ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 1 (2019). С. 72-86.

УДК 517.95

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПО НАХОЖДЕНИЮ СОМНОЖИТЕЛЕЙ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ

С.Н. СИДОРОВ

Аннотация. Для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с вырождающейся гиперболической частью в прямоугольной области рассмотрены прямая и обратные задачи по определению сомножителей правых частей, зависящих от времени. Предварительно изучена прямая начально-граничная задача для данного уравнения. Методом спектрального анализа установлен критерий единственности решения. А само решение прямой начально граничной задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задаче Штурма-Лиувилля. При обосновании сходимости ряда возникла проблема малых знаменателей. В связи с чем были установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой. Эти оценки позволили обосновать сходимость построенного ряда в классе регулярных решений данного уравнения. На основе решения прямой задачи поставлены и изучены три обратные задачи по отысканию сомножителя правой части, зависящей от времени, только из параболической или гиперболической части уравнения, и когда неизвестными одновременно являются сомножители из обеих частей уравнения. Используя формулу решения прямой начально-граничной задачи, решение обратных задач эквивалентно редуцировано к разрешимости нагруженных интегральных уравнений. На основании теории интегральных уравнений доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений поставленных обратных задач. При этом решения обратных задач построены в явном виде – как суммы ортогональных рядов.

Ключевые слова: уравнение смешанного параболо-гиперболического типа, начально-граничная задача, обратные задачи, единственность, существование, ряд, малые знаменатели, интегральные уравнения.

Mathematics Subjects Classifications: 35M10 + 35R30

1. Постановка задач

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu = F(x,t), \tag{1.1}$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + bu, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b(-t)^m u, \end{cases} \qquad F(x,t) = \begin{cases} f_1(x)g_1(t), & t > 0, \\ f_2(x)g_2(t), & t < 0, \end{cases}$$

S.N. Sidorov, Inverse problems for a degenerate mixed parabolic-hyperbolic equation on finding time-depending factors in right hand sides.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ-РБ (грант № 17-41-020516).

Поступила 7 апреля 2018 г.

в прямоугольной области

$$D = \{(x,t)|\, 0 < x < l,\ -\alpha < t < \beta\},$$

где $m > 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа, и b – заданное любое действительное число, и поставим следующие задачи.

Задача 1. *Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_t^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \tag{1.2}$$

$$Lu(x,t) \equiv F(x,t), \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{1.3}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \tag{1.4}$$

$$u(x,-\alpha) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.5}$$

где $F(x,t)$ – заданная достаточно гладкая функция, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 2. *Найти функции $u(x,t)$ и $g_1(t)$, удовлетворяющие условиям* (1.2) – (1.5) *и*

$$g_1(t) \in C[0,\beta]; \tag{1.6}$$

$$u(x_0,t) = h_1(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad 0 \leqslant t \leqslant \beta, \tag{1.7}$$

где $f_i(x)$, $i = 1,2$, $g_2(t)$, $h_1(t)$ – заданные функции, x_0 – заданная точка из интервала $(0,l)$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 3. *Найти функции $u(x,t)$ и $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям* (1.2) – (1.5) *и*

$$g_2(t) \in C[-\alpha,0], \tag{1.8}$$

$$u(x_0,t) = h_2(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant 0, \tag{1.9}$$

где $f_i(x)$, $i = 1,2$, $g_1(t)$, $h_2(t)$ – известные функции.

Задача 4. *Найти функции $u(x,t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям* (1.2)–(1.9), *здесь $f_i(x)$, $h_i(t)$, $i = 1,2$, – заданные функции.*

Отметим, что в задачах 2–4 условия (1.7) и (1.9) являются дополнительными для определения функций $g_1(t)$ и $g_2(t)$.

К одним из первых исследований задач сопряжения, когда на одной части области задано параболическое уравнение, на другой – гиперболическое уравнение, можно отнести работу И.М. Гельфанда [1]. Он рассматривает пример, связанный с движением газа в канале, окруженном пористой средой, при этом в канале движение газа описывается волновым уравнением, вне его – уравнением диффузии. Я.С. Уфлянд [2, 3] задачу о распространении электрических колебаний в составных линиях, когда на участке полубесконечной линии пренебрегается потерями, а остальная часть линии рассматривается как кабель без утечки, свел к решению уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. Эта задача для более общего уравнения рассмотрена в монографии Т.Д. Джураева [4].

О.А. Ладыженская и Л. Ступялис [5, 6] в многомерном пространстве рассмотрели начально-граничные краевые задачи на сопряжения для параболо-гиперболических уравнений, которые возникают при изучении задачи о движении проводящей жидкости в электромагнитном поле.

В работах Н.Ю. Капустина [7] методами функционального анализа доказана однозначная разрешимость аналога задачи Трикоми в пространстве L_2 для уравнения (1.1) при $b = 0$, $0 < m \leqslant 1$ и $F(x,t) \equiv 0$ в смешанной области, параболическая часть которой совпадает с D_+, а гиперболическая часть представляет собой характеристический треугольник с основанием на линии вырождения. В аналогичной области Е.И. Моисеев, Н.Ю. Капустин [8] методом спектрального анализа изучили задачи для параболо-гиперболических уравнений и соответствующие одномерные спектральные задачи.

Ранее задачи 1–4 впервые поставлены и изучены в работах К.Б. Сабитова [9, с. 228–238], [10] для уравнения (1.1) при $m = 0$. Начально-граничная задача (1.2)–(1.5) для однородного уравнения (1.1), т.е. когда $F_i(x,t) \equiv 0$, $i = 1,2$, изучена в работах [11 – 14], а когда

$F_i(x,t) \neq 0$ – в работе [15]. В работах [16 – 18] были изучены обратные задачи по отысканию функций $u(x,t)$ и $f_i(x)$, когда $g_i(t) \equiv 1$.

Обратные задачи возникают во многих областях науки: электродинамике, акустике, квантовой теории рассеяния, геофизике (обратные задачи электроразведки, сейсмики, теории потенциала), астрономии и других областях естествознания. Это связано с тем, что значения параметров модели могут быть получены из наблюдаемых данных, а свойства среды на практике часто бывают неизвестны.

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных, т.е. для параболических, гиперболических и эллиптических уравнений, изучены достаточно полно (см. работы [19–25] и приведенную там обширную библиографию). Так, например, в [22, 25] для уравнения теплопроводности изучены обратные задачи по нахождению правой части, зависящей от времени методом интегральных уравнений.

В работах А.И. Прилепко и его учеников [26–28] рассмотрены обратные задачи по поиску неизвестной правой части для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных.

В работах В.В. Соловьева [29, 30] для уравнения параболического типа рассмотрены обратные задачи определения правой части $F(x,t) = h(x,t)f(t) + g(x,t)$, где неизвестной является функция $f(t)$.

В работе А.Б. Костина [31] для параболического уравнения исследована обратная задача восстановления источника – правой части $F(x,t) = h(x,t)f(x)$, где неизвестной является функция $f(x)$.

А.И. Кожановым и Р.Р. Сафиулловой [32, 33] изучены обратные задачи нахождения вместе с решением параболического уравнения также неизвестного внешнего воздействия (правой части).

В данной статье впервые поставлены и изучены обратные задачи 2–4 по отысканию сомножителей правой части уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с вырождающейся гиперболической частью, исследование которых проводится на основе решения прямой начально-граничной задачи 1. Как было отмечено выше, что в работах [11–15] решение этой задачи построено в виде суммы ортогонального ряда, при обосновании сходимости которого возникла проблема малых знаменателей. В связи с чем, были установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой, которые позволили обосновать сходимость ряда в классе регулярных решений уравнения (1.1). На основе формулы решения этой задачи решение обратных задач 2 – 4 эквивалентно редуцировано к разрешимости нагруженных интегральных уравнений. Используя теорию интегральных уравнений, доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений поставленных обратных задач и указаны явные формулы решения.

2. Исследование прямой начально-граничной задачи

На основании работы [15] решение прямой задачи (1.2)–(1.5) определяется рядом

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\mu_k x, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}, \tag{2.1}$$

где

$$T_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\omega_k(\alpha)}{\Delta_k(\alpha)} e^{-\lambda_k^2 t} + f_{1k}\int\limits_0^t g_1(s) e^{-\lambda_k^2(t-s)}\,ds, & t > 0, \\ \dfrac{\omega_k(\alpha)}{\Delta_k(\alpha)}\Delta_k(-t) - \omega_k(-t), & t < 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\Delta_k(-t) = \lambda_k^2 \gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{-t}J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q) + \gamma_{-1/(2q)}(k)\sqrt{-t}J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q),$$

$$\gamma_{1/(2q)}(k) = \frac{1}{2q}\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{2}{p_k}\right)^{1/(2q)}, \quad \gamma_{-1/(2q)}(k) = -\frac{1}{2q}\Gamma\left(-\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{2}{p_k}\right)^{-1/(2q)},$$

$$f_{ik} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l f_i(x)\sin\mu_k x\,dx, \quad i = 1, 2,$$

$$\omega_k(-t) = f_{1k}g_1(0)\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{-t}J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q) - f_{2k}W_k(-t),$$

$$W_k(-t) = \frac{\pi}{2q\sin\frac{\pi}{2q}}\int\limits_t^0 g_2(s)\sqrt{s\,t}\,W(s,-t)\,ds, \tag{2.3}$$

$$W(s,-t) = J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q)J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q) - J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q)J_{1/(2q)}(p_k(-s)^q),$$

$J_{1/(2q)}(z)$ и $J_{-1/(2q)}(z)$ – функции Бесселя первого рода, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, $\lambda_k^2 = b + \mu_k^2$, $p_k = \lambda_k/q$, $q = (m+2)/2$, $\widetilde{\lambda}_k = \lambda_k l$, $\alpha_{ql} = \alpha^q/(q\,l)$, при условии, что при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta_k(\alpha) = \lambda_k^2\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{\alpha}J_{1/(2q)}(\widetilde{\lambda}_k\alpha_{ql}) + \gamma_{-1/(2q)}(k)\sqrt{\alpha}J_{-1/(2q)}(\widetilde{\lambda}_k\alpha_{ql}) \neq 0. \tag{2.4}$$

Отметим, что в дальнейшем будем считать $b = \mu^2 \geq 0$, $\mu \geq 0$, так как если $b < 0$, то, начиная с некоторого номера k_0 при всех $k > k_0$, выражение $b + \mu_k^2 > 0$, т.е. знак b не влияет на полученные результаты.

В работах [14, 15] показано, что $\Delta_k(\alpha)$ имеет счетное множество нулей. Это множество совпадает с множеством нулей линейной комбинации функций Бесселя $J_{1/(2q)}(\widetilde{\lambda}_k\alpha_{ql})$ и $J_{-1/(2q)}(\widetilde{\lambda}_k\alpha_{ql})$. Поскольку $\Delta_k(\alpha)$ входит в знаменатель коэффициентов ряда (2.1), то возникает проблема малых знаменателей [34, 14, 15]. Поэтому для обоснования сходимости ряда (2.1) необходимо показать существование чисел α, l, m и b, при которых выражение $\Delta_k(\alpha)$ отделено от нуля.

Лемма 2.1. *Если $\alpha_{ql} = p/t$ – любое дробное число, где p и t – взаимно-простые натуральные числа и $r/t \neq (3q+1)/(4q)$ при $r = \overline{1, t-1}$, то существуют положительные постоянные $k_0 \in \mathbb{N}$ и C_0, такие, что при любых $k > k_0$ и фиксированных $\mu \geq 0$ справедлива оценка*

$$|k^{-1-\lambda}\Delta_k(\alpha)| \geq C_0 > 0, \quad \lambda = 1/2 - 1/(2q). \tag{2.5}$$

Доказательство. Доказательство приведено в работе [15]. □

На основе этой леммы устанавливается справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия леммы 2.1, $g_1(t) \in C[0,\beta]$, $g_2(t) \in C[-\alpha, 0]$, $f_i(x) \in C^3[0,l]$, $f_i(0) = f_i(l) = f_i''(0) = f_i''(l) = 0$, $i = 1, 2$. Тогда, если $\Delta_k(\alpha) \neq 0$ при $k = \overline{1, k_0}$, то существует единственное решение задачи (1.2) – (1.5), которое определяется рядом (2.1), коэффициенты которого определяются формулой (2.2).*

Доказательство. Доказательство проводится аналогично работе [15]. □

3. Исследование обратной задачи 2

На основе формулы решения прямой задачи, исследованной в п. 2, рассмотрим обратную задачу 2. Требуя, чтобы функция (2.1) удовлетворяла условию (1.7), имеем

$$\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\omega_k(\alpha)}{\Delta_k(\alpha)}e^{-\lambda_k^2 t} + f_{1k}\int\limits_0^t g_1(s)e^{-\lambda_k^2(t-s)}\,ds\right]\sin\mu_k x_0 = h_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \beta,$$

или

$$g_1(0)\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_{1k}\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{\alpha}J_{1/(2q)}(p_k\alpha^q)}{\Delta_k(\alpha)}e^{-\lambda_k^2 t}\sin\mu_k x_0-$$

$$-\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_{2k}W_k(\alpha)}{\Delta_k(\alpha)}e^{-\lambda_k^2 t}\sin\mu_k x_0+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}f_{1k}\int\limits_0^t g_1(s)e^{-\lambda_k^2(t-s)}\,ds\,\sin\mu_k x_0=h_1(t).$$

В последнем слагаемом поменяем местами операции интегрирования и суммирования, что законно в силу равномерной сходимости ряда (2.1) на $\overline{D}$ [15]. Тогда для функции $g_1(t)$ получим нагруженное интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int\limits_0^t g_1(s)K_1(s,t)\,ds=\widetilde{h}_1(t),\quad 0\leqslant t\leqslant\beta, \tag{3.1}$$

с ядром

$$K_1(s,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}f_{1k}e^{-\lambda_k^2(t-s)}\sin\mu_k x_0, \tag{3.2}$$

и правой частью

$$\widetilde{h}_1(t)=h_1(t)-g_1(0)H_1(t)+H_2(t), \tag{3.3}$$

здесь

$$H_1(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_{1k}e^{-\lambda_k^2 t}}{\Delta_k(\alpha)}\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{\alpha}J_{1/(2q)}(p_k\alpha^q)\sin\mu_k x_0, \tag{3.4}$$

$$H_2(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_{2k}e^{-\lambda_k^2 t}}{\Delta_k(\alpha)}W_k(\alpha)\sin\mu_k x_0. \tag{3.5}$$

Лемма 3.1. *Если функции $f_i(x)$, $i=1,2$, удовлетворяют условиям теоремы* 2.1, *то ряды* (3.2), (3.4) *и* (3.5) *и их производные по t на замкнутом множестве $0\leqslant s\leqslant t\leqslant\beta$ сходятся равномерно.*

Доказательство. Ряд (3.2) и его производная по t при $0\leqslant s\leqslant t\leqslant\beta$ мажорируются соответственно рядами

$$M_1\sum_{k=1}^{\infty}|f_{1k}|\quad\text{и}\quad M_2\sum_{k=1}^{\infty}k^2|f_{1k}|,$$

где M_i – здесь и далее положительные постоянные.

С учетом леммы 2.1, асимптотической оценки [35, с. 98]

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+O(z^{-5/2}),\quad z\to\infty, \tag{3.6}$$

и леммы 2.5 [15] оценим выражения, стоящие под знаком суммы в (3.4) и (3.5) при больших k:

$$\frac{|f_{1k}e^{-\lambda_k^2 t}||\gamma_{1/(2q)}(k)|\sqrt{\alpha}\,|J_{1/(2q)}(p_k\alpha^q)|}{|\Delta_k(\alpha)|}\leqslant\frac{M_3|f_{1k}|k^{-1+\lambda}}{k^{1+\lambda}C_0}\leqslant M_4k^{-2}|f_{1k}|,$$

$$\frac{|f_{2k}e^{-\lambda_k^2 t}||W_k(\alpha)|}{|\Delta_k(\alpha)|}\leqslant\frac{M_5|f_{2k}|k^{-1+\lambda}}{k^{1+\lambda}C_0}\leqslant M_6k^{-2}|f_{2k}|.$$

Для выражений, стоящих под знаком суммы в производных $H_1'(t)$ и $H_2'(t)$, получим следующие оценки:

$$\frac{|f_{1k}\lambda_k^2 e^{-\lambda_k^2 t}||\gamma_{1/(2q)}(k)|\sqrt{\alpha}\,|J_{1/(2q)}(p_k\alpha^q)|}{|\Delta_k(\alpha)|} \leqslant M_7|f_{1k}|,$$

$$\frac{|f_{1k}\lambda_k^2 e^{-\lambda_k^2 t}||W_k(\alpha)|}{|\Delta_k(\alpha)|} \leqslant M_8|f_{2k}|.$$

Отсюда следует, что ряды (3.2), (3.4) и (3.5) и их производные первого порядка на замкнутом множестве $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \beta$ мажорируются соответственно рядами

$$M_9\sum_{k=1}^{\infty}|f_{1k}|, \quad M_{10}\sum_{k=1}^{\infty}k^2|f_{2k}|. \tag{3.7}$$

Тогда при выполнении условий леммы 3.1 ряды (3.7) сходятся. Поэтому ряды (3.2), (3.4), (3.5) и ряды, полученные из них почленным дифференцированием по t один раз при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \beta$, сходятся равномерно. □

Дифференцируя уравнение (3.1) по t, имеем

$$K_1(t,t)g_1(t) + \int_0^t g_1(s)\frac{\partial K_1(s,t)}{\partial t}\,ds = \widetilde{h}_1'(t). \tag{3.8}$$

Положив в (3.2) $s = t$, будем иметь

$$K_1(t,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_{1k}\sin\mu_k x_0 = f_1(x_0). \tag{3.9}$$

Правая часть равенства (3.9) представляет собой разложение в ряд функции $f_1(x)$ по системе $\left\{\sqrt{2/l}\sin\mu_k x\right\}_{k\geq 1}$ в точке $x = x_0$. Если $f_1(x_0) \neq 0$, то из уравнения (3.8) получаем интегральное уравнение

$$g_1(t) - \lambda\int_0^t g_1(s)\frac{\partial K_1(s,t)}{\partial t}\,ds = \frac{\widetilde{h}_1'(t)}{f_1(x_0)}, \tag{3.10}$$

где

$$\lambda = -\frac{1}{f_1(x_0)}.$$

Уравнение (3.10) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью. Как известно (см. например работу [36, с. 437]), такое уравнение имеет единственное решение в классе функций $C[0,\beta]$ для любого $g_1(0)$. Найдем эту постоянную, входящую в правую часть уравнения (3.10). Для этого в уравнении (3.10) положим $t = 0$, тогда имеем

$$f_1(x_0)g_1(0) = h_1'(0) - g_1(0)H_1'(0) + H_2'(0).$$

Отсюда найдем

$$g_1(0) = \frac{h_1'(0) + H_2'(0)}{f_1(x_0) + H_1'(0)} \tag{3.11}$$

при условии

$$f_1(x_0) + H_1'(0) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{+\infty} f_{1k}\sin\mu_k x_0 -$$

$$-\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{f_{1k}\lambda_k^2\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{\alpha}J_{1/(2q)}(p_k\alpha^q)}{\Delta_k(\alpha)}\sin\mu_k x_0 =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} f_{1k} \left[1 - \frac{\lambda_k^2 \gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{\alpha} J_{1/(2q)}(p_k\alpha^q)}{\Delta_k(\alpha)} \right] \sin\mu_k x_0 =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_{1k}\gamma_{-1/(2q)}(k)\sqrt{\alpha} J_{-1/(2q)}(p_k\alpha^q)}{\Delta_k(\alpha)} \sin\mu_k x_0 \neq 0. \qquad (3.12)$$

Пусть, например, $q = 1$ и $\mu = 0$. Тогда условие (3.12) принимает вид

$$\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_{1k}\cos\lambda_k\alpha}{\lambda_k \sin\lambda_k\alpha + \cos\lambda_k\alpha} \sin\mu_k x_0 \neq 0,$$

которое выполняется при $\alpha_l = \alpha/l = p \in \mathbb{N}$.

Уравнение (3.8) (в котором $g_1(0)$ задано формулой (3.11)) является классическим уравнением Вольтерра второго рода, решение которого легко строится методом последовательных приближений.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия леммы* 2.1*; функции* $f_i(x)$, $i = 1,2$, *и* $g_2(t)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1, $h_1(t) \in C^1[0,\beta]$; $f_1(x_0) \neq 0$ *Тогда, если выполнено условие* (3.12), *то интегральное уравнение* (3.8) *имеет единственное решение* $g_1(t) \in C[0,\beta]$, *следовательно, задача* 2 *имеет единственное решение; если условие* (3.12) *нарушается, то интегральное уравнение* (3.8), *следовательно задача* 2, *имеют решения с точностью слагаемого, множителем которого является неизвестное число* $g_1(0)$.

Теперь покажем, что условие $f_1(x_0) \neq 0$ является существенным для однозначной разрешимости задачи 2. Действительно, существует функция $f_1(x) = \sin\mu_m x = \sin\pi m\widetilde{x}$, где m – некоторое фиксированное натуральное число, $\widetilde{x} = x/l$, такая, что $f_1(x_0) = \sin\pi m\widetilde{x}_0 = 0$. Для такой функции при любой функции $g_1(t) \in C[0,\beta]$ и $h_1(t) \equiv 0$ существует ненулевое решение задачи 2

$$u_{1m}(x,t) = T_{1m}(t)\sin\mu_m x, \qquad (3.13)$$

где

$$T_{1m}(t) = \begin{cases} \dfrac{\omega_{1m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)} e^{-\lambda_m^2 t} + \int\limits_0^t g_1(s) e^{-\lambda_m^2(t-s)}\,ds, & t > 0, \\ \dfrac{\omega_{1m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)} \Delta_m(-t) - \omega_{1m}(-t), & t < 0, \end{cases}$$

$$\omega_{1m}(-t) = g_1(0)\gamma_{1/(2q)}(m)\sqrt{-t} J_{1/(2q)}(p_m(-t)^q) - f_{2m}W_m(-t).$$

В самом деле, построенная функция (3.13) удовлетворяет условиям (1.2) – (1.7) (где $h_1(t) \equiv 0$). Принадлежность классу (1.2) следует из того, что на основании асимптотической формулы [35, с. 102]

$$J_\nu(z) \sim \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \quad \text{при} \quad z \to 0,$$

и леммы 2.1 имеем

$$\lim_{t\to 0+0} u_{1m}(x,t) = \frac{\omega_{1m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)} \sin\mu_m x = \lim_{t\to 0-0} u_{1m}(x,t) =$$

$$= \lim_{t\to 0-0} \left[\frac{\omega_{1m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)} \Delta_m(-t) - \omega_{1m}(-t) \right] \sin\mu_m x =$$

$$= \sin\mu_m x \lim_{t\to 0-0} \frac{\omega_{1m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)} \Big[\lambda_m^2 \sqrt{-t}\gamma_{1/(2q)}(s) J_{1/(2q)}(p_m(-t)^q) +$$

$$+ \sqrt{-t}\gamma_{-1/(2q)}(m) J_{-1/(2q)}(p_m(-t)^q) \Big] -$$

$$-\sin\mu_m x \lim_{t\to 0-0}\Big[g_1(0)\gamma_{1/(2q)}(m)\sqrt{-t}J_{1/(2q)}(p_m(-t)^q)-f_{2m}W_m(-t)\Big]=$$

$$=\sin\mu_m x\lim_{t\to 0-0}\Big[\frac{\omega_{1m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)}(-\lambda_m^2 t+1)+g_1(0)t-f_{2m}W_m(-t)\Big]=\frac{\omega_{1m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)}\sin\mu_m x.$$

В силу дифференцируемости асимптотической оценки функции Бесселя нетрудно показать равенство производных по нормали к линии изменения типа:

$$\lim_{t\to 0+0}\frac{\partial u_{1m}(x,t)}{\partial t}=\Big[-\frac{\omega_{1m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)}\lambda_m^2+g_1(0)\Big]\sin\mu_m x=\lim_{t\to 0-0}\frac{\partial u_m(x,t)}{\partial t}.$$

Условия (1.4) и (1.5) также выполняются, так как

$$u_{1m}(x,-\alpha)=\Big[\frac{\omega_{1m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)}\Delta_m(\alpha)-\omega_{1m}(\alpha)\Big]\sin\mu_m x=0,$$

$$u_{1m}(x_0,t)=T_{1m}(t)\sin\mu_m x_0=0.$$

Из построения функции (3.13) следует, что $u_{1m}(x,t)$ на множестве $D_-\cup D_+$ является решением уравнения (1.1).

Теперь выясним, для каких точек $\widetilde{x}_0$ из $(0,1)$ имеет место равенство

$$\sin\pi m\widetilde{x}_0=0 \iff \widetilde{x}_0=\frac{k}{m},\ \ k,m\in\mathbb{N},\ \ k<m.$$

Следовательно, когда $\widetilde{x}_0$ принимает рациональные значения, условие $f_1(x_0)\neq 0$ будет нарушено.

4. Исследование задачи 3

Здесь рассмотрим задачу 3 по поиску множителя правой части из гиперболической части уравнения (1.1), зависящей от времени. Аналогично п. 3, полагая в формуле (2.1) $x=x_0$ и требуя, чтобы функция удовлетворяла условию (1.9), получим

$$\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\frac{\omega_k(\alpha)}{\Delta_k(\alpha)}\Delta_k(-t)\sin\mu_k x_0-\omega_k(-t)\Big]\sin\mu_k x_0=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_{1k}g_1(0)\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{\alpha}J_{1/(2q)}(p_k\alpha^q)-f_{2k}W_k(\alpha)}{\Delta_k(\alpha)}\Delta_k(-t)\sin\mu_k x_0-$$

$$-\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[f_{1k}g_1(0)\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{-t}J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q)-f_{2k}W_k(-t)\Big]\sin\mu_k x_0=h_2(t)$$

или

$$\int_t^0 g_2(s)K_2(s,t)\,ds-\int_{-\alpha}^0 g_2(s)K_3(s,t)\,ds=\widetilde{h}_2(t),\quad -\alpha\leqslant t\leqslant 0,\tag{4.1}$$

здесь

$$K_2(s,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{\pi}{2q\sin\frac{\pi}{2q}}\sum_{k=1}^{\infty}f_{2k}\sqrt{st}\,W(s,-t)\sin\mu_k x_0,\quad -\alpha\leqslant t\leqslant s\leqslant 0,\tag{4.2}$$

$$K_3(s,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{\pi}{2q\sin\frac{\pi}{2q}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_{2k}}{\Delta_k(\alpha)}\Delta_k(-t)\sqrt{-s\alpha}\,W(s,\alpha)\sin\mu_k x_0,\tag{4.3}$$

$$\widetilde{h}_2(t)=h_2(t)-g_1(0)H_3(t),\quad -\alpha\leqslant t\leqslant 0,\tag{4.4}$$

$$H_3(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}f_{1k}\Big[\frac{\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{\alpha}J_{1/(2q)}(p_k\alpha^q)}{\Delta_k(\alpha)}\Delta_k(-t)-$$

$$-\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{-t}J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q)\Big]\sin\mu_k x_0. \tag{4.5}$$

Лемма 4.1. *Если функции $f_i(x)$, $i=1,2$, удовлетворяют условиям теоремы* 2.1, *то ряды* (4.2), (4.3) *и* (4.5) *и их производные первого и второго порядков по t на множестве $-\alpha \leqslant t \leqslant s \leqslant 0$ сходятся равномерно.*

Доказательство. С учетом леммы 2.1 и асимптотической оценки (3.6) оценим выражения, стоящие под знаком суммы в (4.2), (4.3) и (4.5). Выражение $W(s,-t)$ из (2.3) и его производные первого и второго порядков по переменной t оцениваются следующим образом:

$$\begin{aligned}|\sqrt{st}W(s,-t)| &\leqslant |\sqrt{st}J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q)J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q)|+\\ &+|\sqrt{st}J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q)J_{1/(2q)}(p_k(-s)^q)| \leqslant\\ &\leqslant M_{11}k^{-1/2-1/2}+M_{12}k^{-1/2-1/2} \leqslant M_{13}k^{-1},\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}|[\sqrt{st}W(s,-t)]'_t| &\leqslant \lambda_k|\sqrt{-s}(-t)^{q-1/2}J_{1/(2q)-1}(p_k(-t)^q)J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q)|+\\ &+\lambda_k|\sqrt{-s}(-t)^{q-1/2}J_{1-1/(2q)}(p_k(-t)^q)J_{1/(2q)}(p_k(-s)^q)| \leqslant\\ &\leqslant M_{14}k^{1-1/2-1/2}+M_{15}k^{1-1/2-1/2} \leqslant M_{16}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Поскольку $W''_t(s,-t)=-\lambda_k^2(-t)^mW(s,-t)$, то на основании оценки (4.6) имеем

$$|[\sqrt{st}W(s,-t)]''_{tt}| \leqslant M_{17}k. \tag{4.8}$$

Далее, аналогично [15] оценим выражение $\Delta_k(t)$ из (2.2) и его производные первого и второго порядков

$$\begin{aligned}|\Delta_k(-t)| &\leqslant \lambda_k^2|\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{-t}J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q)|+|\gamma_{-1/(2q)}(k)\sqrt{-t}J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q)| \leqslant\\ &\leqslant M_{18}k^{2-1/(2q)-1/2}+M_{19}k^{1/(2q)-1/2} \leqslant M_{20}k^{1+\lambda},\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}|\Delta'_k(-t)| &\leqslant \lambda_k^3|\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{-t}J_{1/(2q)-1}(p_k(-t)^q)|+\\ &+\lambda_k|\gamma_{-1/(2q)}(k)\sqrt{-t}J_{1-1/(2q)}(p_k(-t)^q)| \leqslant\\ &\leqslant M_{21}k^{3-1/(2q)-1/2}+M_{22}k^{1+1/(2q)-1/2} \leqslant M_{23}k^{2+\lambda}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Так как $\Delta''_k(-t)=-\lambda_k^2(-t)^m\Delta_k(-t)$, то на основании оценки (4.9) имеем

$$|\Delta''_k(-t)| \leqslant M_{24}k^{3+\lambda}. \tag{4.11}$$

С учетом полученных оценок (4.6) – (4.11) для выражения, стоящее под знаком суммы в (4.3), получим следующие оценки:

$$\left|\frac{f_{2k}}{\Delta_k(\alpha)}\Delta_k(-t)\sqrt{-s\alpha}\,W(s,\alpha)\right| \leqslant M_{25}|f_{2k}|\frac{k^{1+\lambda-1}}{k^{1+\lambda}} \leqslant M_{26}|f_{2k}|k^{-1}, \tag{4.12}$$

$$\left|\frac{f_{2k}}{\Delta_k(\alpha)}\Delta'_k(-t)\sqrt{-s\alpha}\,W(s,\alpha)\right| \leqslant M_{27}|f_{2k}|\frac{k^{2+\lambda-1}}{k^{1+\lambda}} \leqslant M_{28}|f_{2k}|, \tag{4.13}$$

$$\left|\frac{f_{2k}}{\Delta_k(\alpha)}\Delta''_k(-t)\sqrt{-s\alpha}\,W(s,\alpha)\right| \leqslant M_{29}|f_{2k}|\frac{k^{3+\lambda-1}}{k^{1+\lambda}} \leqslant M_{30}|f_{2k}|k. \tag{4.14}$$

Аналогично, оценивая выражения, стоящие под знаком суммы в (4.5), получим что:

$$\begin{aligned}|f_{1k}|\left|\frac{\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{\alpha}J_{1/(2q)}(p_k\alpha^q)}{\Delta_k(\alpha)}\Delta_k(-t)\right| &+|f_{1k}|\left|\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{-t}J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q)\right| \leqslant\\ &\leqslant M_{31}|f_{1k}|\frac{k^{-1+\lambda}}{k^{1+\lambda}}k^{1+\lambda}+M_{32}|f_{1k}|k^{-1+\lambda} \leqslant M_{33}|f_{1k}|k^{-1+\lambda},\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$|f_{1k}|\left|\frac{\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{\alpha}J_{1/(2q)}(p_k\alpha^q)}{\Delta_k(\alpha)}\Delta'_k(-t)\right|+$$

$$+|f_{1k}|\lambda_k\left|\gamma_{1/(2q)}(k)(-t)^{q-1/2}J_{1/(2q)-1}(p_k(-t)^q)\right|\leqslant$$

$$\leqslant M_{34}|f_{1k}|\frac{k^{-1+\lambda}}{k^{1+\lambda}}k^{2+\lambda}+M_{35}|f_{1k}|k^{1-1+\lambda}\leqslant M_{36}|f_{1k}|k^{\lambda}, \tag{4.16}$$

$$|f_{1k}|\left|\frac{\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{\alpha}J_{1/(2q)}(p_k\alpha^q)}{\Delta_k(\alpha)}\Delta_k''(-t)\right|+$$

$$+|f_{1k}|\lambda_k^2(-t)^m\left|\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{-t}J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q)\right|\leqslant$$

$$\leqslant M_{37}|f_{1k}|\frac{k^{-1+\lambda}}{k^{1+\lambda}}k^{3+\lambda}+M_{38}|f_{1k}|k^{2-1+\lambda}\leqslant M_{39}|f_{1k}|k^{1+\lambda}. \tag{4.17}$$

Отсюда следует, что ряды (4.2), (4.3) и (4.5) и их производные первого и второго порядков на замкнутом множестве $-\alpha\leqslant t\leqslant s\leqslant 0$ мажорируются соответственно рядами

$$M_{40}\sum_{k=1}^{\infty}k^{1+\lambda}|f_{1k}|,\quad M_{42}\sum_{k=1}^{\infty}k|f_{2k}|. \tag{4.18}$$

При выполнении условий леммы 4.1 ряды (4.18) сходятся. Тогда ряды (4.2), (4.3), (4.5) и ряды, полученные из них почленным дифференцированием по t два раза при $-\alpha\leqslant t\leqslant s\leqslant 0$ сходятся равномерно. □

Обе части уравнения (4.1) продифференцируем по t. Тогда получим

$$-g_2(t)K_2(t,t)+\int_t^0 g_2(s)\frac{\partial K_2(s,t)}{\partial t}\,ds-\int_{-\alpha}^0 g_2(s)\frac{\partial K_3(s,t)}{\partial t}\,ds=\widetilde{h}_2'(t). \tag{4.19}$$

Из равенства (4.2) видно, что

$$K_2(s,t)\Big|_{s=t}=0,\ \text{ так как }\ W(s,-t)\Big|_{s=t}=0.$$

Тогда, еще раз дифференцируя уравнение (4.19), будем иметь

$$-g_2(t)\frac{\partial K_2(s,t)}{\partial t}\Big|_{s=t}+\int_t^0 g_2(s)\frac{\partial^2 K_2(s,t)}{\partial t^2}\,ds-\int_{-\alpha}^0 g_2(s)\frac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2}\,ds=\widetilde{h}_2''(t). \tag{4.20}$$

На основании (4.2) вычислим

$$\frac{\partial K_2(s,t)}{\partial t}=\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{\pi}{2q\sin\frac{\pi}{2q}}\sum_{k=1}^{\infty}f_{2k}\sqrt{-s}\left[\sqrt{-t}\,W(s,-t)\right]_t'\sin\mu_k x_0=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{\pi}{2q\sin\frac{\pi}{2q}}\sum_{k=1}^{\infty}f_{2k}\sqrt{-s}\times$$

$$\times\Big[-\lambda_k(-t)^{q-1/2}J_{1/(2q)-1}(p_k(-t)^q)J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q)-$$

$$-\lambda_k(-t)^{q-1/2}J_{1-1/(2q)}(p_k(-t)^q)J_{1/(2q)}(p_k(-s)^q)\Big]\sin\mu_k x_0.$$

Тогда, используя равенство [35, с. 21]

$$J_\nu(z)J_{1-\nu}(z)+J_{-\nu}(z)J_{\nu-1}(z)=\frac{2}{\pi z}\sin\nu\pi,$$

найдем

$$\frac{\partial K_2(s,t)}{\partial t}\Big|_{s=t}=-\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{+\infty}f_{2k}\sin\mu_k x_0=-f_2(x_0). \tag{4.21}$$

Если теперь потребуем, что $f_2(x_0) \neq 0$, то из (4.20) и (4.21) получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$g_2(t) - \lambda \int\limits_{-\alpha}^{0} g_2(s) H(s,t)\, dt = \mu(t), \tag{4.22}$$

где

$$H(s,t) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2}, & -\alpha \leqslant s \leqslant t, \\ \dfrac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 K_2(s,t)}{\partial t^2}, & t \leqslant s \leqslant 0, \end{cases} \tag{4.23}$$

$$\lambda = \frac{1}{f_2(x_0)}, \quad \mu(t) = \frac{\widetilde{h}_2''(t)}{f_2(x_0)}.$$

Ядро $H(s,t)$ интегрального уравнения (4.22), определенное формулой (4.23), непрерывно на замкнутом квадрате $-\alpha \leqslant s,\ t \leqslant 0$. Если $h_2(t) \in C^2[-\alpha, 0]$, то правая часть $\mu(t)$ также непрерывна на $[-\alpha, 0]$. Следовательно, уравнение (4.22) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью, к которому применима известная теория Фредгольма. Это означает фредгольмость задачи 2. Выделим случаи, когда уравнение (4.22) имеет единственное решение [36, с. 434]. Методом последовательных приближений можно доказать однозначную разрешимость данного уравнения в классе непрерывных на $[-\alpha, 0]$ функций при

$$|\lambda| < \frac{1}{M\alpha}, \quad M = \max_{-\alpha \leqslant s,\, t \leqslant 0} |H(s,t)|.$$

Из теории Фредгольма также следует, что, если λ не является характеристическим числом ядра $H(s,t)$, то интегральное уравнение (4.22) имеет единственное непрерывное на $[-\alpha, 0]$ решение.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия леммы* 2.1*; функции* $f_i(x)$, $i = 1, 2$, *и* $g_1(t)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1, $h_2(t) \in C^2[-\alpha, 0]$, $f_2(x_0) \neq 0$. *Тогда при выполнении одного из следующих условий: а)* $|f_2(x_0)| > M\alpha$*; б) число* $f_2^{-1}(x_0)$ *не является характеристическим числом ядра* $H(s,t)$*, существует единственное решение задачи* 3. *При этом функция* $g_2(t)$ *определяется как решение интегрального уравнения* (4.22)*, после чего функция* $u(x,t)$ *определяется по формуле* (2.1).

Отметим также, что условие $f_2(x_0) \neq 0$ является существенным для однозначной разрешимости задачи 3. Действительно, существует функция $f_2(x) = \sin \mu_n x = \sin \pi n \widetilde{x}$, где n – некоторое фиксированное натуральное число, $\widetilde{x} = x/l$, такая, что $f_2(x_0) = \sin \pi n \widetilde{x}_0 = 0$. Тогда для такой функции при любой функции $g_2(t) \in C[-\alpha, 0]$ и $h_2(t) \equiv 0$ строится ненулевое решение задачи 3:

$$u_{2n}(x,t) = T_{2n}(t) \sin \mu_n x, \tag{4.24}$$

где

$$T_{1n}(t) = \begin{cases} \dfrac{\omega_{2n}(\alpha)}{\Delta_n(\alpha)} e^{-\lambda_n^2 t} + f_{1n} \int\limits_0^t g_1(s) e^{-\lambda_n^2 (t-s)}\, ds, & t > 0, \\ \dfrac{\omega_{2n}(\alpha)}{\Delta_n(\alpha)} \Delta_n(-t) - \omega_{2n}(-t), & t < 0, \end{cases}$$

$$\omega_{2n}(-t) = f_{1n} g_1(0) \gamma_{1/(2q)}(n) \sqrt{-t} J_{1/(2q)}(p_n(-t)^q) - W_n(-t).$$

Аналогично функции (3.13) доказывается, что построенная функция (4.24) удовлетворяет условиям задачи 3 при $h_2(t) = 0$ и любой функции $g_2(t) \in C[-\alpha, 0]$.

5. Исследование задачи 4

Требуя, чтобы функция (2.1) удовлетворяла условиям (1.7) и (1.9), получим систему интегральных уравнений с нагруженными слагаемыми

$$\int_0^t g_1(s)K_1(s,t)\,ds - \int_{-\alpha}^0 g_2(s)\widetilde{K}_1(s,t)\,ds = h_1(t) - g_1(0)H_1(t) = \widetilde{\widetilde{h}}_1(t), \tag{5.1}$$

$$\int_t^0 g_2(s)K_2(s,t)\,dt - \int_{-\alpha}^0 g_2(s)K_3(s,t)\,ds = h_2(t) - g_1(0)H_3(t) = \widetilde{h}_2(t), \tag{5.2}$$

где $K_1(s,t)$, $H_1(t)$, $K_2(s,t)$, $K_3(s,t)$ и $H_3(t)$ определяются соответственно формулами (3.2), (3.4), (4.2), (4.3) и (4.5),

$$\widetilde{K}_1(s,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\frac{\pi}{2q\sin\frac{\pi}{2q}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{f_{2k}e^{-\lambda_k^2 t}}{\Delta_k(\alpha)}\sqrt{-s\alpha}\,W(s,\alpha)\sin\mu_k x_0. \tag{5.3}$$

Следуя пп. 3 и 4, продифференцируем уравнение (5.1) один раз, а уравнение (5.2) два раза. В результате имеем

$$g_1(t)f_1(x_0) - \int_0^t g_1(s)\frac{\partial K_1(s,t)}{\partial t}\,ds - \int_{-\alpha}^0 g_2(s)\frac{\partial \widetilde{K}_1(s,t)}{\partial t}\,ds = \widetilde{\widetilde{h}}{}_1'(t), \tag{5.4}$$

$$-g_2(t)f_2(x_0) + \int_t^0 g_2(s)\frac{\partial^2 K_2(s,t)}{\partial t^2}\,ds - \int_{-\alpha}^0 g_2(s)\frac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2}\,ds = \widetilde{h}_2''(t). \tag{5.5}$$

Полагая в равенствах (5.4) и (5.5) $t=0$, получим

$$g_1(0)f_1(x_0) - \int_{-\alpha}^0 g_2(s)\frac{\partial \widetilde{K}_1(s,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}\,ds = h_1'(0) - g_1(0)H_1'(0), \tag{5.6}$$

$$-g_2(0)f_2(x_0) - \int_{-\alpha}^0 g_2(s)\frac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2}\bigg|_{t=0}\,ds = h_2''(0) - g_1(0)H_3''(0). \tag{5.7}$$

На основании формул (5.3), (4.3), (3.4) и (4.5) вычислим

$$\frac{\partial \widetilde{K}_1(s,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = -\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{\pi}{2q\sin\frac{\pi}{2q}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{f_{2k}\lambda_k^2}{\Delta_k(\alpha)}\sqrt{-s\alpha}\,W(s,\alpha)\sin\mu_k x_0,$$

$$\frac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2}\bigg|_{t=0} = -\lambda_k^2(-t)^m K_3(s,t)\big|_{t=0} = 0,$$

$$H_1'(0) = -\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^2 f_{1k}}{\Delta_k(\alpha)}\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{\alpha}J_{1/(2q)}(p_k\alpha^q)\sin\mu_k x_0,$$

$$H_3''(t)\big|_{t=0} = -\lambda_k^2(-t)^m H_3''(t)\big|_{t=0} = 0.$$

Из уравнения (5.6) найдем

$$g_1(0) = \Big(f_1(x_0) + H_1'(0)\Big)^{-1}\left[h_1'(0) + \int_{-\alpha}^0 g_2(s)\frac{\partial \widetilde{K}_1(s,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} ds\right]$$

при условии $f_1(x_0)+H_1'(0)\neq 0$ и подставим в правую часть уравнения (5.5). Тогда, если $f_2(x_0)\neq 0$, то из (5.5) получаем интегральное уравнение

$$g_2(t)-\lambda\int\limits_{-\alpha}^{0} g_2(s)\widetilde{H}(s,t)\,dt=\widetilde{\mu}(t), \tag{5.8}$$

где

$$\widetilde{H}(s,t)=\begin{cases}\dfrac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2}-\dfrac{H_3''(t)}{f_1(x_0)+H_1'(0)}\dfrac{\partial \widetilde{K}_1(s,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}, & -\alpha\leqslant s\leqslant t,\\ \dfrac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2}-\dfrac{H_3''(t)}{f_1(x_0)+H_1'(0)}\dfrac{\partial \widetilde{K}_1(s,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}+\dfrac{\partial^2 K_2(s,t)}{\partial t^2}, & t\leqslant s\leqslant 0,\end{cases} \tag{5.9}$$

$$\lambda=\frac{1}{f_2(x_0)},\quad \widetilde{\mu}(t)=\frac{H_3''(t)h_1'(0)}{f_2(x_0)(f_1(x_0)+H_1'(0))}-\frac{h_2''(t)}{f_2(x_0)}.$$

Уравнение (5.8) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью, к которому применима теория Фредгольма [36, с. 434].

После нахождения функции $g_2(s)$ из уравнения (5.8) можно найти функцию $g_1(s)$ из (5.4) как решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью при выполнении условии $f_1(x_0)\neq 0$ и (3.12).

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 5.1. *Пусть имеют место условия леммы* 2.1; *функции* $f_i(x)$, $i=1,2$, *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1, $h_1(t)\in C^1[0,\beta]$, $h_2(t)\in C^2[-\alpha,0]$, $f_1(x_0)\neq 0$, $f_2(x_0)\neq 0$, *выполнено неравенство* (3.12) *и одно из следующих условий: а)* $|f_2(x_0)|>M\alpha$, *где* $M=\max\limits_{-\alpha\leqslant s,t\leqslant 0}|\widetilde{H}(s,t)|$; *б) число* $f_2^{-1}(x_0)$ *не является характеристическим числом ядра* $\widetilde{H}(s,t)$. *Тогда система интегральных уравнений* (5.4) *и* (5.5) *имеет единственное решение* $g_1(t)\in C[0,\beta]$ *и* $g_2(t)\in C[-\alpha,0]$, *после этого функция* $u(x,t)$ *находится по формуле* (2.1). *Если нарушено условие* (3.12), *система интегральных уравнений* (5.4) *и* (5.5), *следовательно задача 4, имеют решения с точностью слагаемого, множителем которого является неизвестное число* $g_1(0)$.

Покажем, что условия $f_1(x_0)\neq 0$ или $f_2(x_0)\neq 0$ являются существенными для однозначной разрешимости задачи 4.

Пусть $f_1(x_0)=0$, а $f_2(x_0)\neq 0$. Тогда существует функция $f_1(x)=\sin\mu_m x=\sin\pi n\widetilde{x}$, где m – некоторое фиксированное натуральное число, $\widetilde{x}=x/l$, такая, что $f_1(x_0)=\sin\pi m x_0=0$. Тогда для функции $f_1(x)=\sin\mu_m x$ и любых $g_1(t)\in C[0,\beta]$, $g_2(t)\in C[-\alpha,0]$ существует ненулевое решение задачи 4 при $h_1(t)\equiv 0$, $h_2(t)\equiv 0$, которое определяется формулой (3.13).

Пусть $f_2(x_0)=0$, а $f_1(x_0)\neq 0$. Тогда существует функция $f_2(x)=\sin\mu_n x=\sin\pi n\widetilde{x}$, где n – некоторое фиксированное натуральное число, такая, что $f_2(x_0)=\sin\pi n\widetilde{x}_0=0$. Тогда для функции $f_2(x)=\sin\mu_n x$ и любых $g_1(t)\in C[0,\beta]$, $g_2(t)\in C[-\alpha,0]$ существует ненулевое решение задачи 4 при $h_1(t)\equiv 0$, $h_2(t)\equiv 0$, которое определяется формулой (4.24).

Пусть существуют функции $f_1(x)=f_2(x)=\sin\mu_m x$, где m – некоторое фиксированное натуральное число, такие, что $f_1(x_0)=f_2(x_0)=\sin\mu_m x_0=0$. Тогда для функций $f_1(x)=f_2(x)=\sin\mu_m x$ и любых $g_1(t)\in C[0,\beta]$, $g_2(t)\in C[-\alpha,0]$ существует ненулевое решение задачи 4 при $h_1(t)\equiv 0$, $h_2(t)\equiv 0$

$$u_{3m}(x,t)=T_{3m}(t)\sin\mu_m x, \tag{5.10}$$

где

$$T_{3m}(t) = \begin{cases} \dfrac{\omega_{3m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)} e^{-\lambda_m^2 t} + \int\limits_0^t g_1(s) e^{-\lambda_m^2 (t-s)}\, ds, & t > 0, \\ \dfrac{\omega_{3m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)} \Delta_m(-t) - \omega_{3m}(-t), & t < 0, \end{cases}$$

$$\omega_{3m}(-t) = g_1(0)\gamma_{1/(2q)}(m)\sqrt{-t} J_{1/(2q)}(p_m(-t)^q) - W_m(-t).$$

Аналогично п. 3 можно показать, что построенная функция (5.10) удовлетворяет условиям (1.2) – (1.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. 1959. Т. XIV. Вып. 3. С. 3 – 19.
2. Уфлянд Я.С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инженер.-физ. журн. 1964. Т. 7. № 1. С. 89 – 92.
3. Уфлянд Я.С., Лозановская И.Т. Об одном классе задач математической физики со смешанным спектром собственных значений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164. № 5. С 1005 – 1007.
4. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.
5. Ладыженская О.А., Ступялис Л. Об уравнениях смешанного типа // Вестник ЛГУ. Серия мат., мех. и астр. 1965. Т. 19. № 4. С. 38 – 46.
6. Ступялис Л. Начально-краевые задачи для уравнений смешанного типа // Труды МИАН СССР. 1975. Т. XXVII.С. 115 – 145.
7. Капустин Н.Ю. Задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью. I, II. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 1. С. 72 – 78; 1988. Т. 24. № 8. С. 1379 – 1386.
8. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О спектральной задаче из теории параболо-гиперболического уравнения теплопроводности // ДАН. 1997. Т. 352. № 4. С. 451.
9. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. М.: Наука, 2016. 272 с.
10. Сабитов К.Б. Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения // Матем. заметки. 2017. Т. 102. Вып. 3. С. 415 – 435.
11. Сабитов К.Б., Рахманова Л.Х. Начально-граничная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 9. С. 1175 - 1181.
12. Сабитов К.Б. Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. 2009. Т. 86. Вып. 2. С. 273 – 279.
13. Сабитов К.Б. Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения со степенным вырождением на переходной линии // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 1. С. 1 – 8.
14. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 3. С. 356 – 365.
15. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2017. Т. 137. С.26 – 60.
16. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Известия вузов. Математика. 2010. Т. 56. № 4. С. 55 – 62.
17. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Матем. заметки. 2010. Т. 87. Вып. 6. С. 907 – 918.

18. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // Известия Вузов. Математика. 2015. № 1. С. 46 – 59.
19. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, 1982.
20. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 262 с.
21. Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука, 1991.
22. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 208 с.
23. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel: Marcel Dekker Inc, 1999. 709 p.
24. Isakov V. Inverse problems for partial differential equations // New-York: Springer. 2006. 358 p.
25. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с. (изд. 2)
26. Прилепко А.И., Соловьев В.В. Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнения параболического типа. I; II // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 10. С. 1791 – 1799; Т. 23. № 11. С. 1971 – 1980.
27. Прилепко А.И., Васин И.А. Исследование вопросов единственности решений в некоторых нелинейных обратных задачах гидродинамики // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 1. С. 109 – 120.
28. Прилепко А.И., Костин А.Б. Оценка спектрального радиуса одного оператора и разрешимость обратных задач для эволюционных уравнений // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 1. С. 89 – 94.
29. Соловьев В.В. Определение источника и коэффициентов в параболическом уравнении в многомерном случае // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 6. С. 1060 – 1069.
30. Соловьев В.В. Существование решения в "целом"обратной задачи определения источника в квазилинейном уравнении параболического типа // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 4. С. 536 – 544.
31. Костин А.Б. Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения // Математический сборник. 2013. Т. 204. № 10. С. 3 – 46.
32. Kozhanov A.I. A nonlinear loaded parabolic equation and a related inverse problem // Math. Notes. 2004. Vol. 76. No. 6. P. 784 – 795.
33. Kozhanov A.I., Safiullova R.R. Linear inverse problems for parabolic and hyperbolic equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2010 Vol. 18. No. 1. P. 1 – 18.
34. Арнольд В.И. Малые знаменатели // Известия РАН. Серия математическая. 1961. Вып. 25. С. 21 – 86.
35. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974 (изд. 2). 296 с.
36. Сабитов К.Б. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Высш. шк., 2005. 671 с.

Станислав Николаевич Сидоров,
Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований РБ,
ул.Одесская, 68,
453103, г. Стерлитамак, Россия
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр.Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: `stsid@mail.ru`