеет вид

$$\nabla\varphi_1^*(-l_0) + \mathbb{L}(-l_0) = e^{A_{11}T}x^0$$

и $\mathbb{L} \geqslant 0$. Поэтому, в силу следствия 1 из леммы 1, это уравнение имеет единственное решение.

Тем самым l_0 — единственная предельная точка для l_ε, и поэтому $l_\varepsilon \to l_0$ при $\varepsilon \to 0$. □

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *а* B_2 *есть отображение* $\mathbb{R}^r$ *на все* $\mathbb{R}^m$ (*в частности* $r \geqslant m$). *Тогда* $\rho_\varepsilon \to 0$, *величина* $\{r_\varepsilon\}$ ($r_\varepsilon := \varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon$) *ограничена при* $\varepsilon \to +0$ *и все ее предельные точки* r_0 *удовлетворяют уравнению*

$$0 = \int\limits_0^{+\infty} e^{A_{22}\tau}B_2\frac{B_0^*l_0 + B_2^*e^{A_{22}^*\tau}(r_0 + (A_{22}^*)^{-1}A_{12}^*l_0)}{S\left(\|B_0^*l_0 + B_2^*e^{A_{22}^*\tau}(r_0 + (A_{22}^*)^{-1}A_{12}^*l_0)\|\right)}\,d\tau. \tag{20}$$

Доказательство. В интеграле из второго равенства системы (9) сделаем замену переменной $\tau := t/\varepsilon$. Возьмем произвольное $\delta > 0$. Учитывая оценку (13), перепишем данное равенство в виде

$$\nabla\varphi_2^*(-\rho_\varepsilon) = \mathbb{O} + \int\limits_0^{\delta} e^{A_{22}\tau}B_2\frac{\tilde{B}(\tau,\varepsilon)l_\varepsilon + B_2^*e^{A_{22}^*\tau}r_\varepsilon}{S\left(\|\tilde{B}(\tau,\varepsilon)l_\varepsilon + B_2^*e^{A_{22}^*\tau}r_\varepsilon\|\right)}\,d\tau + O(e^{-\gamma\delta}), \tag{21}$$

где $r_\varepsilon := \rho_\varepsilon/\varepsilon$, а

$$\tilde{B}(\tau,\varepsilon) := B_0^*e^{A_{11}^*\varepsilon\tau} + B_2^*e^{A_{22}^*\tau}(A_{22}^*)^{-1}A_{12}^*. \tag{22}$$

Отметим, что $\tilde{B}(\tau,\varepsilon)l_\varepsilon \to \tilde{B}(\tau,0)l_0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно на $[0,\delta]$, и $\tilde{B}(\tau,0)$ ограничена на $[0,+\infty)$.

Пусть ρ_0 — произвольная предельная точка ρ_ε при $\varepsilon \to 0$, т.е. существует $\{\varepsilon_k\}$ такая, что $\varepsilon_k \to 0$ и $\rho_k := \rho_{\varepsilon_k} \to \rho_0$.

Предположим, что $r_k := r_{\varepsilon_k}$ неограничена. Не ограничивая общности можно считать, что

$$r_k \to \infty, \quad \frac{r_k}{\|r_k\|} \to \bar{r}, \quad \|\bar{r}\| = 1, \quad \rho_0 = \|\rho_0\|\bar{r}. \tag{23}$$

Поскольку функция $B_2^* e^{A_{22}^* \tau} r$ непрерывна в совокупности по переменной τ и вектору r, а при $r \neq 0$ в силу инъективности B_2^* выражение $B_2^* e^{A_{22}^* \tau} r \neq 0$, то найдется $K_0(\delta) > 0$ такая, что

$$\forall r \quad \forall \tau \in [0, \delta]: \|B_2^* e^{A_{22}^* \tau} r\| \geqslant K_0(\delta) \|r\|.$$

Поэтому в силу соотношений (23) при всех достаточно больших k будет справедливо неравенство

$$\left\| C_{1,\varepsilon_k}^* (\varepsilon \tau) l_{\varepsilon_k} + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} r_k \right\| > 2,$$

и, тем самым, равенство (21) примет вид

$$\nabla \varphi_2^*(-\rho_k) = \int\limits_0^\delta e^{A_{22} \tau} B_2 \frac{\frac{1}{\|r_k\|} \tilde{B}(\tau, \varepsilon_k) l_k + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} \frac{r_k}{\|r_k\|}}{\left\| \frac{1}{\|r_k\|} \tilde{B}(\tau, \varepsilon_k) l_k + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} \frac{r_k}{\|r_k\|} \right\|} \, d\tau + \mathbb{O} + O(e^{-\gamma \delta}). \tag{24}$$

Переходя в равенстве (24) сначала к пределу по k, а затем к пределу по $\delta \to +\infty$, с учетом соотношений (23) получим равенство

$$\nabla \varphi_2^*(-\|\rho_0\| \overline{r}) = \int\limits_0^{+\infty} e^{A_{22} \tau} B_2 \frac{B_2^* e^{A_{22}^* \tau} \overline{r}}{\|B_2^* e^{A_{22}^* \tau} \overline{r}\|} \, d\tau.$$

Умножив последнее уравнение скалярно на $\overline{r}$, получим

$$\langle \nabla \varphi_2^*(-\|\rho_0\| \overline{r}), \overline{r} \rangle = \int\limits_0^{+\infty} \left\| B_2^* e^{A_{22}^* \tau} \overline{r} \right\| \, d\tau. \tag{25}$$

Правая часть равенства (25) в силу предположения 3 положительна, а левая часть в силу монотонности $\nabla \varphi_2^*$ и равенства $\nabla \varphi_2^*(0) = 0$ неположительна, что противоречиво. Таким образом $\rho_\varepsilon \to 0$. При этом если r_ε неограничена, то, повторяя предыдущие выкладки, придем к противоречивому равенству, аналогичному (25)

$$0 = \int\limits_0^{+\infty} \left\| B_2^* e^{A_{22}^* \tau} \overline{r} \right\| \, d\tau.$$

Наконец, если r_0 — предельная точка r_ε, то, переходя в (21) сначала к пределу по $\varepsilon \to 0$, а затем к пределу по $\delta \to +\infty$, с учетом обозначения (22) получим равенство (20). $\square$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда уравнение* (20) *имеет единственное решение* r_0 *и* $r_\varepsilon \to r_0$.

Доказательство. Введем обозначения: $l := B_0^* l_0$, $r := r_0 + (A_{22}^*)^{-1} A_{12}^* l_0$. Тогда уравнение (20) примет вид

$$F(r) := \int\limits_0^{+\infty} e^{A_{22} \tau} B_2 \frac{l + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} r}{S\left(\|l + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} r\|\right)} \, d\tau = 0. \tag{26}$$

Если $l = 0$, то после умножения равенства (26) на r, получим

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\|B_2^* e^{A_{22}^* \tau} r\|^2}{S\left(\|B_2^* e^{A_{22}^* \tau} r\|\right)} \, d\tau = 0.$$

Поскольку подынтегральное выражение непрерывно и неотрицательно, то $\|B_2^* e^{A_{22}^* \tau} r\| \equiv 0$ и, тем самым, в силу предположения 3, $r = 0$.

Пусть теперь $l \neq 0$.

Предположим, что существуют два различных решения $r_1 \neq r_2$ уравнения (26): $F(r_1) = F(r_2) = 0$. Применим формулу конечных приращений Лагранжа:

$$0 = \langle F(r_1) - F(r_2), r_1 - r_2 \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial r} F(r)\Big|_{r=r'} (r_1 - r_2), r_1 - r_2 \right\rangle, \tag{27}$$

где $r' \in [r_1, r_2]$. Покажем, что при $r_1 \neq r_2$ равенство (27) невозможно.

Перепишем интеграл из (26) в виде суммы двух интегралов по двум множествам

$$E_1(r) := \{\tau \in [0, +\infty) : \|l + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} r\| \leqslant 2\},$$

$$E_2(r) := \{\tau \in [0, +\infty) : \|l + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} r\| \geqslant 2\}.$$

Тогда интеграл в правой части уравнения (26) разбивается на два интеграла:

$$F(r) = \int\limits_{E_1(r)} e^{A_{22}\tau} B_2 \frac{l + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} r}{2}\, d\tau + \int\limits_{E_2(r)} e^{A_{22}\tau} B_2 \frac{l + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} r}{\|l + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} r\|}\, d\tau. \tag{28}$$

Учитывая, что $B_2^* e^{A_{22}^* \tau} r \to 0$ при $\tau \to +\infty$, множества $E_1(r)$ и $E_2(r)$ состоят из конечного числа промежутков.

Найдем $DF(r')(\Delta r)$ — производную функции F в точке r' по направлению Δr, используя представление (28) и известную формулу

$$D\left(\int\limits_{\alpha(r)}^{\beta(r)} f(t, r)dt\right)(\Delta r) = \int\limits_{\alpha(r)}^{\beta(r)} \frac{\partial f(t, r)}{\partial r}(\Delta r)dt +$$

$$+ f(\beta(r), r)\frac{\partial \beta}{\partial r}(\Delta r) - f(\alpha(r), r)\frac{\partial \alpha}{\partial r}(\Delta r).$$

Поскольку в общих точках из $E_1(r)$ и $E_2(r)$ значения подынтегральных функций равны, то в итоговой формуле для DF не будет внеинтегральных слагаемых.

Так как

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(e^{A_{22}\tau} B_2 \frac{l + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} r}{2}\right)(\Delta r) = C(\tau)\frac{C^*(\tau)\Delta r}{2}, \quad C(\tau) := e^{A_{22}\tau} B_2,$$

а

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(e^{A_{22}\tau} B_2 \frac{l + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} r}{\|l + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} r\|}\right)$$

$$= C(\tau)\frac{C^*(\tau)\Delta r \|l + C^*(\tau) r\|^2 - \langle C^*(\tau)\Delta r, l + C^*(\tau) r\rangle (l + C^*(\tau) r)}{\|l + C^*(\tau) r\|^3},$$

то

$$DF(r')(\Delta r) = DF_1(r')(\Delta r) + DF_2(r')(\Delta r),$$

$$DF_1(r')(\Delta r) = \frac{1}{2}\int\limits_{E_1(r')} e^{A_{22}\tau} B_2 B_2^* e^{A_{22}^* \tau} \Delta r\, d\tau, \tag{29}$$

$$DF_2(r')(\Delta r)$$

$$= \int\limits_{E_2(r')} C(\tau)\frac{C^*(\tau)\Delta r \|l + C^*(\tau) r\|^2 - \langle C^*(\tau)\Delta r, l + C^*(\tau) r\rangle (l + C^*(\tau) r)}{\|l + C^*(\tau) r\|^3} d\tau.$$

Если $E_1(r') \neq \emptyset$, то в силу последнего равенства из соотношений (29) следует, что $DF_1(r') > 0$. В силу неравенства Коши-Буняковского из соотношений (29) следует, что $DF_2(r') \geqslant 0$. Поэтому, если $E_1(r') \neq \emptyset$, то $DF(r') > 0$ и равенство (27) возможно лишь при $\Delta r = r_1 - r_2 = 0$.

Таким образом, поскольку $\Delta r \neq 0$, то из равенства (27) следует, что

$$E_1(r') = \emptyset$$

и (в силу неравенства Коши-Буняковского) при всех τ

$$\text{вектор } l + B_2^* e^{A_{22}^*\tau} r' \text{ параллелен вектору } B_2^* e^{A_{22}^*\tau}\Delta r.$$

Равенство $E_1(r') = \emptyset$ означает, что

$$\forall\,\tau \quad \|l_1 + e^{A_{22}^*\tau} r'\| \geqslant 2. \tag{30}$$

В силу условий доказываемой теоремы $B_2^* e^{A_{22}^*\tau}\Delta r \neq 0$. Тем самым существует такая функция $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что

$$\forall\,\tau \quad l + B_2^* e^{A_{22}^*\tau} r' = \beta(\tau) B_2^* e^{A_{22}^*\tau}\Delta r.$$

При этом с необходимостью l имеет вид $B_2^* l_1$. Тем самым, если $l \notin Im(B_2^*)$, то равенство (27) невозможно.

В силу инъективности оператора B_2^* получим, что

$$\forall\,\tau \quad l_1 + e^{A_{22}^*\tau} r' = \beta(\tau) e^{A_{22}^*\tau}\Delta r. \tag{31}$$

Умножив тождество (31) на $e^{-A_{22}^*\tau}$, получим, что

$$e^{-A_{22}^*\tau} l_1 + r' = \beta(\tau)\Delta r \tag{32}$$

и, тем самым, функция $\beta(\tau)$ бесконечно дифференцируема. Продифференцировав равенство (32) по τ два раза, получим:

$$-A_{22}^* e^{-A_{22}^*\tau} l_1 = \beta'(\tau)\Delta r, \quad (A_{22}^*)^2 e^{-A_{22}^*\tau} l_1 = \beta''(\tau)\Delta r.$$

что при $\tau = 0$ дает равенства

$$-A_{22}^* l_1 = \beta'(0)\Delta r, \quad (A_{22}^*)^2 l_1 = \beta''(0)\Delta r. \tag{33}$$

Если $\beta'(0) = 0$ или $\beta''(0) = 0$, то и $l_1 = 0$, что противоречит условию теоремы.

Из равенства (33) следует, что $\beta''(0)\Delta r = (A_{22}^*)^2 l_1 = -A_{22}^*\beta'(0)\Delta r$, т.е. вектор Δr — собственный вектор матрицы A_{22}^*. Тем самым

$$A_{22}^*\Delta r = -\alpha\Delta r, \quad \alpha > 0, \tag{34}$$

где $\alpha = \beta''(0)/\beta'(0)$ — собственное значение матрицы A_{22}^*.

Опять, если у матрицы A_{22}^* нет вещественных собственных чисел, то равенство (27) невозможно.

Из равенств (33) и (34) следует, что вектор l_1 параллелен вектору Δr. Поэтому в силу равенства (32) и r' параллелен вектору l_1. В силу того, что $r' = r_1 - \beta_0\Delta r$ при некотором β_0, то отсюда следует, что и вектора r_1, r_2 параллельны вектору l_1.

Итак, в этом случае

$$r_1 = \beta_1 l_1, \quad r_2 = \beta_1 l_2, \quad r' = \beta_3 l_1.$$

и равенство (26), справедливое при r_i, $i = 1, 2$ после умножения скалярно на l_1, примет вид

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\big(1 + \beta_i e^{-\alpha\tau}\big) e^{-\alpha\tau} \|B_2^* l_1\|^2}{S\Big(\big|1 + \beta_i e^{-\alpha\tau}\big| \cdot \|B_2^* l_1\|\Big)}\, d\tau = 0, \quad i = 1, 2. \tag{35}$$

Равенство (35) невозможно, если $1 + \beta_i e^{-\alpha\tau}$ не меняет знака на $[0, +\infty)$.

В силу того, что $e^{-\alpha\tau}$ строго убывает и $e^{-\alpha\tau} \to 0$ при $\tau \to +\infty$, получим, что $\beta_i < -1$, $i = 1, 2$. Отсюда в силу соотношения $r' \in [r_1, r_2]$ следует, что и $\beta_3 < -1$. Но тогда существует $\tau_0 > 0$ такое, что $\left|1 + \beta_3 e^{-\alpha\tau_0}\right| \cdot \|B_2^* l_1\| = 0$, а это противоречит неравенству (30). □

В дальнейшем считаем, что

$$r = m, \quad A_{22} = -I, \quad B_2 = I. \tag{36}$$

Здесь I — тождественное отображение $\mathbb{R}^m$ на $\mathbb{R}^m$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (36) *и условия теоремы* 1. *Тогда*

$$r_\varepsilon \to r_0 = A_{12}^* l_0 - 2B_0^* l_0 \quad \text{\textit{при}} \quad \varepsilon \to 0.$$

Доказательство. При выполнении (36) уравнение (20) примет вид

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\tau} \frac{l + e^{-\tau} r}{S\left(\|l + e^{-\tau} r\|\right)}\, d\tau = 0, \tag{37}$$

где $l := B_0^* l_0$, $r := r_0 + (A_{22}^*)^{-1} A_{12}^* l_0$.

В силу теоремы 3 достаточно проверить, что вектор $(-2l)$ является его решением. Подставив $r = -2l$ в левую часть уравнения (37), получим

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\tau} \frac{\left(1 - 2e^{-\tau}\right) l}{S\Big(\left|1 - 2e^{-\tau}\right| \cdot \|l\|\Big)}\, d\tau = \Big[\xi = e^{-\tau}\Big] = \int\limits_0^1 \frac{(1 - 2\xi)}{S\Big(|1 - 2\xi| \cdot \|l\|\Big)}\, d\xi\, l = \Big[\eta = 1 - 2\xi\Big]$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\eta}{S\big(|\eta| \cdot \|l\|\big)}\, d\eta\, l = 0,$$

поскольку подынтегральная функция нечетна. □

5. Асимптотическое разложение вектора λ_ε при выполнении условий (36)

Отметим, что в силу условий (36)

$$B_0 = B_1 + A_{12}, \quad r_0 = \big(A_{12}^* - 2B_0^*\big) l_0, \tag{38}$$

$$C_{1,\varepsilon}^*(t) = B_1^* e^{A_{11}^* t} + A_{12}^* \Big(e^{A_{11}^* t} - e^{-t/\varepsilon} I\Big) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k (A_{11}^*)^k. \tag{39}$$

Из равенств (38) и (39) следует, что

$$\begin{gathered} C_\varepsilon^*(t)\lambda_\varepsilon = C_{1,0}^*(t) l_0 + C_{1,0}^* \Delta l - \varepsilon A_{12}^* e^{A_{11}^* t} A_{11}^* l_0 - \\ - 2e^{-t/\varepsilon} B_0^* l_0 - A_{12}^* e^{-t/\varepsilon} \Delta l + \varepsilon A_{12}^* e^{-t/\varepsilon} A_{11}^* l_0 + e^{-t/\varepsilon} \Delta r + \mathcal{F}_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta r). \end{gathered} \tag{40}$$

Здесь $\Delta l := l_\varepsilon - l_0$, $\Delta r := r_\varepsilon - r_0$, а $\mathcal{F}_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta r)$ — функция второго порядка малости по $\{\varepsilon, \Delta l, \Delta r\}$.

Сначала рассмотрим случай, когда у предельной задачи есть только одна точка смены вида оптимального управления.

Пусть для предельной задачи и начального состояния системы x^0 существует единственный момент времени $t = t_0 \in (0, T)$ такой, что:

$$\forall\, t < t_0\ \|C^*_{1,0}(t)l_0\| < 2;\ \|C^*_{1,0}(t_0)l_0\| = 2;\ \forall\, t > t_0\ \|C^*_{1,0}(t)l_0\| > 2;$$
$$\frac{d}{dt}\|C^*_{1,0}(t)l_0\|^2\Big|_{t=t_0} \neq 0. \tag{41}$$

Лемма 3. *Если выполнено условие*

$$\|B^*_0 l_0\| < 2, \tag{42}$$

то

$$\forall\, l_\varepsilon \to l_0\ \forall\, r_\varepsilon \to \big(A^*_{12} - 2B^*_0\big)l_0\ \exists\, \varepsilon_0 > 0\ \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\ \forall\, t \in [0, \sqrt{\varepsilon}]\ \|C^*_\varepsilon(t)\lambda_\varepsilon\| < 2. \tag{43}$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся последовательности $\{t_k\} \subset [0, \sqrt{\varepsilon}]$ и $\{\varepsilon_k\}$ такие, что $\varepsilon_k \to +0$ и

$$\|C^*_{\varepsilon_k}(t_k)\lambda_{\varepsilon_k}\| \geqslant 2. \tag{44}$$

Положим $\tau_k := t_k/\varepsilon_k$, $l_k := l_{\varepsilon_k}$, $r_k := r_{\varepsilon_k}$ и $\lambda_k := \lambda_{\varepsilon_k}$. Тогда в силу равенства (40)

$$C^*_{\varepsilon_k}(t_k)\lambda_{\varepsilon_k} = C^*_{1,0}(\varepsilon_k\tau_k)l_0 - 2e^{-\tau_k}B^*_0 l_0 + \mathcal{F}_1(\varepsilon_k, \Delta l_k, \Delta r_k), \tag{45}$$

$\Delta l_k := l_k - l_0$, $\Delta r_k := r_k - r_0$ и $\mathcal{F}_1(\varepsilon_k, \Delta l_k, \Delta r_k) \to 0$.

Пусть τ_0 — какая-нибудь предельная точка последовательности $\{\tau_k\}$ (для сокращения записи считаем, что $\tau_k \to \tau_0$). Если $\tau_0 = +\infty$, то, переходя в равенстве (45) к пределу при $k \to \infty$ и учитывая, что $l_k \to l_0$, $r_k \to (A^*_{12} - 2B^*_0)l_0$, получим $C^*_{\varepsilon_k}(\varepsilon_k\tau_k)\lambda_k \to B^*_0 l_0$. Но $\|B^*_0 l_0\| < 2$ в силу предположения (41), что противоречит условию (44). Таким образом, все предельные точки τ_0 конечны. Тогда $\varepsilon_k\tau_n \to 0$, и поэтому $C^*_{\varepsilon_k}(\varepsilon_k\tau_k)\lambda_k \to \big(1 - 2e^{-\tau_0}\big)B^*_0 l_0$. Но

$$\Big\|\big(1 - 2e^{-\tau_0}\big)B^*_0 l_0\Big\| = \big|1 - 2e^{-\tau_0}\big| \cdot \|B^*_0 l_0\| \leqslant \|B^*_0 l_0\| < 2,$$

что противоречит условию (44). □

Теорема 4. *При выполнении условия* (42) *существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *существует единственная точка* t_ε *смены вида оптимального управления в задаче* (1), *т.е.*

$$\forall\, t < t_\varepsilon\ \|C^*_\varepsilon(t)\lambda_\varepsilon\| < 2;\ \|C^*_\varepsilon(t_\varepsilon)\lambda_\varepsilon\| = 2;\ \forall\, t > t_\varepsilon\ \|C^*_\varepsilon(t)\lambda_\varepsilon\| > 2.$$

При этом $t_\varepsilon \to t_0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Отметим, что в силу предположения (41) существует $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\forall\, t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \quad \frac{d}{dt}\|C^*_{1,0}(t)l_0\|^2\Big|_{t=t_0} > 0.$$

В силу (17) и (15) и того, что $\|C^*_{1,0}(t_0 - \delta_0)l_0\| < 2$ и $\|C^*_{1,0}(t_0 + \delta_0)l_0\| > 2$ найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ и $t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$ будут справедливы неравенства

$$\|C^*_\varepsilon(t_0 - \delta_0)\lambda_\varepsilon\| < 2, \quad \|C^*_\varepsilon(t_0 + \delta_0)\lambda_\varepsilon\| > 2, \quad \frac{\partial}{\partial t}\big(\|C^*_\varepsilon(t)\lambda_\varepsilon\|^2\big) > 0.$$

Отсюда следует наличие единственной точки $t_\varepsilon \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$ такой, что $\|C^*_\varepsilon(t_\varepsilon)\lambda_\varepsilon\| = 2$.

Покажем, что при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon_1)$ других точек t, удовлетворяющих равенству $\|C^*_\varepsilon(t)\lambda_\varepsilon\| = 2$, не существует.

В силу условия (41) существует $\gamma > 0$ такое, что при $t : |t - t_0| \geqslant \delta_0$ выполняется оценка $\big|\|C^*_{1,0}(t)l_0\| - 2\big| \geqslant \gamma > 0$. Из оценки (11) и условия (17) следует, что при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, $t \in [\sqrt{\varepsilon}, T]$ и $\|t - t_0\| \geqslant \delta_0$ будет справедливо неравенство $\big|\|C_\varepsilon^*(t)\lambda_\varepsilon\| - 2\big| \geqslant \gamma/2 > 0$. Тем самым, $\|C_\varepsilon^*(t)\lambda_\varepsilon\| \neq 2$ при таких ε и t. На оставшемся отрезке $[0, \sqrt{\varepsilon}]$ соотношение $\|C_\varepsilon^*(t)\lambda_\varepsilon\| \neq 2$ выполняется в силу условия (43). □

Таким образом, в рассматриваемом случае интеграл из (3) тоже разбивается в сумму двух интегралов

$$\int\limits_0^T \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)\lambda}{S\left(\|C_\varepsilon^*(t)\lambda\|\right)}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{t_\varepsilon} C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)\lambda\,dt + \int\limits_{t_\varepsilon}^T C_\varepsilon(t)\frac{C_\varepsilon^*(t)\lambda}{\|C_\varepsilon^*(t)\lambda\|}dt. \tag{46}$$

Пусть $\Delta l_\varepsilon := l_\varepsilon - l_0$, $\Delta r_\varepsilon := r_\varepsilon - r_0$, $\Delta t_\varepsilon := t_\varepsilon - t_0$. Тогда

$$\lambda_\varepsilon = \begin{pmatrix} l_0 + \Delta l_\varepsilon \\ \varepsilon(r_0 + \Delta r_\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \Delta l_\varepsilon = o(1), \quad \Delta r_\varepsilon = o(1), \quad \Delta t_\varepsilon = o(1)$$

при $\varepsilon \to 0$, и в силу равенств (2), (3), (46) и теоремы 4 — тройка $\{\Delta l_\varepsilon,\ \Delta r_\varepsilon\ \Delta t_\varepsilon\}$ является решением следующей системы уравнений, зависящей от параметра ε:

$$\begin{cases} 0 = F_1(\varepsilon, \Delta l, \Delta r, \Delta t) := -\nabla\varphi_1^*(-l_\varepsilon) + \nabla\varphi_1^*(-l_0) + \\ \qquad + \mathcal{W}_\varepsilon(T)y_0 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^{t_\varepsilon} C_{1,\varepsilon}(t)C_\varepsilon^*(t)\lambda_\varepsilon\,dt + \int\limits_{t_\varepsilon}^T C_{1,\varepsilon}(t)\frac{C_\varepsilon^*(t)\lambda_\varepsilon}{\|C_\varepsilon^*(t)\lambda_\varepsilon\|}\,dt, \\ 0 = F_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta r, \Delta t) := -\nabla\varphi_2^*(-\varepsilon r_\varepsilon) + \nabla\varphi_2^*(0) + \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^{t_\varepsilon} \varepsilon^{-1}C_{2,\varepsilon}(t)C_\varepsilon^*(t)\lambda_\varepsilon\,dt + \int\limits_{t_\varepsilon}^T \varepsilon^{-1}C_{2,\varepsilon}(t)\frac{C_\varepsilon^*(t)\lambda_\varepsilon}{\|C_\varepsilon^*(t)\lambda_\varepsilon\|}\,dt, \\ 0 = G(\varepsilon, \Delta l, \Delta r, \Delta t) := \|C_\varepsilon^*(t + \triangle t)\lambda_\varepsilon\|^2 - \|C_{1,0}^*(t_0)l_0\|^2. \end{cases} \tag{47}$$

Отметим, что функции F_1, F_2 и G непрерывны, а G — бесконечно дифференцируемая функция.

Рассмотрим их асимптотические разложения относительно бесконечно малых Δl, Δr и Δt.

В силу бесконечной дифференцируемости функций φ_1^* и φ_2^* с учетом равенства $\varphi_2^*(0) = 0$ получим

$$\begin{gathered} -\nabla\varphi_1^*(-l_0 - \Delta l) + \nabla\varphi_1^*(-l_0) \sim D^2\varphi_1^*(-l_0)\Delta l + \sum_{k=2}^{\infty}\Phi_{1,k}(\Delta l), \\ -\nabla\varphi_2^*(-\varepsilon r_\varepsilon) + \nabla\varphi_2^*(0) \sim D^2\varphi_2^*(0)r_0\varepsilon + \sum_{k=2}^{\infty}\Phi_{2,k}(\varepsilon, \Delta r), \end{gathered} \tag{48}$$

где $D^2\varphi_1^*(-l_0)$ и $D^2\varphi_2^*(0)$ — дифференциалы второго порядка от φ_1^* и φ_2^* в точках $(-l_0)$ и 0 соответственно, а $\Phi_{1,k}(\Delta l)$ и $\Phi_{2,k}(\varepsilon, \Delta l)$ — однородные степени k известные функции (многочлены от компонент вектора Δl и ε).

В силу равенства (7)

$$\mathcal{W}_\varepsilon(T)y_0 \sim \varepsilon e^{A_{11}T}A_{12}y_0 + \sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k y_k, \tag{49}$$

где y_k — известные вектора.

Каждый интеграл в первом и втором равенстве из системы уравнений (47) разобъем на две части

$$\int\limits_0^{t_0+\Delta t} = \int\limits_0^{t_0} + \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}, \qquad \int\limits_{t_0+\Delta t}^{T} = \int\limits_{t_0+\Delta t}^{t_0} + \int\limits_{t_0}^{T}$$

и обозначим интегралы через $I_1(\varepsilon, \Delta\lambda)$, $I_2(\varepsilon, \Delta\lambda)$, $I_3(\varepsilon, \Delta\lambda)$ и $I_4(\varepsilon, \Delta\lambda)$, соответственно.

Отметим, что в силу равенства (7) асимптотика подынтегральных функций в I_2 – I_4 — степенная по ε и компонентам вектора $\Delta\lambda$ с коэффициентами, гладко зависящими от t.

Для разложения интегралов I_2 и I_3 по Δt надо дополнительно разложить коэффициенты, зависящие от t, в ряд Тейлора в точке t_0 и затем проинтегрировать получившиеся разложения по указанным промежуткам.

Отметим, что слагаемое первого порядка малости по Δt в I_2 и I_3 имеет вид

$$\frac{C_{1,0}(t_0)C^*_{1,0}(t_0)l_0}{2}\,\Delta t, \qquad -\frac{C_{1,0}(t_0)C^*_{1,0}(t_0)l_0}{\|C^*_{1,0}(t_0)l_0\|}\,\Delta t,$$

соответственно. Так как

$$\|C^*_{1,0}(t_0)l_0\| = 2,\ I_2(\varepsilon, \Delta\lambda) = O(\Delta t),\ I_2(\varepsilon, \Delta\lambda) = O(\Delta t),$$

то в разложении суммы $I_2 + I_3$ слагаемых первого порядка малости по Δl, Δr, Δt и ε не будет.

В силу оценки (14) и равенства (39) на $[t_0, T]$ справедливы асимптотические равенства

$$\begin{gathered} C^*_{1,\varepsilon}(t) = B^*_1(t)e^{A^*_{11}t} + A^*_{12}e^{A^*_{11}t}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\varepsilon^k(A^*_{11})^k, \\ C^*_{2,\varepsilon}(t) = \mathbb{O} \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0. \end{gathered} \tag{50}$$

Тем самым,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int\limits_0^{t_\varepsilon} \varepsilon^{-1}C_{2,\varepsilon}(t)C^*_\varepsilon(t)\lambda_\varepsilon\,dt + \int\limits_{t_\varepsilon}^{T} \varepsilon^{-1}C_{2,\varepsilon}(t)\frac{C^*_\varepsilon(t)\lambda_\varepsilon}{\|C^*_\varepsilon(t)\lambda_\varepsilon\|}\,dt = \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_0^{t_0} \varepsilon^{-1}C_{2,\varepsilon}(t)C^*_\varepsilon(t)\lambda_\varepsilon\,dt + \mathbb{O} =: I_5(\varepsilon, \Delta\lambda) + \mathbb{O}, \end{aligned}$$

а степенная асимптотика интегралов I_i, $i = 2, 3, 4$ не содержит Δr.

Введем обозначение $\big(I_i(\varepsilon, \Delta\lambda)\big)_1$ — линейная по Δl, Δr, Δt и ε часть интеграла $I_i(\varepsilon, \Delta\lambda)$.

В силу теоремы 4, равенств (50) и того факта, что

$$\int\limits_0^{t_0} e^{-t/\varepsilon}f(t, l_\varepsilon, r_\varepsilon)\,dt = O(\varepsilon),$$

если $f(t, l_\varepsilon, r_\varepsilon)$ равномерно ограничена на $[0, t_0]$, простым вычислением получим:

$$\big(I_1(\varepsilon, \Delta\lambda)\big)_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{t_0} C_{1,0}(t)C^*_{1,0}(t)\,dt\,\Delta l + \varepsilon f_1 =: D_{11}\Delta l + \varepsilon f_1, \tag{51}$$

$$\begin{gathered} \big(I_3(\varepsilon, \Delta\lambda)\big)_1 = \\ = \int\limits_{t_0}^{T} C_{1,0}(t)\frac{C^*_{1,0}(t)\triangle l\|C^*_{1,0}(t)l_0\|^2 - \langle C^*_{1,0}(t)\triangle l, C^*_{1,0}(t)l_0\rangle C^*_{1,0}(t)l_0}{\|C^*_{1,0}(t)l_0\|^3}dt + \\ \varepsilon\cdot f_3 =: D_{12}\Delta l + \varepsilon f_3, \end{gathered} \tag{52}$$

$$\big(I_5(\varepsilon, \Delta\lambda)\big)_1 = \frac{1}{4}\Delta r + \frac{1}{4}\big(2B^*_0 - A^*_{12}\big)\Delta l + \varepsilon f_5, \tag{53}$$

где f_1, f_3 и f_5 однозначно вычисляются по l_0. При этом в силу предположения 36 и неравенства Коши – Буняковского

$$D_{11} > 0, \qquad D_{12} \geqslant 0. \tag{54}$$

Из равенства (50) находится асимптотика функции $G(\varepsilon, \Delta l, \Delta t)$ при Δl, Δt и ε, стремящихся к 0:

$$\begin{gathered} G(\varepsilon, \Delta l, \Delta t) \sim 2\langle C^*_{1,0}(t_0) l_0, C^*_{1,0}(t_0)\Delta l + (C^*_{1,0})'(t_0) l_0 \Delta t + \varepsilon A^*_{11} e^{A^*_{11} t_0} l_0 \rangle \\ + \sum_{k=2}^{\infty} G_k(\varepsilon, \Delta l, \Delta t), \quad (C^*_{1,0})'(t_0) := \frac{d}{dt} C^*_{1,0}(t) \Big|_{t=t_0}, \end{gathered} \tag{55}$$

где $G_k(\varepsilon, \Delta l, \Delta t)$ — однородные степени k по ε и компонентам векторов Δl и Δr известные функции.

Таким образом, в силу равенств (48), (49), (51)–(53) и (55) система первого приближения для (47) имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon g_1 = D^2 \varphi^*_1(-l_0)\Delta l_1 + D_{11}\Delta l_1 + D_{12}\Delta l_1 \\ \varepsilon g_2 = \dfrac{1}{4}\Delta r_1 + \dfrac{1}{4}\big(2B^*_0 - A^*_{12}\big)\Delta l_1 \\ \varepsilon g_3 = 2\langle C^*_{1,0}(t_0) l_0, C^*_{1,0}(t_0)\Delta l_1 \rangle + \langle C^*_{1,0}(t_0) l_0, (C^*_{1,0})'(t_0) l_0 \rangle \Delta t_1. \end{cases} \tag{56}$$

В силу выпуклости φ_1 и неравенств (54) линейный оператор

$$(D^2 \varphi^*_1(-l_0) + D_{11} + D_{12}) > 0,$$

поэтому из первого уравнения в системе уравнений (56) однозначно находится $\Delta l_1 = \varepsilon l_1$. После чего из второго уравнения в системе уравнений (56) однозначно находится $\Delta r_1 = \varepsilon r_1$. Наконец, в силу условий (41) коэффициент при Δt_1 отличен от нуля и, тем самым, из третьего уравнения в системе уравнений (56) однозначно находится $\Delta t_1 = \varepsilon t_1$. Таким образом, линейный оператор первого приближения для системы уравнений (56), т.е. оператор

$$\mathcal{D}\begin{pmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta r_1 \\ \Delta t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^2 \varphi^*_1(-l_0)\Delta l_1 + D_{11}\Delta l_1 + D_{12}\Delta l_1 \\ \frac{1}{4}\Delta r_1 + \frac{1}{4}\big(2B^*_0 - A^*_{12}\big)\Delta l_1 \\ 2\langle C^*_{1,0}(t_0) l_0, C^*_{1,0}(t_0)\Delta l_1 \rangle + \langle C^*_{1,0}(t_0) l_0, (C^*_{1,0})'(t_0) l_0 \rangle \Delta t_1 \end{pmatrix}$$

непрерывно обратим.

Далее процесс нахождения следующих членов разложения $\Delta l, \Delta r$ и Δt продолжается стандартным образом. Пусть уже построены приближения $\Delta l, \Delta r$ и Δt до N-го порядка. Тогда величины

$$\Delta l_{N+1} := \Delta l - \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k l_k, \quad \Delta r_{N+1} := \Delta r - \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k r_k, \quad \Delta t_{N+1} := \Delta t - \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k t_k$$

по построению удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered}
\mathcal{D}\begin{pmatrix}\Delta l_{N+1}\\ \Delta r_{N+1}\\ \Delta t_{N+1}\end{pmatrix} = O\big(\varepsilon^{N+1}\big) + O\big(\varepsilon\|z_{N+1}\|\big) + O\big(\|z_{N+1}\|^2\big),\\
z_{N+1} := \begin{pmatrix}\Delta l_{N+1}\\ \Delta r_{N+1}\\ \Delta t_{N+1}\end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{57}$$

В силу непрерывной обратимости оператора $\mathcal{D}$ из соотношений (57) получим, что

$$z_{N+1} = O\big(\varepsilon^{N+1}\big) + O\big(\varepsilon\|z_{N+1}\|\big) + O\big(\|z_{N+1}\|^2\big). \tag{58}$$

Как показано в [10, утверждение 2], из (58) следует, что $z_{N+1} = O\big(\varepsilon^{N+1}\big)$. Тем самым, доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть выполнены предположения* 2 *и* 3, *а также условия* (41) *и* (42). *Тогда вектора l_ε, r_ε и момент времени t_ε раскладываются в степенные асимптотические ряды*

$$l_\varepsilon \overset{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k l_k, \quad r_\varepsilon \overset{as}{=} \big(A_{12}^* - 2B_0^*\big)l_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k r_k, \quad t_\varepsilon \overset{as}{=} t_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k t_k, \qquad \varepsilon \to 0,$$

коэффициенты которых находятся рекуррентным образом.

Аналогичные результаты справедливы и в более общем случае, когда существует конечное число точек $\{t_1, t_2, \dots, t_p\} \subset (0, T)$ таких, что

$$\forall t \in [0,T] \setminus \{t_i\}_{i=1}^{p}\ \|C_0^*(t)l_0\| \neq 2;\ \|C_0^*(t_i)l_0\|^2 = 4;\ \frac{d}{dt}\|C_0^*(t_i)l_0\|^2\bigg|_{t=t_i} \neq 0, \tag{59}$$

и выполнено условие (42).

В этом случае аналог теоремы 4 имеет следующий вид

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (36), (42) *и* (59).

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существуют точки $\{t_{1,\varepsilon}, t_{2,\varepsilon}, \dots, t_{p,\varepsilon}\} \subset (0,T)$ смены вида оптимального управления в задаче (1). *Других точек смены вида управления нет и $t_{i,\varepsilon} \to t_i$ при $\varepsilon \to 0$ для любого $i = 1, \dots, p$.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.

Отметим, что в этом случае система уравнений, аналогичная системе уравнений (47), будет содержать вместо одного скалярного уравнения $0 = G$ набор из p уравнений $0 = G_p$, соответствующий точкам $t_{i,\varepsilon}$, и неизвестными величинами будут Δl, Δr и Δt_i $(i = 1, \dots, p)$.

Аналогично доказательству теоремы 5 доказывается следующая, итоговая теорема.

Теорема 7. *Пусть выполнены предположения* 2 *и* 3, *а также условия* (36), (42) *и* (59). *Тогда вектора l_ε, r_ε и моменты времени $\{t_{1,\varepsilon}, t_{2,\varepsilon}, \dots, t_{p,\varepsilon}\}$ раскладываются в степенные асимптотические ряды*

$$\begin{gathered}
l_\varepsilon \overset{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k l_k, \quad r_\varepsilon \overset{as}{=} \big(A_{12}^* - 2B_0^*\big)l_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k r_k,\\
t_{i,\varepsilon} \overset{as}{=} t_i + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k t_{i,k}, \quad i = 1, \dots, p, \quad \varepsilon \to 0,
\end{gathered}$$

коэффициенты которых находятся рекуррентным образом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* М.: Физматгиз. 1961. 391 с.
2. Красовский Н.Н. *Теория управления движением. Линейные системы.* М.: Наука. 1968. 476 с.
3. Ли Э.Б., Маркус Л. *Основы теории оптимального управления.* М.: Наука. 1972. 576 с.
4. Васильева А.Б., Дмитриев М.Г. *Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления* // Сер. Мат. анализ. Итоги науки и техники. Т. 20. 1982. С. 3–77.
5. P.V. Kokotovic, A.H. Haddad *Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes* // IEEE Trans. Automat. Control. Vol.20, No.1. 1975. P. 111–113. doi: 10.1109/TAC.1975.1100852.
6. Дончев А. *Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности.* М.: Мир. 1987. 156 с.
7. Калинин А.И., Семенов К.В. *Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. Т. 44, вып 3. 2004. С. 432–443.
8. Данилин А.Р., Парышева Ю.В. *Асимптотика оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления в регулярном случае* // Докл. АН. Т.427, вып 2. 2009. С. 151–154.
9. Данилин А.Р., Коврижных О.О. *О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления* // Докл. РАН. Т.451, вып 6. 2013. С. 612–614. doi: 10.7868/S086956521325004X.
10. Шабуров А.А. *Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных* // Тр. ИММ УрО РАН. Т.24, вып 2. 2018. С. 280–289.
11. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ.* М.: Мир. 1973. 471 с.

Алексей Руфимович Данилин,
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Софьи Ковалевской, 16,
620990, г. Екатеринбург, Россия
E-mail: dar@imm.uran.ru

Александр Александрович Шабуров,
Уральский федеральный университет,
ул. Мира, 19,
620002, г. Екатеринбург, Россия
E-mail: alexandershaburov@mail.ru